Nogomet u nastavi matematike 2. razreda srednje škole

Franka Miriam Brückler[1] i Filip Mijač[2]

Uvod

Prema trenutnom kurikulumu [1], u 2. razredima svih gimnazija obrađuju se sljedeće matematičke teme: drugi i treći korijeni, uključivo razlikovanja iracionalnih od racionalnih brojeva; kvadratne jednadžbe; pojam funkcije, uključivo grafova linearnih i kvadratnih funkcija; geometrija kružnice i kruga; poučak o sinusima i o kosinusu; osnove stereometrije (pravci i ravnine u prostoru, volumeni i oplošja geometrijskih tijela); klasična i geometrijska vjerojatnost. Ovisno o konkretnom programu, uvode se i kompleksni brojevi, determinante i matrice, upoznaju Arhimedova tijela, ... Nakon prethodnih nastavaka zasigurno vas neće začuditi da se gotovo sve te teme mogu prirodno i realistično povezati s nogometom. U ovom članku dajemo primjere prikladnih zadataka i poveznica između nogometa i gimnazijske matematike 2. razreda. Kao i obično, organizirat ćemo ih po matematičkim disciplinama, a ne po redoslijedu gradiva.

Algebra i analiza u 2. razredu SŠ

Glavna novost u gradivu algebre u ovom je razredu upoznavanje s općim kvadratnim jednadžbama. Također se u ovom razredu učenici konačno temeljitije upoznaju s osnovnim pojmom više matematike, funkcijom. Uz neke jednostavne primjere funkcija poput funkcije recipročne vrijednosti i drugog korijena, detaljnije se upoznaju sa svojstvima linearnih i kvadratnih funkcija. Kvadratne jednadžbe i kvadratne funkcije prirodno se pojavljuju u fizici, vezano uz putanje projektila, te se specijalno mogu povezati i s nogometom.

Stvarna putanja lopte obično odstupa od idealne parabole (zbog utjecaja vjetra, otpora zraka, ali i fizikalnog fenomena poznatog pod nazivom Magnusov efekt za koji je posebno poznat primjer znameniti pogodak iz slobodnog udarca Brazilca Roberta Carlosa na utakmici Brazila i Francuske u lipnju 1997. [2,3]), no kao prvo

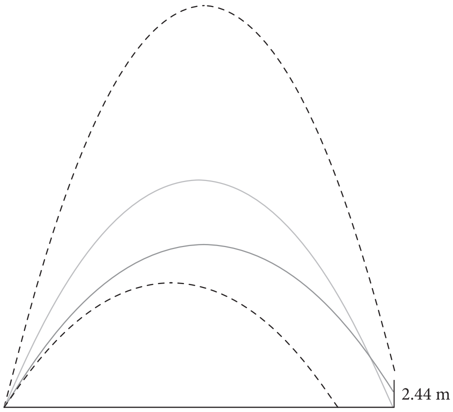
[1]Franka Miriam Brückler, PMF – Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu
[2]Filip Mijač, X. gimnazija Ivan Supek, Zagreb

približenje putanje ispucane nogometne lopte svakako će poslužiti parabola. Iz fizike je poznato da ako se projektil (koji je u početku na tlu) ispuca pod kutom α u odnosu na tlo i s početnom brzinom u iz pozicije koju uzmemo za ishodište koordinatnog sustava, projektil će pratiti parabolu jednadžbe

$$y = b\,x - a\,x^2 = x\,(b - a\,x),$$

gdje je $b = \mathrm{tg}\,\alpha > 0$, dok je $a = g/(2\,u^2 \cos^2\alpha) > 0$. Koji je domet projektila? Budući da je na početku projektil na tlu, domet dobivamo kao nultočku ove kvadratne funkcije, tj. rješavanjem kvadratne jednadžbe $x\,(b - a\,x) = 0$. Njena jedna nultočka je 0, što predstavlja početnu poziciju (na početku je projektil na tlu) te se domet, druga nultočka, dobije kao rješenje linearne jednadžbe $a\,x = b$. Jedan primjer korištenja ovih činjenica u nogometnom kontekstu možete naći u [4, str. 48–49], a ovdje dajemo jedan nestandardniji primjer.

