Geometrijska algebra

Zvonimir Šikić[1]

1. Uvod

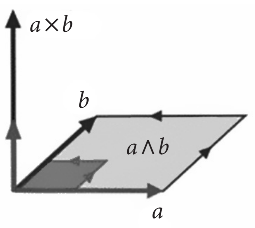
Vektorski prostor $L(e_1,...,e_n)$ obogaćen skalarnim i vektorskim produktom standardna je struktura u kojoj se uspješno modelira n dimenzijska euklidska geometrija. Zato je, s pravom, nezaobilazni dio matematičkog obrazovanja. Skalarni produkt definira duljinu i okomitost vektora

$$|a|^2 = a \cdot a \qquad\qquad a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0.$$

Vektorski produkt (u 3-dim prostoru) definira iznos orijentirane površine koju razapinju dva vektora i paralelnost vektora

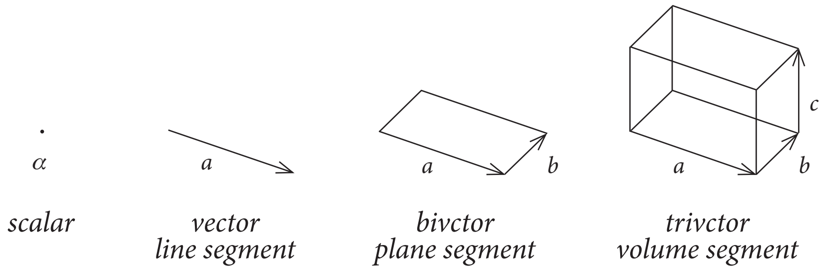
$$P(a,b) = |a \times b| \qquad\qquad a \,||\, b \Leftrightarrow a \times b = 0.$$

Međutim, $L(e_1,...,e_n)$ ne sadrži objekte viših dimenzija. On sadrži samo 1-dim vektore. Površinu razapetu s vektorima a i b u 3-dim prostoru simulira 1-dim vektor $a \times b$. Volumen razapet s vektorima a, b i c u 3-dim prostoru simulira skalar $(a \times b) \cdot c$.



Prirodnije bi bilo uvesti 2-dim vektor $a \wedge b$ koji jest orijentirana površina (umjesto da je simulira), 3-dim vektor $a \wedge b \wedge c$ koji jest orijentirani volumen (umjesto da ga simulira), itd. Prostor $L(e_1,...,e_n)$ s vanjskim produktom $\wedge$ i proširenim nutarnjim produktom (takvim da, na primjer, za 2-dim vektor B vrijedi $a \perp b \Leftrightarrow a \cdot B = 0$ i da $a \cdot B$ daje informaciju o 1-dim visini od B kada mu je baza a) bio bi mnogo prirodnija geometrijska algebra.

[1]Zvonimir Šikić, Zagreb



Prvi pokušaj uvođenja geometrijske algebre bio je u *Die lineale Ausdehnungslehre* Hermanna Grassmanna iz 1844. godine. Tu je prvi put uveden pojam vektorskog prostora $L(e_1,...,e_n)$ zajedno s vanjskim produktom $\wedge$ koji je generirao objekte viših dimenzija. Njegov nutarnji produkt bio je determiniran zahtjevom $e_i \cdot e_i = 0$. William Clifford povezao je Grassmannovu vanjsku algebru s kvaternionima Williama Hamiltona tako da je pravilo $e_i \cdot e_i = 0$ zamijenio pravilom $e_i \cdot e_i = 1$ (Hamiltonove jedinice zadovoljavaju $ii = jj = kk = -1$). To je rezultiralo prvom geometrijskom algebrom koja se zato često zove i Cliffordovom algebrom.

Međutim, Willard Gibbs objavio je 1901. vrlo utjecajan udžbenik *Vector Analysis* po kojem se i danas predaje vektorska analiza. U njemu je Hamiltonove kvaternione, kao matematički aparat elektrodinamike, zamijenio Grassmannovim vektorima. Uveo je i nabla operator ∇ pa je uspjeh bio potpun. Kvaternioni su odbačeni, zavladali su vektori. No, Gibbs je uveo i gore opisane simulacije 2-dim i 3-dim objekata 1-dim vektorima i skalarima (u 3-dim prostoru) pa je geometrijska algebra, bar na redovnim studijima, odbačena kao suviše napredna.

