

# Nogomet u nastavi matematike

## 1. razreda srednje škole

FILIP MIJAČ<sup>1</sup> I FRANKA MIRIAM BRÜCKLER<sup>2</sup>

### Uvod – srednja škola

Nakon uspješno završene osnovne škole i znanja stečenog u osam godina školovanja učenici upisuju srednju školu. U ovom nastavku našeg serijala, kao i u sljedećim trimama, opisat ćemo poveznice gradiva srednje škole s nogometom. Pritom ćemo kao reprezentativno uzeti gradivo opće ili matematičke gimnazije. Razlog je jednostavan; naime, širina gradiva u gimnazijama ipak nam omogućuje obuhvatiti više tema, dok bismo u suprotnome bili ograničeni.

### Statistika u 1. razredu SŠ

Početakom 1. razreda srednje škole nastava matematike koncipirana je na način da se prvo znanja iz osnovne škole nadograđuju novim znanjima, tj. da se „stari“ gradivo proširi na složenije probleme, a krajem 1. razreda krene se na nove matematičke teme – trigonometriju i statistiku.

Od 2019. godine na snazi je novi Kurikulum [1] koji je dvije spomenute teme prebacio u 1. razred srednje škole. Nažalost, statistika se obrađuje krajem školske godine, najčešće u lipnju kada se zaključuju ocjene, pa se nekad niti ne stigne obraditi navedena cjelina, a ponekad se to učini samo površno.

Nakon što učenici uspješno svladaju cjeline algebarskih izraza i potencija, linearnih jednadžbi i nejednadžbi te linearnu funkciju koja se veže i na funkciju apsolutne vrijednosti, možemo početi sa statistikom koja dobiva sve veći značaj u nogometu, posebno u državi u kojoj živi približno 4 milijuna stanovnika i isto toliko nogometnih igrača i analitičara. Mnogo jednostavnih primjera veza statistike i nogometa susreli smo u prethodnim nastavcima ovog serijala, no u 1. razredu srednje škole, uz već poznate tipove prikaza podataka i poneke osnovne statističke teme, učenici se susreću s različitim vrstama srednjih vrijednosti, pojmom standardne devijacije te nekim dodatnim vrstama prikaza podataka.

---

<sup>1</sup>Filip Mijač, X. gimnazija Ivan Supek, Zagreb

<sup>2</sup>Franka Miriam Brückler, PMF – Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu

Pitanje je kakvi se to podatci obrađuju u nogometu i gdje sve nailazimo na statistiku koja je usko povezana s matematikom. Gotovo svaki profesionalni klub uz trenera ima i analitičara koji prikuplja podatke o drugim klubovima i njihovim igračima, pozicijama na kojima igraju, njihovim rezultatima, postignutim i primljenim zgoditcima i slično. Analiziraju se i brzina igrača, otkucaji srca, krvni tlak i druge karakteristike pojedinog igrača, a naravno tome dosta pridonose i tehničke naprave poput umreženih pametnih prsluka. Za početak, fokusirat ćemo se na nogometne lige.

Aktivnost koju ćemo provesti može biti učenicima itekako zanimljiva i oni samo na temelju toga mogu proizvoljno odabrati nogometnu ligu i analizirati je, pa sljedeći primjer može poslužiti kao dobar projektni zadatak iz matematike.

**Primjer 1.** U ovom trenutku promatrat ćemo SuperSport Hrvatsku nogometnu ligu (skraćeno SHNL), odnosno posljednju završenu sezonu 2022./2023. Njezina konačna tablica prikazana je na Slici 1. [3].

PLASMAN	KLUB	POBJEDE	NERIJEŠENO	PORAZI	POSTIGNUTO	PRIMLJENO	GOL-RAZLIKA	BODOVI
1.	Dinamo	24	9	3	81	28	53	81
2.	Hajduk	21	8	7	65	41	24	71
3.	Osijek	13	11	12	46	41	5	50
4.	Rijeka	14	7	15	44	44	0	49
5.	Istra 1961	11	13	12	36	38	-2	46
6.	Varaždin	12	10	14	41	51	-10	46
7.	Lokomotiva	11	10	15	45	50	-5	43
8.	Slaven Belupo	10	13	13	27	46	-19	43
9.	Gorica	7	11	18	36	50	-14	32
10.	Šibenik	5	12	19	24	56	-32	27

Slika 1. Konačna tablica SHNL u sezoni 2022./23.