Primjer 1. Roberto Carlos svoj je znameniti slobodni udarac pucao s udaljenosti od 35 m od protivničkih vrata. Pritom je stajao točno nasuprot vrata, tj. da nije bilo živog zida zbog kojeg je lopti morao dati usmjerenje od oko 12° u stranu te je uslijed spomenutog Magnusovog efekta lopta „napravila bananu" [2,3], mogao je pucati i „ravno" te bi putanja lopte bila bar približno parabola. Udarac je bio snažan – početna brzina lopte iznosila je 38 m/s. Znajući da su nogometna vrata prema pravilima [5] visine 2.44 m i pretpostavivši da se puca ravno prema vratima, tj. da je putanja lopte parabola u vertikalnoj ravnini, pod kojim bi kutovima u odnosu na tlo Roberto Carlos bio mogao ispucati loptu tako da uđe u okvir vrata?



Slika 1. Prikladne parabole za postizanje zgoditka

Prvo primijetimo da lopta ne mora pasti natrag na zemlju točno na gol-liniji – prikladne su nam sve parabole za koje je točka (35, y) takva da je $0 \le y \le 2.44$ (primjerice, parabole prikazane punim crtama na Slici 1. prikladne su za postizanje zgoditka, dok parabole prikazane crtkano nisu). Pritom smo naravno implicitno uzeli da su iznosi x i y duljine u metrima, dakle fizikalnu konstantu g uzimamo u m s^{-2}, a početnu brzinu u u m s^{-1}.

Imamo redom:

- Parabola ima jednadžbu $y = b\,x - a\,x^2$,
- $a = 9.81\,/(2 \cdot 38^2 \cos^2\alpha) \approx 0.0033968144/\cos^2\alpha$,
- $b = \mathrm{tg}\,\alpha$ i $0 < \alpha < 90°$,
- $y(35) = 35\ \mathrm{tg}\,\alpha - 35^2 \cdot 0.0033968144/\cos^2\alpha \approx 35\ \mathrm{tg}\,\alpha - 4.1610976454/\cos^2\alpha$ treba biti između 0 i 2.44. Te dvije nejednakosti lako se kasnije, u 3. razredu, riješe množenjem s $\cos^2\alpha$ i korištenjem formule za sinus dvostrukog kuta, a u ovom, 2. razredu, mogu se tabelirati iznosi $y(35)$ za razne kutove α, primjerice u koracima od po 5° ili pak svaki učenik može izračunati $y(35)$ za po jedan α. Tako se lako uoči da je prikladan raspon kutova α dosta mali, tek negdje između 6° i 11° (vidi tablicu 1) – čak i bez živog zida i vratara, izvođač slobodnog udarca mora biti vrlo precizan da bi pogodio protivnička vrata.

α/°	$y(35)$ / m
5	-1.130844571
10	1.880973143
15	4.91837072
20	8.026621925
25	11.25486953
30	14.65912923
35	18.30601915
40	22.27760973
45	26.67780471
50	31.64036837
55	37.33707983
60	43.97738768
65	51.76013128
70	60.59001649
75	68.50406695
80	60.49856209
85	-147.740428

α/°	$y(35)$
5	-1.13084
6	-0.52842
7	0.073629
8	0.675643
9	1.277974
10	1.880973
11	2.484991
12	3.090382
13	3.697502
14	4.30671
15	4.918371

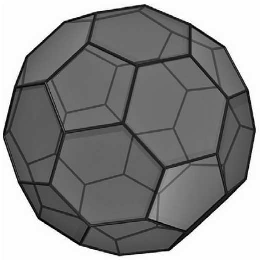
Tablica 1. Visina lopte y(35) u metrima ispucane s udaljenosti 35 m brzinom 38 m/s pri prijelazu gol-linije, u ovisnosti o kutu α pod kojim je ispucana

Geometrija u 2. razredu SŠ

Od geometrijskih tema lako povezivih s nogometom u ovom razredu ističemo poučak o kosinusu te geometriju (volumen i oplošje) kugle.

