Učenje istraživanjem i pričanjem priče

Ljiljana Arambašić[1], Klaudija Dujlović[2], Magdalena Pleša[3] i
Zvijezdana Posavec[4]

Uvod

Na drugoj godini preddiplomskog studija matematike nastavničkog smjera izvodi se kolegij pod nazivom Učenje istraživanjem i rješavanjem problema. Ovaj kolegij ne samo da pruža uvid u različite metode i strategije za rješavanje matematičkih zadataka, poput metode invarijanti, principa matematičke indukcije, bojenja (popločavanja) i slično, već potiče i razvoj kritičkog razmišljanja i samostalnosti u rješavanju problema. Kroz interaktivne seminare studenti imaju priliku odabrati zadatke iz obrađene cjeline i pripremiti ih za nastavu. Umjesto jednostavnog prezentiranja gotovog rješenja, student ima zadatak potaknuti svoje kolege da samostalno dođu do rješenja. Stoga je bio važan i odabir zadataka. Na primjer, ako bi zadatak bio prelagan, studenti bi ga brzo i rutinski riješili. S druge strane, kod preteških zadataka nije bilo jasno ni kako započeti rješavanje, a ponekad bi uputa koju bi dobili otkrivala previše.

Studenti su imali priliku direktno se uvjeriti da ovakav način rada, ako ga želimo kvalitetno odraditi, nije nimalo jednostavan iako to ponekad može tako izgledati. Međutim, kroz ovakvo vođeno otkrivanje ostvaruje se dublje razumijevanje gradiva i razvija kreativno razmišljanje kod studenata, kako kod onih koji rješavaju zadatke na satu, tako i kod studenta koji ih vodi kroz rješavanje.

U ovom članku navodimo nekoliko zadataka koji su bili prezentirani na nastavi. Zadatci su preuzeti iz literature navedene na kraju članka, a neki su od njih prilagođeni ili prošireni radi boljeg razumijevanja i uklapanja u cjelinu. Odabrali smo zadatke koji su nam bili zanimljivi, ali i takvi da su prikladni za srednju školu, jer se glavna ideja rješenja zadatka temelji na logičkom razmišljanju.

Još jedan razlog ovakvog odabira zadataka je taj što smo ih htjeli smjestiti u priču o jednom kralju i kraljici, balu na njihovu dvoru i svemu što se te večeri tamo događalo. Ovim pristupom željeli smo potaknuti čitateljevu znatiželju i interes te se prisjetiti čari istraživanja i otkrivanja u matematici. Ilustracije je osmislila i izradila Klaudija Dujlović.

[1]Ljiljana Arambašić, PMF-Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu
[2]Klaudija Dujlović, studentica na PMF-Matematičkom odsjeku Sveučilišta u Zagrebu
[3]Magdalena Pleša, studentica na PMF-Matematičkom odsjeku Sveučilišta u Zagrebu
[4]Zvijezdana Posavec, studentica na PMF-Matematičkom odsjeku Sveučilišta u Zagrebu

Vrijeme je da krenemo s pričom sastavljenom od zadataka.

Na kraljevskom balu

Živio jednom jedan kralj koji je, zajedno sa svojom kraljicom, vladao velikim kraljevstvom. Nakon što bi obavio sve poslove vezane za vođenje kraljevstva, najbolje se opuštao uz rješavanje različitih zagonetki. To ga je zabavljalo, a kako je bio mudar, znao je koliko je važno da se i svi ostali u njegovu kraljevstvu dobro zabavljaju. Tako je kralj odlučio organizirati bal na svom raskošnom dvoru. Isplanirao je sve do zadnjeg detalja, osim što nije znao kako odlučiti kojem će slugi dati koji posao. Vidjevši staru vagu i utege u kutu, sinula mu je zanimljiva ideja kako riješiti ovaj problem. Pozvao je sve sluge i rekao im sljedeće:

Zadatak 1. U mojoj je riznici pet vrčeva punih zlatnika. U četiri od njih svaki zlatnik teži 20 grama, a u jednome svaki zlatnik teži 21 gram. Koristeći vagu i utege trebate otkriti vrč s težim zlatnicima.