GNK Dinamo, stalni prvoligaš i klub koji kontinuirano igra europska natjecanja, osvojio je prvo mjesto koje su osvajali već 18 puta u zadnjih 19 godina. Za analizu podataka iz tablica na Slici 1. služimo se nekim programom za tablično računanje, primjerice MS Excel. Analizu započinjemo općim podacima koje možemo iščitati iz tablice, primjerice da je osvajač lige odigrao 36 utakmica s 24 pobjede, 9 neriješenih utakmica i samo 3 poraza. Postigao je 81 pogodak, a 28 primio, što određuje gol-razliku od +53. Određivanjem gol-razlike bavili smo se u 6. razredu osnovne škole [4], a sad samo podsjetimo na to da je računamo tako da od broja postignutih pogodaka oduzmemo broj primljenih pogodaka.

Budući da znamo pravila nogometne igre [6] koja, naravno, uključuju činjenicu da netko mora izgubiti da bi drugi pobijedio, zbroj broja pobjeda jednak je zbroju broja poraza, a preostali broj od ukupnog broja odigranih utakmica čine one koje su završile bez pobjednika, tj. neriješeno. Već u samom početku dolazimo do jedne zanimljive situacije, a to je da je u navedenoj sezoni svaki klub odigrao 36 utakmica, a ukupno je odigrano 180 utakmica, a ne 360, do čega dolazimo tako što je svaka utakmica igrana u paru između klubova, primjerice utakmica između Dinama i Hajduka, upisana kao odigrana utakmica za oba kluba, iako je to zapravo bila jedna utakmica.

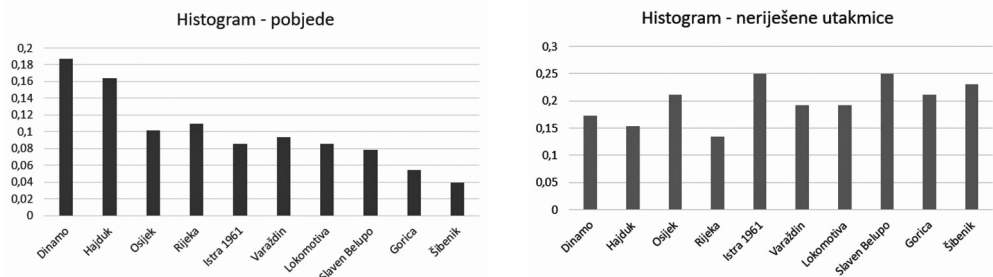
Nastavimo li analizu dalje, vidimo da je od 180 utakmica, njih 128 završilo pobjedom (odnosno porazom) jedne od momčadi, a da su ukupno klubovima pripisana 104 neriješena ishoda, što znači da su 52 utakmice završile neriješeno. Također možemo izračunati postotke i aritmetičke sredine ovih podataka. Podijelimo li broj pobjeda s ukupnim brojem utakmica, dobivamo 71.11 % utakmica u kojima je jedan od sudionika pobijedio (odnosno izgubio), a broj utakmica koje su završile neriješeno dobivamo na sličan način, tj. 28.89 %. Gledajući dobivene postotke, možemo otprilike reći da na svake 4 utakmice s pobjednikom dolazi 1 bez pobjednika. Možemo izračunati i aritmetičku sredinu, odnosno koliko su u prosjeku klubovi pobjeđivali. Ukupan broj klubova je 10 pa podijelimo broj utakmica s pobjednikom i dobivamo 12.8 utakmica po klubu, odnosno 5.2 neriješenih. Možemo izračunati i prosječan broj postignutih pogodaka po klubu. Ukupan broj postignutih pogodaka u navedenoj sezoni iznosi 445, što znači da su u klubovi u prosjeku postigli 44.5 pogodaka po sezoni. Ako je toliko postignutih pogodaka, toliko je i primljenih, pa je i prosjek primljenih pogodaka jednak prosjeku postignutih.