Jedan od najpoznatijih nogometnih citata tiče se nogometne lopte: „Lopta je okrugla" (reče znameniti njemački nogometni trener Sepp Herberger htijući iskazati nepredvidljivost nogometne igre). Nogometna je lopta kugla, ali naravno nije idealna matematička kugla – takva ionako postoji samo u mislima. Prema službenim nogometnim pravilima [4], nogometna lopta mora biti kuglastog oblika, izrađena iz kože ili kojeg drugog pogodnog materijala, opsega između 68 i 70 cm. Vidimo da je osnovna geometrija lopte zadana putem opsega O koji je, naravno, lakše izmjeriti kad provjeravamo zadovoljava li dana lopta pravila nego polumjer ili promjer. Znamo, dakle, da je $68 \leq O \text{ cm} \leq 70$. Naravno, vrijedi i $O = 2r\pi$, gdje je r polumjer kugle. Oplošje kugle jednako je 4 površine kruga $P = r^2\pi$ koji dobijemo presijecanjem kugle napola ravninom kroz ishodište, a volumen kugle je $V = \frac{4}{3}r^3\pi$. Želimo li znati koliko je oplošje i volumen nogometne lopte, jedan je način izračunati raspon polumjera i uvrstiti ga u dane formule. No, još je zgodnije izbjeći eksplicitno računanje polumjera. Naime, ako iz formule za opseg izrazimo polumjer i uvrstimo u formule za P i V, dobit ćemo da je $P = \frac{1}{4\pi}O^2$ i $V = \frac{1}{6\pi^2}O^3$. Stoga zaključujemo da je raspon oplošja $4P$ za nogometnu loptu između $\frac{1}{\pi}68^2$ cm^2 i $\frac{1}{\pi}70^2$ cm^2, tj. u rasponu od 1471.8649... do 1559,7184... cm^2, dakle oko 1500 cm^2 = 15 dm^2. Također vidimo da je volumen V nogometne lopte između $\frac{1}{6\pi^2}68^3$ cm^3 i $\frac{1}{6\pi^2}70^3$ cm^3, tj. u rasponu od 5309.7704... do 5792.1943... cm^3, dakle oko 5500 cm^3 = 5500 mL = 5.5 dm^3 = 5.5 L.

U programima sa 140 i više sati godišnje učenici 2. razreda srednje škole upoznaju se i s Arhimedovim tijelima. Klasična nogometna lopta, poznata i kao „bubamara", u biti je krnji ikozaedar (Slika 2.). „Bubamara" je danas ikona za nogometnu loptu, a prvi se put pojavila 1968. za Europsko nogometno prvenstvo održano te godine u



Slika 2. Nogometna lopta tipa „bubamara" i krnji ikozaedar (slika nogometne lopte je ©FMB2017, snimljena u muzeju kluba Fenerbahçe u İstanbulu, a slika krnjeg ikozaedra je © w:en:User:Cyp@Wikipedia (licenca CC BY-SA 3.0, https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/*),* https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Truncatedicosahedron.jpg

Italiji, pod nazivom Telstar, a izradila ju je tvrtka Adidas. Sve do Svjetskog prvenstva 2006. u Njemačkoj službene su nogometne lopte svjetskih nogometnih prvenstava, do na bojenja, bile „bubamare". Pogledamo li „bubamaru" malo bolje, vidimo da izgleda kao da smo napuhali geometrijsko tijelo omeđeno pravilnim peterokutima i šesterokutima. Lako je prebrojiti da peterokuta ima 12, a šesterokuta 20. Ako bolje pogledamo, vidimo i da je svaki peterokut okružen s pet šesterokuta, a svaki šesterokut s po tri peterokuta i šesterokuta (raspoređenih naizmjenično). Također, u svakom se od 60 vrhova sastaju po tri lika – dva šesterokuta i jedan peterokut. U matematici je to Arhimedovo tijelo poznato pod nazivom krnji ikozaedar.

Primjer 2. Netrivijalan, ali zanimljiv zadatak je odrediti duljinu bridova peterokuta i šesterokuta koji čine oplošje „bubamare" tako da se dobije lopta koja zadovoljava nogometna pravila. Prvo, primijetimo da duljine bridova svih peterokuta i šesterokuta moraju biti jednake, to nam je nepoznanica x. Drugo, uočimo da se krnjem ikozaedru može opisati sfera i da promjer d te sfere treba biti bar približno jednak dopuštenom promjeru nogometne lopte, dakle između $68/\pi$ cm ≈ 21.64507 cm i $70/\pi$ cm ≈ 22.28169 cm. Budući da nam ovdje nema smisla računati s preciznim vrijednostima (materijal od kojega se šiva lopta nije debljine 0, a i izrezivanje materijala i napuhivanje dat će lagana odstupanja), možemo reći da promjer d treba biti približno 22 cm.

Pretraživanjem interneta ili literature, budući da je izvod pretežak za srednjoškolce, lako se nađe da je omjer polumjera r sfere opisane krnjem ikozaedru i njegovog brida x jednak

$$\frac{r}{x}=\frac{\sqrt{58+18\sqrt{5}}}{4}\approx 2.47802\,,$$

dakle je $d = 2r \approx 4.95604\,x$, što treba biti približno 22 cm, dakle x treba biti približno 4.44 cm.