Onaj koji to uspije u četiri vaganja, posluživat će goste. Onaj koji to uspije u tri vaganja, dočekivat će goste, a onaj kome je dovoljno samo jedno vaganje, bit će voditelj bala. U kojem su vrču teži zlatnici?

Rješenje. Označimo sa z_1, z_2, z_3, z_4 i z_5 redom zlatnike iz prvog, drugog, trećeg, četvrtog i petog vrča. Dobiti posao posluživanja gostiju nije teško. U četiri vaganja možemo pomoću utega izvagati četiri zlatnika i pritom ćemo ili naći teži zlatnik među ta četiri zlatnika ili zaključiti da teži zlatnik nije među izvaganim zlatnicima, pa je to onaj preostali.

Pokušajmo sada problem riješiti u tri vaganja. Usporedimo mase zlatnika z_1 i z_2, zatim z_2 i z_3 i na kraju z_3 i z_4. Ako je u svakom uspoređivanju vaga u ravnoteži, onda je teži zlatnik u petom vrču, a ako u jednom od ovih vaganja vaga nije u ravnoteži, traženi zlatnik je onaj teži.

Kako u samo jednom vaganju otkriti teži zlatnik? Iz prvog vrča uzet ćemo jedan zlatnik, iz drugog dva, trećeg tri, četvrtog četiri i iz petog pet zlatnika i izvagati ih. Da je svaki zlatnik težak 20 grama, vaga bi ukupno pokazala

$$(1 + 2+ 3 + 4 + 5) \cdot 20 = 300$$

grama. Ali nije tako, nego su u točno jednom vrču zlatnici teži za točno jedan gram. Ako vaga pokaže 301 gram, to znači da je samo jedan zlatnik teži, dakle u prvom su vrču teži zlatnici. Ako vaga pokaže 302 grama, tada su dva zlatnika teža, pa je drugi vrč traženi vrč. Isto tako zaključujemo da su teži zlatnici u trećem vrču ako im je masa 303 grama, u četvrtom ako je 304 grama, te petom ako je 305 grama. Na ovaj se način u samo jednom vaganju može otkriti vrč s težim zlatnicima. ♠

Sada su svi znali svoje dužnosti i bal je mogao početi. Na kraljevski dvor pristizali su uzvanici, a neki su se od njih međusobno rukovali. Naravno, neke su se osobe rukovale s neparnim, a neke s parnim brojem osoba. Kralj je uočio jednu pravilnost koju je onda matematički dokazao.

Zadatak 2. Dokažite da je broj osoba koje su se rukovale s neparnim brojem osoba na dvoru uvijek paran.

Rješenje. Reći ćemo da je osoba *neparna* ako se rukovala s neparnim brojem osoba, a *parna* ako se rukovala s parnim brojem osoba. Tvrdimo da je broj neparnih osoba uvijek paran.

Prije nego što je rukovanje počelo, broj neparnih osoba bio je 0, dakle, paran broj. Pretpostavimo da je broj neparnih osoba nakon k rukovanja bio paran, na primjer $2N$ za neki N. Pogledajmo koliko je neparnih osoba nakon još jednog rukovanja. Moguće su 3 situacije:

- Ako se rukuju dvije neparne osobe, obje će postati parne. Tada se broj neparnih osoba smanji za 2.
- Ako se rukuju dvije parne osobe, obje će postati neparne, pa se ukupan broj neparnih osoba poveća za 2.
- Ako se rukuju parna i neparna osoba, parna osoba postaje neparna, a neparna parna. Ukupan broj neparnih osoba u ovom se slučaju ne mijenja.

Prema tome, broj neparnih osoba nakon $(k + 1)$ rukovanja je ili $2N - 2$ ili $2N + 2$ ili $2N$, dakle paran broj. Po principu matematičke indukcije zaključujemo da je broj neparnih osoba uvijek paran. ♠

Bal se odvijao u palači i u vrtu. Kralj je promatrao svoje uzvanike kako ulaze u palaču i izlaze u vrt i smislio sljedeći zadatak.

Zadatak 3. Ako smo na početku u palači bili samo kraljica i ja, te ako svake minute ili u palaču uđe jedna osoba ili dvije osobe izađu u vrt, može li nakon točno 3^{2024} minute u palači broj osoba biti jednak 3^{1012}?