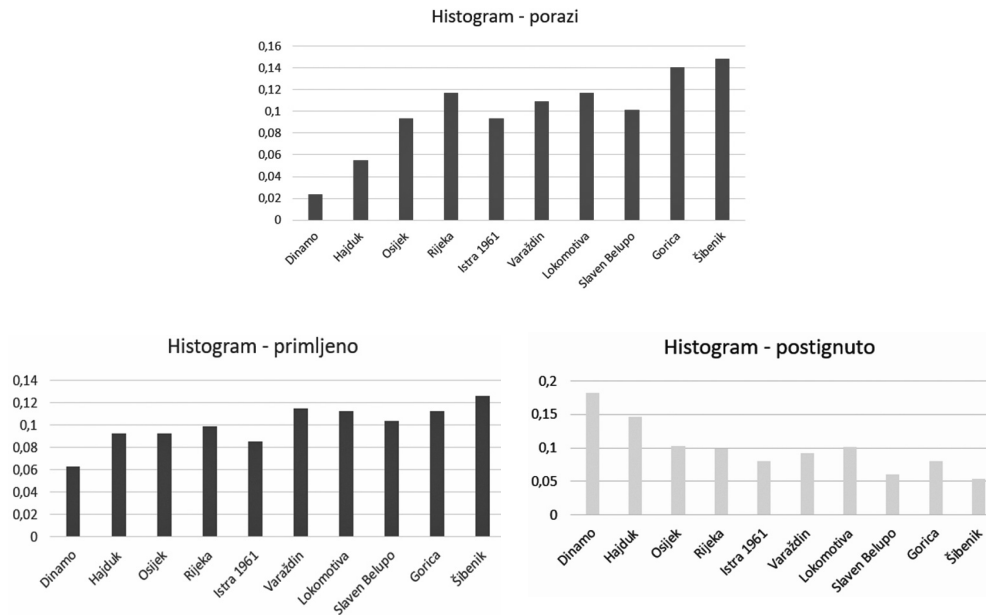
Kako su ovi podatci rangirani prema plasmanu kojemu je pridružen i naziv kluba, takve ćemo ih promatrati. Od podataka koji se nalaze u tablici za 1. razred srednje škole mogu se iskoristiti podatci o pobjedama, neriješenim i izgubljenim utakmicama, ali i podatci o primljenim i postignutim pogotcima. Te podatke promatramo kao frekvencije pa možemo izračunati i njihove relativne frekvencije (*r. f.*) koje se nalaze u stupcima pored u tablici na Slici 2.

PLASMAN	KLUB	POBJEDE	I. R. F.	NERIJEŠENO	II. R. F.	PORAZI	III. R. F.	POSTIGNUTO	IV. R. F.	PRIMLJENO	V. R. F.
1.	Dinamo	24	0,1875	9	0,17308	3	0,02344	81	0,18202	28	0,06292
2.	Hajduk	21	0,16406	8	0,15385	7	0,05469	65	0,14607	41	0,09213
3.	Osijek	13	0,10156	11	0,21154	12	0,09375	46	0,10337	41	0,09213
4.	Rijeka	14	0,10938	7	0,13462	15	0,11719	44	0,09888	44	0,09888
5.	Istra 1961	11	0,08594	13	0,25	12	0,09375	36	0,0809	38	0,08539
6.	Varaždin	12	0,09375	10	0,19231	14	0,10938	41	0,09213	51	0,11461
7.	Lokomotiva	11	0,08594	10	0,19231	15	0,11719	45	0,10112	50	0,11236
8.	Slaven Belupo	10	0,07813	13	0,25	13	0,10156	27	0,06067	46	0,10337
9.	Gorica	7	0,05469	11	0,21154	18	0,14063	36	0,0809	50	0,11236
10.	Šibenik	5	0,03906	12	0,23077	19	0,14844	24	0,05393	56	0,12584

Slika 2. Apsolutne i relativne frekvencije brojeva pobjeda, poraza, neriješenih utakmica te postignutih i primljenih zgoditaka za SHNL u sezoni 2022./23.

Sada kada imamo relativne frekvencije možemo kreirati i histograme (Slika 3.) za svaki pojedini stupac iz tablice sa Slike 2., grupirano po kategoriji naziva kluba.





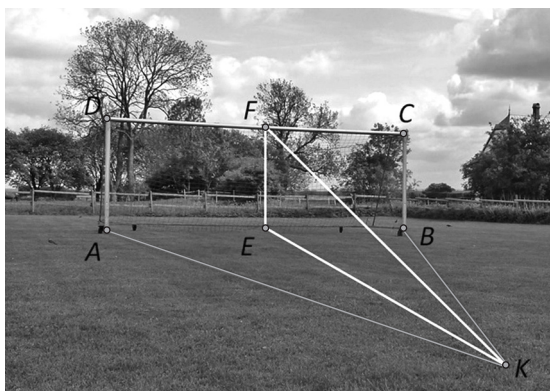
Slika 3. Histogrami za podatke iz tablice sa Slike 2.

Osim histogramima, podatke smo mogli prikazati linijskim dijagramima, a mogli su se grupirati i na način da se prikažu dijagramom stablo – list, no histogrami su prikladniji za prikaz ovog tipa podataka.

## Nogomet u geometriji 1. razreda SŠ

Nakon statistike prijedimo na već spomenutu trigonometriju. Geometrija 1. razreda srednje škole pruža mnogo mogućnosti povezivanja s nogometnim temama, pri čemu se posebno ističu trigonometrijske funkcije u pravokutnom trokutu. Za početak krenimo s kaznenim udarcima.