Izračunajmo sad još i oplošje „bubamare" (prije napuhivanja). Površina P_5 pravilnog peterokuta i površina P_6 pravilnog šesterokuta kojima su bridovi duljine x jednake su (vidi Sliku 3.)

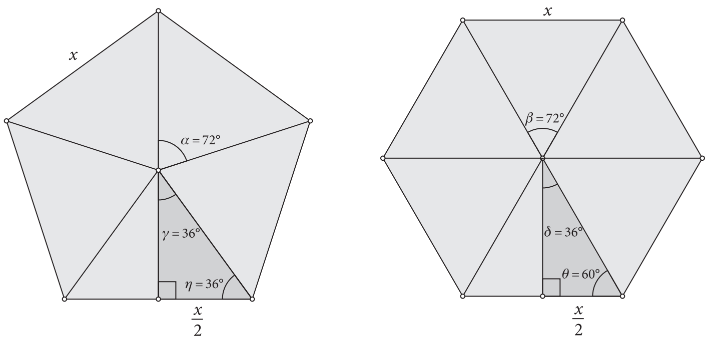
$$P_5=10\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\tan 54^\circ \approx 1.72048x^2\,,$$

$$P_6=12\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\tan 60^\circ \approx 2.59808x^2\,.$$

Budući da „bubamaru" čini 12 pravilnih peterokuta i 20 pravilnih šesterokuta, oplošje „bubamare" (prije napuhivanja) je

$$12P_5+20P_6\approx 72.6073x^2 \approx 1431\,\text{cm}^2\,.$$

Uočimo da je to manje od gore izračunatog oplošja nogometne lopte, što je i smisleno jer ovako „sašivenu" „bubamaru" još treba napuhati.



Slika 3. Rastav pravilnog peterokuta i šesterokuta na sukladne jednakokračne trokute

Možda neočekivano, ali u nogometni kontekst može se uklopiti i kosinusov poučak, i to na više načina. Jedan, u kontekstu slobodnog udarca, možete naći u [4, str. 47 – 48], a ovdje dajemo drugačiji primjer temeljen na [6, str. 181–184].

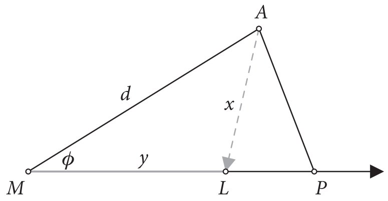
Primjer 3. Dana 15. lipnja 2024. u 18 sati na Europskom prvenstvu Hrvatska će odigrati svoju prvu utakmicu sa Španjolskom. Zamislimo da na toj utakmici Luka Modrić (M) dodaje loptu ravno i po tlu Ivanu Perišiću (P), a da tu loptu želi presresti Aymeric Laporte (A). Uz koje će uvjete A uspjeti presjeći put lopti i tako spriječiti da P otrči dalje prema svojim vratima i možda zabije pogodak? Brzine od A i lopte naravno nisu stvarno konstantne, no budući da se u ovakvim situacijama u pravilu radi o kraćim udaljenostima, možemo uzeti da jesu – neka se lopta kotrlja po tlu brzinom v, dok A trči prema njoj brzinom u, pri čemu je razumno pretpostaviti da je $v > u$. Početna udaljenost A do M je d, a kut spojnice M i A prema putanji lopte neka je ϕ (Slika 4). Prema kosinusovu poučku primijenjenom na trokut LAM (gdje je L pozicija u kojoj se sijeku putanje lopte i A), vrijedi

$$x^2 = d^2 + y^2 - 2yd\cos\phi\,.$$

Uvjet da A presiječe put lopti je da do pozicije L dođe kad i lopta ili prije. Dok lopti do te pozicije treba vrijeme y/v, igraču A treba x/u, dakle imamo uvjet

$$\frac{x}{u} \le \frac{y}{v},$$

odnosno $x \le y\,u/v$. Naravno, u ovom problemu x i y sigurno su nenegativni.