Ideja vanjskog množenja vrlo je jednostavna. Međutim, nutarnje množenje zaista je složeno definirati za multivektore svih dimenzija. Stoga ne čudi izbjegavanje geometrijske algebre na redovnim studijima. Međutim, njihova ugradnja u tzv. geometrijski produkt, iz kojeg lako izvodimo i nutarnji i vanjski produkt, izrazito je jednostavna. Zato nema razloga da se geometrijski produkt i geometrijska algebra ne obrađuju u okviru teorije vektorskih prostora. Pogotovo kada se ume u obzir da je geometrijska algebra danas nezaobilazna u računalnom inženjerstvu.

2. Geometrijski produkt

Kako na n-dimenzijskom vektorskom prostoru $L(e_1,...,e_n)$ definirati množenje ako želimo da produkt dvaju kolinearnih vektora bude broj, dvaju nekolinearnih vektora orijentirana površina, triju neplanarnih vektora orijentirani volumen itd.?

Očiti su zahtjevi:

(1) $e_i e_i = 1$

(2) $e_i e_j = -e_j e_i$ za $i \neq j$

(3) množenje je distributivno.

Da ovi zahtjevi jednoznačno definiraju množenje slijedi iz jednoznačne podjele permutacija na parne i neparne, a iz jednoznačnosti množenja slijedi njegova asocijativnost. Dakle, rezultati svih mogućih množenja i zbrajanja čine asocijativnu algebru $G_n(e_1,...,e_n)$ koju (iz očitih razloga) zovemo geometrijskom algebrom. Ona je zbroj prostora skalara L_0, vektora L_1, 2-vektora L_2, … i n-vektora L_n.

$$G_n(e_1,...,e_n) = L(1) + L(e_1,...,e_n) + L(e_1e_2,...,e_{n-1}e_n) + \cdots + L(e_1 \cdots e_n) \ ,$$

$$\dim G_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n \ .$$

Podalgebru parnih multivektora G_n^+ zovemo pozitivnom algebrom ili algebrom spinora.

Unutarnji i vanjski produkt vektora a i k-vektora B_k definiramo na sljedeći način (vidjet ćemo da se ta definicija poklapa sa standardnim definicijama u 2-dim i 3-dim prostoru):

$$a \cdot B_k \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(aB_k \pm B_k a) = \mp B_k \cdot a \qquad (- \text{ za parne } k)$$

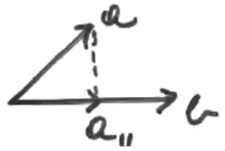
$$a \wedge B_k \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(aB_k \mp B_k a) = \pm B_k \wedge a \qquad (+ \text{ za parne } k).$$

Uvjeti okomitosti $a \cdot B_k = 0$ i paralelnosti $a \wedge B_k = 0$ preko geometrijskog produkta izražavaju se na sljedeći način:

$$a \perp B_k \Leftrightarrow aB_k = (-1)^k B_k a \qquad\qquad a \parallel B_k \Leftrightarrow aB_k = (-1)^{k+1} B_k a \ .$$

Ako vektore $a_\parallel$ i $a_\perp$ definiramo tako da je $a_\parallel \parallel B_k$, $a_\perp \perp B_k$ i $a_\parallel + a_\perp = a$ onda geometrijsko značenje nutarnjeg i vanjskog produkta možemo opisati na sljedeći način.

Za nutarnji produkt imamo:

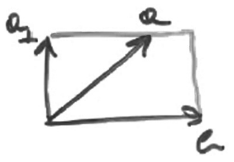


$$a \cdot b = a_\parallel (a_\parallel \beta) = {a_\parallel}^2 \beta$$

$$a \cdot B = a_\parallel (a_\parallel b) = {a_\parallel}^2 b$$

Općenito imamo $a \cdot B_{k+1} = a_\parallel (a_\parallel B_k) = {a_\parallel}^2 B_k$.