Rješenje. Zadatak ćemo riješiti na dva načina.

1. način: Pogledajmo za koliko se može promijeniti broj osoba u palači u roku od tri minute:

- Ako je tri puta ušla po jedna osoba, ukupan broj osoba povećao se za 3.
- Ako je jednom ušla jedna osoba i dva puta izašle po dvije osobe, ukupan broj osoba smanjio se za 3.
- Ako je dva puta ušla po jedna osoba i jednom izašle dvije osobe, broj osoba u palači ostao je isti.
- Ako su tri puta izašle po dvije osobe, ukupan broj osoba smanjio se za 6.

Označimo s N_k, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ broj osoba u palači nakon $3k$ minuta. Kako su na početku u palači samo kraljica i kralj, slijedi da je $N_0 = 2$. Dakle, N_0 pri dijeljenju s 3 daje ostatak 2. Pokažimo sada, koristeći matematičku indukciju, da ovo vrijedi za svaki N_k. Baza indukcije već je provjerena. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki k. Iz gornjeg razmatranja slijedi da je N_{k+1} jednak jednom od sljedećih brojeva: $N_k + 3$, $N_k - 3$, N_k ili $N_k - 6$. Prema tome, N_k i N_{k+1} imaju isti ostatak pri dijeljenju s 3, dakle, 2. Time je tvrdnja dokazana. Posebno, tvrdnja vrijedi i za $k = 3^{2023}$, pa zaključujemo da je odgovor negativan.

2. način: Pretpostavimo da se m puta dogodilo da je u palaču ušla po jedna osoba. Tada su $3^{2024} - m$ puta izašle po dvije osobe. S obzirom na to da su na početku u palači bile točno dvije osobe, nakon 3^{2024} minuta bit će ih

$$2 + 1 \cdot m - 2 \cdot (3^{2024} - m) = 2 + 3(m - 2 \cdot 3^{2023}).$$

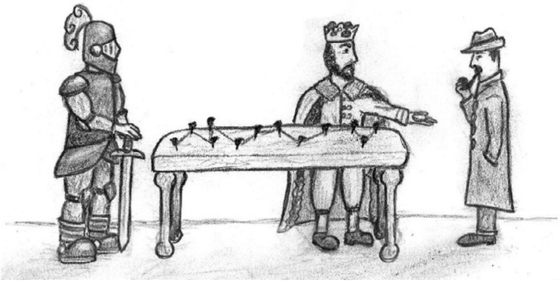
Kako ovaj broj nije djeljiv s 3 niti za jedan m, on ne može iznositi 3^{1012}. ♠

Na balu su se svi uzvanici dobro zabavljali, plesali i pjevali. Na zahtjev uzvanika jedan je sluga otišao po bocu skupocjenog šampanjca koji se nalazio u riznici. Kada je tamo došao, shvatio je da nedostaje jedan vrč pun zlatnika. Odmah je o tome obavijestio kralja koji je pozvao detektive da riješe slučaj. Glazba je stala, detektivi su brzo stigli i počeli istraživati slučaj.

Detektivi su pronađene tragove i veze među njima prikazivali na plutenoj ploči: tragove pribadačama, a vezu između njih koncem između pribadača. Naravno, ponekad bi se dogodilo da su zaključci o vezama između tragova pogrešni. Tada bi presjekli sve konce između tragova i postavljali nove konce.

Zadatak 4. Detektivi trenutno imaju 2025 različitih tragova, pri čemu trag T_1 vodi do traga T_2, T_2 do T_3, i sve tako do traga T_{2024} koji vodi do T_{2025}. Posljednji trag T_{2025} vodi do prvog traga T_1. Mogu li detektivi razmjestiti pribadače tako da, ukoliko žele presjeći sve konce, mogu to učiniti jednim pravocrtnim potezom mača? Ako pronađu još jedan trag, mogu li ga dodati na ploču da opet, u slučaju greške, mogu jednostavno prerezati konce?

Rješenje. Shvatimo plutenu ploču kao ravninu, tragove kao točke, konce kao dužine, a potez mačem kao pravac u toj ravnini.