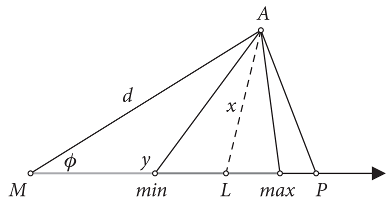
Slika 4. M dodaje loptu L suigraču P, a put joj želi presjeći protivnik A

Da olakšamo praćenje nastavka, uzet ćemo konkretne vrijednosti za konstante u našem problemu, a na kraju ćemo dati formule općeg za opći slučaj. Neka je $d = 20$ m, $\phi = 30°$, $u = 8$ m/s, $v = 10$ m/s. Imamo dakle uvjet $x \leq 0.8y$, što kvadrirano daje $x^2 \leq 0.64y^2$, i kosinusov poučak $x^2 = 400 + y^2 - 20\sqrt{3}y$, pa dobivamo

$$400 + y^2 - 20\sqrt{3}y \leq 0,64y^2,$$

odnosno imamo kvadratnu nejednadžbu $0.36y^2 - 20\sqrt{3}y + 400 \leq 0$. Zbog pozitivnog vodećeg koeficijenta zadovoljena je za one udaljenosti y koje su između nultočki kvadratne funkcije na njezinoj lijevoj strani, tj. za y između (približno, zaokruženo na centimetre) y_{min} =13.42 m i y_{max} = 82.81 m A bi mogao uloviti loptu – ako je uopće ulovi – samo onda ako je lopta prešla udaljenost u tom rasponu, tj. u vremenu od otprilike 1.3 do 8.3 sekundi otkad je M uputio loptu. Uočimo: u ovom slučaju dobili smo raspon za y jer je dobivena kvadratna jednadžba imala dva realna rješenja. Njezina je diskriminanta općem slučaju jednaka $u^2 - v^2\sin\phi$, dakle u općem slučaju uvjet mogućeg presretanja je $\sin\phi \leq u/v$. No, taj uvjet nije dovoljan. Prvo, ako je na početku P bliže M od manjeg od rješenja naše kvadratne jednadžbe (bio je bliže M od 13.42 m), onda će naravno on prije doći do lopte nego A. Drugo, čak i ako nije, i on će zasigurno potrčati prema lopti nekom brzinom w – radi jednostavnosti uzmimo da su A i P jednako brzi, tj. da je $w = 8$ m/s. Ako P do pozicije L s $y = y_{min}$ dođe brže od A, onda je sigurno P prvi došao do lopte. Ako je P bio na udaljenosti $a = 25$ m od M u trenutku upućivanja udarca, on treba prijeći udaljenost $a - y_{min} = 11.58$ m, što će trajati 11.58/8 s, dakle oko 1.45 s. S druge strane A će, kako bi došao na istu poziciju, prijeći udaljenost $x = \sqrt{400 + y^2_{min} - 20\sqrt{3}y_{min}}$ m, što je približno 10.73 m, za što mu treba 10.73/8 s, tj. oko 1.34 s – uz naše iznose konstanti A bi uspio presjeći put lopti. Općenito, A će uspjeti presjeći put lopti uz uvjete, vidi Sliku 5., (1) $\sin\phi \leq u/v$ (geometrijsko-fizikalni uvjet da put kojim trči A uopće siječe put po kojem se lopta kotrlja, tj. uvjet da jednadžba $(v^2 - u^2)y^2 - 2v^2yd\cos\phi + v^2d^2$ ima realna rješenja), (2) da je $y_{min} \leq a$ (P u trenutku upućivanja lopte nije bliže M od najranije pozicije min na kojoj bi A mogao presresti loptu), pri čemu je y_{min} manje od rješenja navedene kvadratne jednadžbe i (3) da A stigne u raspon min-max mogućih pozicija presretanja prije nego P stigne do pozicije min, tj. da je zadovoljeno

$$\frac{a - y_{min}}{w} < \frac{\sqrt{d^2 + y^2_{min} - 2dy_{min}\cos\phi}}{u}.$$



Slika 5. Mogućnosti presretanja lopte

Vjerojatnost u 2. razredu SŠ

Glavna novost u vjerojatnosti u ovom razredu je upoznavanje učenika s geometrijskom vjerojatnosti. Kao što smo već vidjeli kroz prethodne nastavke ovog serijala, vjerojatnost (i statistika) posebno se lako i prirodno povezuju s nogometom pa nije teško smisliti i primjere zadataka s geometrijskom vjerojatnosti.

Primjer 4. Ne možete gledati važnu utakmicu svog omiljenog kluba, ali ste upravo, primjerice koristeći *Sofascore* [7] aplikaciju, saznali da je vaš klub dao pogodak. S vama je prijatelj koji navija za protivničku momčad (i također nije vidio pogodak). Odlučili ste se za okladu – vi tvrdite da je pogodak bio u „rašlje" (gornji lijevi ili gornji desni kut), dok vaš prijatelj tvrdi da nije. Kolika je vjerojatnost da ćete dobiti okladu?