Za vanjski produkt imamo:



$$a \wedge b = a_\perp b = B$$

$$a \wedge B = a_\perp B = B_3$$

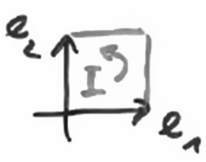
Općenito imamo $a \wedge B_k = a_\perp B_k = B_{k+1}$.

3. Geometrijska algebra ravnine

Geometrijska algebra ravnine je

$$G_2 = G(e_1, e_2) = L(1) + L(e_1 e_2) + L(e_1, e_2) = \left(L_0 + L_2\right) + L_1 = G_2^+ + G_2^-$$

U njoj vrijede sljedeće jednakosti:



$$I \overset{\text{def}}{=} e_1 e_2 \qquad I^2 = -1 \qquad e_1 I = e_2 \qquad e_2 I = -e_1 \qquad I e_1 = -e_2 \qquad I e_2 = e_1 .$$

Uočite da je pseudoskalar I imaginarna jedinica čiji je kvadrat -1.

Desno množenje vektora s I njegova je rotacija za kut $\pi/2$. Lijevo množenje vektora s I njegova je rotacija za $-\pi/2$.

Podalgebra spinora $G_2^+ = \{\alpha + \beta I : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ je polje kompleksnih brojeva, tj. 2-dim spinori su kompleksni brojevi. Lako se vidi da je

$$G_2^+ G_2^+ = G_2^+ \qquad G_2^- G_2^- = G_2^+ \qquad G_2^+ G_2^- = G_2^- G_2^+ = G_2^- .$$

To znači da je produkt kompleksnih brojeva kompleksni broj, da je produkt dvaju vektora kompleksni broj i da su kompleksni brojevi operatori na vektorima.

Razmotrimo produkte vektora $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ i $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ u oba redoslijeda

$$ab = (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2) + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) I$$
$$ba = (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2) - (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) I .$$

Uvedemo li nutarnji i vanjski produkt na elementarni način

$$a \cdot b \overset{\text{def}}{=} \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 \qquad a \wedge b \overset{\text{def}}{=} (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) I ,$$

vidimo da je geometrijski produkt kombinacija unutarnjeg i vanjskog produkta:

$$ab = a \cdot b + a \wedge b$$
$$ba = a \cdot b - a \wedge b .$$

Odavde slijedi ono što već sadrži opća definicija iz 2. odjeljka:

$$a \cdot b \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(ab + ba) \qquad a \wedge b \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(ab - ba) .$$

Uvjet okomitosti i paralelnosti vektora a i b su

$$a \perp b \Leftrightarrow ab = -ba \qquad a \parallel b \Leftrightarrow ab = ba .$$

Geometrijska veza sva tri produkta je sljedeća:

$$ab = (a_{\parallel} + a_{\perp})b = a_{\parallel}b + a_{\perp}b = a \cdot b + a \wedge b\,.$$

Geometrijski produkt smatramo temeljnijim jer se jednostavno definira na multivektorima svih dimenzija, što nije tako jednostavno za nutarnji i vanjski produkt.

Produkt 1-vektora $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ i 2-vektora $B = \beta I$ je antikomutativan:

$$aB = -\alpha_2 \beta e_1 + \alpha_1 \beta e_2$$
$$Ba = \alpha_2 \beta e_1 - \alpha_1 \beta e_2\,.$$

Iz opće definicije u 2. odjeljku slijedi

$$a \cdot B \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(aB - Ba) = aB \qquad\qquad a \wedge B \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(aB + Ba) = 0\,.$$

Dakle, (u ravnini) je svaki *a* paralelan svakom *B* jer je uvijek $a \wedge B = 0$ tj. $aB = -Ba$.