Dokažimo da 2025 točaka nije moguće razmjestiti tako da postoji pravac koji siječe svaku od dužina u nekoj točki različitoj od njenih krajnjih točaka.

Pretpostavimo suprotno, to jest da je takav razmještaj moguć i da je p pravac koji siječe dužine $\overline{T_1T_2}$, $\overline{T_2T_3}$ ..., $\overline{T_{2024}T_{2025}}$ i $\overline{T_{2025}T_1}$. Pravac p dijeli ravninu na dvije poluravnine koje ćemo nazvati lijevom i desnom. Ako pretpostavimo da T_1 leži u lijevoj poluravnini, tada T_2 mora ležati u desnoj poluravnini, T_3 u lijevoj, i tako dalje. Slijedi da sve točke s neparnim indeksom leže u lijevoj, a sve točke s parnim indeksom u desnoj poluravnini. Međutim, tada su T_1 i T_{2025} obje u lijevoj poluravnini, pa pravac p ne siječe dužinu $\overline{T_{2025}T_1}$ .To je kontradikcija s pretpostavkom, što dokazuje našu tvrdnju.

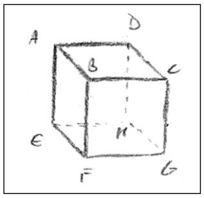
Ako je pronađen još jedan trag, onda ih je ukupno 2026. Povučemo (bilo koji) pravac p. Ako sve točke s neparnim indeksom smjestimo u lijevu poluravninu, a sve s parnim indeksom u desnu poluravninu, tada će p sjeći dužine $\overline{T_1T_2}$, $\overline{T_2T_3}$ ..., $\overline{T_2T_3}$ ..., $\overline{T_{2025}T_{2026}}$, $\overline{T_{2026}T_1}$ u unutrašnjim točkama tih dužina.

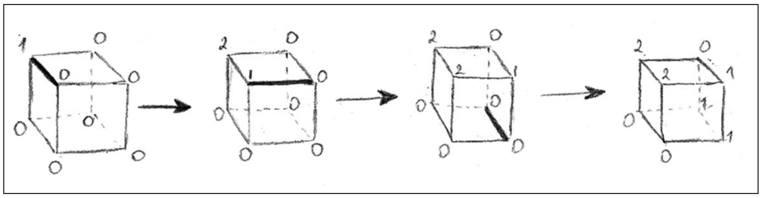
Zaključujemo da za 2025 tragova (ili bilo koji neparan broj tragova) detektivi ne mogu razmjestiti pribadače tako da prerežu konce jednim potezom mača, a za 2026 tragova (ili bilo koji paran broj tragova) takav je razmještaj moguć. ♠

Kako bi što prije pronašli kradljivca, detektivi su zamolili sve prisutne da međusobno ne razgovaraju i da ne napuštaju prostoriju. Kralj je primijetio da se neki uzvanici dosađuju pa je smislio način kako da atmosfera na balu ostane vedra i zabavna unatoč ovom nemilom događaju. Dao im je jedan zanimljiv (matematički) zadatak, a onaj tko ga prvi riješi, bit će nagrađen u zlatnicima. Iako bi svi rado rješavali zadatak i bez zlatnika, ipak ih je mogućnost osvajanja nagrade dodatno motivirala. Zadatak je bio o jednoj kocki, pa su sluge svima dale kockicu i olovku kako bi mogli zadatak riješiti istraživanjem. Evo kako je glasio zadatak.

Zadatak 5. Sedam vrhova kocke označeno je nulama, a preostali vrh jedinicom. Brojeve u vrhovima možemo mijenjati jedino na sljedeći način: odaberemo neki brid kocke i brojeve u njegovim krajnjim točkama povećamo za 1. Možemo li na ovaj način dobiti isti broj u svih osam vrhova kocke?

Rješenje. Vrhove kocke označimo s A, B, C, D, E, F, G, H. Pretpostavimo da je jedinica u vrhu A. Na sljedećoj slici isprobane su neke promjene u vrhovima. Odabrani su redom bridovi $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{GH}$.