Znamo da su službene dimenzije vrata [5] širina 7.32 m i visina 2.44 m, dakle površina mu je 17.8608 m^2. Točne dimenzije „rašlji" nisu definirane, ali ugrubo možemo reći da se radi o kvadratima stranica po 50 cm u gornjem lijevom i desnom kutu, dakle površina „rašlji" dvaput je po 50^2 cm^2, odnosno 5000 cm^2. Stoga je vjerojatnost da ćete dobiti okladu jednaka

$$\frac{5000\,\mathrm{cm}^2}{17.8608\,\mathrm{m}^2}=\frac{0.5\,\mathrm{m}^2}{17.8608\,\mathrm{m}^2}=\frac{0.5}{17.8608}\approx 0.02799\approx 2.8\,\%\,.$$

Primijetimo da se ovdje može i prirodno uvesti ideja koeficijenta za oklade. Naime, ako je vjerojatnost da ste vi u pravu 50 %, a vjerojatnost da je drugi u pravu isto 50 %, onda bi očito bilo pravedno da oboje uložite isti iznos (recimo, isti broj bombona). Drugim riječima, ako vi uložite 1 bombon i u pravu ste, onda bi „bio red" da taj bombon dobijete natrag i da vam vaš prijatelj dade još 1 bombon povrh toga, dakle dat ćete 1 koji gubite u slučaju da niste pogodili, a dobijete 2 ako jeste – pravedni koeficijent za vas je u ovom slučaju 2. Ako je pak vjerojatnost da ste vi u pravu 1/3, a vjerojatnost da je drugi u pravu 2/3, ako vi uložite 1 bombon i vaš prijatelj isto 1, on bi bio u prednosti jer je omjer vjerojanosti da vi i on budete u pravu 1:2, odnosno duplo je vjerojatnije da će on zadržati vaš bombon, nego da vi dobijete bombon od njega. Stoga je u ovom slučaju pravedno da on ponudi da ćete, ako bude u pravu, ne samo dobiti svoj bombon natrag, nego i 2 od njega – pravedni koeficijent je 3. Općenito, ako je vjerojatnost da ste u pravu jednaka p, pravedni koeficijent za okladu je $1/p$. U gornjem primjeru, kad biste se stvarno tako kladili, pravilni koeficijent bio bi 17.8608/0,5 = 35.7216, tj. za svaki vaš uloženi bombon prijatelj bi vam trebao obećati da, ako ste bili u pravu, uz taj bombon natrag dobivate i 34 ili 35 bombona od njega ☺

Zaključak

Kao što vidimo, s porastom učeničkog znanja iz matematike, možemo vezano za nogomet davati ne samo sve kompliciranije zadatke, nego i sve realističnije – stvarni svijet uvijek je kompliciraniji od matematičkog zadatka. Naravno, običnom je navijaču za praćenje nogometa dovoljna matematika prvih šest razreda osnovne škole, no za puno razumijevanje igre – primjerice analitičarima u nogometnim klubovima – potrebna je i naprednija matematika, a pogotovo za razumijevanje koeficijenata u kladionicama i raznih popularnih procjena vjerojatnosti za nogometne utakmice. S obzirom na upravo nadolazeće Europsko prvenstvo u nogometu, koristeći našu seriju od sad već 10 nogometno-matematičkih članaka, nadamo se da ćete utakmice pratiti i svojim navijačkim srcem, ali i matematičkim mozgom, te naći nove konkretne primjere već opisanih principa.

Literatura:

1. Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj. Narodne novine 7/2019. https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html
2. Jobs in Football (2024.), *The Roberto Carlos Free Kick: A Breakdown Of The Impossible Goal*, https://jobsinfootball.com/blog/roberto-carlos-free-kick/
3. Dupeus, G., Cohen, C., Le Goff, A., Quéré, D. Clanet, C. (2011.) *Football Curves*. Journal of Fluids and Structures 27, 659–667.
4. Mijač, F. (2021.), Nogomet u nastavi matematike. Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu
5. Hrvatski nogometni savez, *Pravila nogometne igre* 21./22. (2021). https://hns-cff.hr/files/documents/21824/PNI%202021-2022.pdf
6. Wesson, J. *The Science of Soccer*. Institute for Physics Publishing, Bristol & Philadelphia, 2002.
7. Sofascore, https://www.sofascore.com/