**Primjer 2.** U 8. razredu [5] već smo matematički razmatrali kaznene udarce i udaljenosti koje lopta prijeđe u svojoj putanji, a sada ćemo promatrati kut pod kojim se vide vrata iz točke izvođenja kaznenog udarca. Iz statistike HNL-a možemo iščitati podatak da je najbolji izvođač kaznenih udaraca u povijesti ovog natjecanja **Ivan Krstanović** koji ih je postigao ukupno 31. Kao što smo ranije pisali, kazneni udarac izvodi se s 11 metara, a širina vrata je 7.32 m i visina 2.44 m. Iz ovih podataka možemo izračunati pod kojim se kutom vide vrata iz točke za izvođenje kaznenog udarca, ali ipak treba biti oprezan. Imamo naime dva moguća kuta: jedan je kut  $\alpha$  pod kojim se iz točke izvođenja kaznenog udarca vide vratnice ( $\angle AKB$  na Slici 4.), a drugi je kut  $\beta$  pod kojim se iz iste točke vidi vertikalna simetrala vrata (njezin dio  $\overline{EF}$  između gol-crte i grede, to je  $\angle EKF$  na Slici 4.). Uočimo da su  $\angle KEF$ ,  $\angle KEA$  i  $\angle AEF$  na Slici 4. pravi.



Slika 4. Geometrija kaznenog udarca

Vidimo jednakokrakan trokut  $ABK$  koji zatvara gol-crta  $\overline{AB}$  i krakovi  $\overline{KA}$  i  $\overline{KB}$  prikazani crvenom bojom. Između krakova je kut  $\alpha = \angle AKB$ . U ovom trokutu visina je udaljenost od točke za izvođenje kaznenog udarca do gol-crte, a to je  $|EK| = 11$  m. Učenci u 1. razredu srednje škole uče koristiti trigonometriju za računanje veličine kutova, odnosno duljina stranica trokuta u pravokutnom trokutu. Prema tome, uzmemo jedan od pravokutnih trokuta  $AEK$  ili  $BEK$  i izračunamo veličinu kuta  $\frac{\alpha}{2}$ , a tada je  $\alpha$  dvostruko veći kut. Račun slijedi u nastavku:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{732}{2}}{1100},$$

$$\frac{\alpha}{2} = 18^{\circ} 24',$$

$$\alpha = 36^{\circ} 48'.$$

Promotrimo sada kut  $\beta = \angle EKF$  pod kojim se iz točke  $K$  vidi vertikalni raspon vrata. Ovdje odmah uočavamo pravi kut u vrhu  $E$  u trokutu  $KEF$  pa je jednostavno izračunati kut  $\beta$ :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{244}{1100},$$

$$\beta = 12^{\circ} 30'.$$

Kao što vidimo, oba su kuta poprilično mala iako gledateljima izgledaju veliko. Navijački žar često mijenja percepciju pa se često pitamo kako je netko mogao promašiti, kako mu je to vratar obranio i slično. Naravno, naš Ivan Krstanović, unatoč matematičkim izračunima, dobro je poznat po tome da rijetko, tj. gotovo nikada ne promaši kazneni udarac.

## Zaključak

Kao što smo na početku rekli, u 1. razredu srednje škole uz nove sadržaje iz statistike te prvog susreta s trigonometrijom, učenici utvrđuju i proširuju gradivo matematike osnovne škole. Konkretno, radi se o računu s realnim brojevima, potencijama s cjelobrojnim eksponentima, proporcionalnosti i postotcima, linearnim jednadžbama i njihovim sustavima, linearnim funkcijama i još ponekoj temi. Stoga se pri obrađivanju takvih već iz osnovne škole poznatih tema možemo poslužiti i primjerima iz prethodnih nastavaka ovog serijala, primjerice sustavom linearnih jednadžbi iz [5], a mnoge dodatne primjere možete naći i u [2].

## Literatura

1. Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj. Narodne novine 7/2019. [https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019\\_01\\_7\\_146.html](https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html)
2. Mijač, F. (2021.), Nogomet u nastavi matematike. Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu
3. SofaScore. <https://www.sofascore.com/>
4. Brückler, F. M., Mijač, F. (2023.). *Nogomet u nastavi matematike 6. razreda osnovne škole*. Poučak 24 (93) 55–61
5. Brückler, F. M., Mijač, F. (2023.). *Nogomet u nastavi matematike 8. razreda osnovne škole*. Poučak 24 (95) 37–41
6. Hrvatski nogometni savez, *Pravila nogometne igre 21./22.* (2021.). <https://hns-cff.hr/files/documents/21824/PNI%202021-2022.pdf>