S obzirom na to da se uvijek mijenjaju vrijednosti u dva susjedna vrha, vrhove kocke podijelit ćemo u dva skupa tako da se nikoja dva susjedna vrha ne nalaze u istom skupu. Dakle, stavimo

$$\mathcal{A} = \{A, C, F, H\} \qquad \text{i} \qquad \mathcal{B} = \{B, D, E, G\} .$$

Neka je S suma svih brojeva upisanih u vrhovima skupa $\mathcal{A}$ umanjena za sumu svih brojeva upisanih u vrhovima skupa $\mathcal{B}$.

Prije prve izmjene brojeva u vrhovima je $S = 1$. Sada odaberimo neki brid. Jedan njegov vrh nalazi se u skupu $\mathcal{A}$, a drugi u skupu $\mathcal{B}$. Zato, kada vrijednosti u krajnjim točkama odabranog brida povećamo za 1, za 1 će se povećati i suma svih brojeva upisanih u vrhovima iz skupa $\mathcal{A}$ i suma svih brojeva upisanih u vrhovima iz skupa $\mathcal{B}$, što znači da se S neće promijeniti ovim postupkom.

Prema tome, koliko god puta ponovili ovaj postupak, S će uvijek iznositi 1. To znači da ne možemo postići da su u svim vrhovima jednaki brojevi jer bi tada S morao biti jednak 0. ♠

Uskoro je sve bilo riješeno: uzvanici su riješili zadatak, a detektivi su pronašli kradljivca (i ukradeni vrč). Nagradu za najbržeg rješavatelja dobila je princeza iz susjednog kraljevstva. Njoj nisu bili potrebni zlatnici pa ih je podijelila gostima bala. Zabava se nastavila dugo u noć.

Kada je većina uzvanika otišla, ostalo je još deset parova koji su bili bliski prijatelji kralja i kraljice. Kada su i oni krenuli svojim kućama, neki među njima su se rukovali. Kraljica ih je pitala s koliko su se osoba rukovali, a njihove odgovore, zajedno sa svojim, iskoristila je za sljedeći zadatak koji je postavila kralju.

Zadatak 6. Na kraju bala, osim nas dvoje, u palači je bilo još 10 parova. Na odlasku, neki među njima su se rukovali. Naravno, nitko se nije rukovao sa svojim supružnikom. Kada sam ih pitala s koliko su se ljudi rukovali, ti brojevi su, uključujući i broj mojih rukovanja, svi bili međusobno različiti. S koliko sam se osoba ja rukovala?

Rješenje. Kralja označimo s K, a ostale osobe s $P_0, P_1, \dots, P_{20}$, pri čemu je s P_k označena osoba koja se rukovala s k osoba.

S obzirom na to da se osoba P_{20} rukovala s 20 osoba (od ukupno 22), znači da se nije rukovala samo s P_0 i sa samim sobom. Odavde slijedi da su P_0 i P_{20} par.

Pogledajmo sada osobe $P_1, \dots, P_{19}$ i uočimo da se osoba P_1 rukovala samo s P_{20}. To znači da se P_{19} rukovala sa svima osim s P_0 i s P_1. Slijedi da su P_1 i P_{19} par.

Nastavljamo dalje slično: P_2 se rukovala s P_{20} i P_{19}, dakle P_{18} se rukovala sa svima osim s P_0, P_1, P_2, pa su P_2 i P_{18} par. Dalje su parovi P_3 i P_{17}, P_4 i $P_{16}, \dots, P_9$ i P_{11}.

Ostali su samo K i P_{10}, dakle kraljica je označena s P_{10}, što znači da se kraljica rukovala s 10 osoba. ♠

Ovaj zadatak bio je nagrada kralju za uspješno organiziran bal. Naravno, kralj ga je uspješno riješio nakon kratkog promišljanja.

A s koliko se osoba rukovao kralj?

Literatura:

1. A. Engel, *Problem-solving strategies*, Problem Books in Mathematics, Springer, 1998.
2. Z. Kurnik, *Zabavna matematika u nastavi matematike*, 2. izdanje, Zagreb, Element, 2011.
3. G. Polya, *How to solve it*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1945.
4. P. Zeitz, *The art and craft of problem solving*, 2nd Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2006.