Pokažimo, kao ilustrativni primjer, kako izgleda analiza dinamike kružnog gibanja u geometrijskoj algebri ravnine:

$$x = r(\cos\varphi e_1 + \sin\varphi e_2) = re_1(\cos\varphi + I\sin\varphi) = re_1 e^{I\varphi}$$

$$\dot{x} = re_1 e^{I\varphi} I\dot{\varphi} = xI\dot{\varphi}$$

$$\ddot{x} = \dot{x}I\dot{\varphi} + xI\ddot{\varphi} = xI\dot{\varphi}I\dot{\varphi} + \dot{x}\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} = -x\dot{\varphi}^2 + \dot{x}\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}}\,.$$

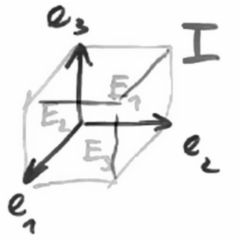
Sila koja generira kružno gibanje ima radijalnu komponentu (prema središtu) intenziteta $\dot{\varphi}^2$ i tangencijalnu komponentu intenziteta $\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}}$. Ako je kružno gibanje jednoliko (tj. ako je $\ddot{\varphi} = 0$) onda postoji samo radijalna komponenta.

4. Geometrijska algebra prostora

Geometrijska algebra trodimenzijskog prostora je

$$G_3 = G(e_1, e_2, e_3) = \left(L_0 + L_2\right) + \left(L_1 + L_3\right) = G_3^+ + G_3^-\,.$$

U njoj vrijede sljedeće jednakosti:



$$E_1 \overset{\text{def}}{=} e_2e_3 \quad E_2 \overset{\text{def}}{=} e_3e_1 \quad E_3 \overset{\text{def}}{=} e_1e_2$$

$$E_1^2 = E_2^2 = E_3^2 = -1 \quad E_1E_2E_3 = 1$$

$$E_1E_2 = -E_3 \quad E_2E_3 = -E_1 \quad E_3E_1 = -E_2\,.$$

Podalgebru spinora, uz definicije $i = -E_1$, $j = -E_2$ i $k = -E_3$ čine Hamiltonovi kvaternioni (jer je $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ i $jk = -1$). Dakle,

$$G_2^+ = \{\alpha + \beta I + \gamma j + \delta k : \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$$

Pseudoskalar $I = e_1e_2e_3$, osim jednakosti $I^2 = -1$ zadovoljava i sljedeće jednakosti:

$$e_1I = Ie_1 = e_2e_3 = E_1$$

$$e_2I = Ie_2 = e_3e_1 = E_2$$

$$e_3I = Ie_3 = e_1e_2 = E_3$$

Dakle, I komutira s 1-vektorima i uspostavlja dualitet 1-vektora i 2-vektora:

Taj dualitet omogućava da 2-vektore simuliramo 1-vektorima $a \times b \overset{\text{def}}{=} I(a \wedge b)$. Ako još i pseudoskalare simuliramo skalarima, onda vidimo da su skalari i vektori dovoljni za simulaciju cijele geometrijske algebre 3-dim prostora.

Uvedemo li nutarnji i vanjski produkt vektora $a = \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \alpha_3e_3$ i vektora $b = \beta_1e_1 + \beta_2e_2 + \beta_3e_3$ standardnim elementarnim definicijama

$$a \cdot b \overset{\text{def}}{=} \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$$

$$a \wedge b \overset{\text{def}}{=} (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)e_1e_2 + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)e_2e_3 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)e_3e_1\,,$$

vidimo da je, kao i u ravnini, geometrijski produkt kombinacija unutarnjeg i vanjskog produkta

$$ab = a \cdot b + a \wedge b$$

$$ba = a \cdot b - a \wedge b\,.$$

Odavde slijedi, kao i u ravnini, ono što već sadrži opća definicija iz 2. odjeljka:

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba) \qquad a \wedge b = \frac{1}{2}(ab - ba)\,.$$

Uvjeti okomitosti i paralelnosti vektora a i b i dalje su isti kao u ravnini (što i očekujemo jer se sve i zbiva u ravnini vektora a i b):

$$a \perp b \Leftrightarrow ab = -ba \quad a \parallel b \Leftrightarrow ab = ba .$$

I geometrijska veza sva tri produkta je ona koju znamo iz ravnine (što je očekivano iz istih razloga), $ab = (a_{\parallel} + a_{\perp})b = a_{\parallel}b + a_{\perp}b = a \cdot b + a \wedge b$.

Umnožak 1-vektora a i 2-vektora B je

$$aB = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3)(\beta_1 I e_1 + \beta_2 I e_2 + \beta_3 I e_3)$$
$$= (\alpha_1\beta_1 I + \alpha_2\beta_2 I + \alpha_3\beta_3 I) + (\alpha_1\beta_2 I - \alpha_2\beta_1)e_3 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)e_2 + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)e_1$$
$$= a \wedge B + a \cdot B$$

Geometrijski to izgleda ovako:

$$aB = (a_{\parallel} + a_{\perp})\mathrm{B} = a_{\parallel}B + a_{\perp}B = a \cdot B + a \wedge B$$

Analogno nalazimo $Ba = a \wedge B - a \cdot B$ odakle slijedi ono što već sadrži opća definicija iz 2. odjeljka:

$$a \cdot B = \frac{1}{2}(aB - Ba) \qquad a \wedge B = \frac{1}{2}(aB + Ba) .$$

Dakle, a je okomit na B ako je $aB = Ba$ i a je paralelan s B ako je $aB = -Ba$.

Relacije među vektorima izražene preko nutarnjeg i vanjskog produkta najlakše dokazujemo prijelaskom na geometrijski produkt upotrebom veza:

$$2a \cdot b = ab + ba \qquad 2a \wedge b = ab - ba .$$

Na primjer, da bismo dokazali jednakost $a \cdot (b \wedge c) = (a \cdot b)\mathrm{c} - (a \cdot c)b$, krećemo od

$$2a \cdot (b \wedge c) = a \cdot (b \wedge c) - (b \wedge c) \cdot a .$$

Desnu stranu nadopunimo s $\pm a \wedge (b \wedge c)$ pa dobijemo

$$a(b \wedge c) - (b \wedge c)a .$$

Zatim je nadopunimo s $\pm a(b \cdot c)$ pa dobijemo

$$abc - bca .$$

Uvrštavanjem $ab = -ba + 2a \cdot b$ i $ca = -ac + 2a \cdot c$ vraćamo se na nutarnji i vanjski produkt i dobijemo

$$2(a \cdot b)c - 2(a \cdot c)b .$$

To smo i željeli dokazati.

5. Množenje 2-vektora

Neka je

$$A=\alpha_1E_1+\alpha_2E_2+\alpha_3E_3 \qquad\qquad B=\beta_1E_1+\beta_2E_2+\beta_3E_3\,.$$

Tada je

$$AB=-(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3\ )+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)(-E3)+$$
$$+(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)(-E_2)+(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)(-E_1)$$

(Imaginarne jedinice $i=-E_1$, $j=-E_2$, $k=-E_3$ zbunjivale su Hamiltona u ovom kontekstu zbog negativnog predznaka u skalarnom članu produkta. On je pokušavao izgraditi trodimenzijsku algebru, no nije uspijevao dok nije shvatio da produkt vektora uz vektorski mora imati i skalarni član. Tada je krenuo u potragu za četverodimenzijskom algebrom.)

Dakle, uz odgovarajuće definicije množenja $\cdot$ i $\times$ imamo

$$AB=A\cdot B+A\times B \qquad BA=A\cdot B-A\times B\,.$$

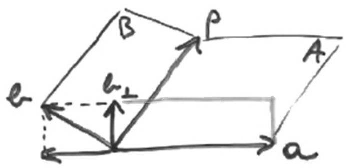
što odmah daje

$$A\times B=\frac{1}{2}(AB-BA) \qquad A\cdot B=\frac{1}{2}(AB+BA)\,.$$

Razmotrit ćemo i geometrijsko značenje množenja 2-vektora. Neka su A i B 2-vektori i neka je $A=ap$ i $B=qb$, gdje je $a\perp p$, $b\perp q$ i $|p|=|q|=1$. Tri su moguća slučaja.

Najjednostavniji slučaj je da A i B leže u istoj ravnini. Tada je $AB=\pm|AB|\overset{\text{def}}{=}A\cdot B$.

Drugi, nešto složeniji slučaj, je da su A i B u istom trodimenzijskom prostoru pa možemo pretpostaviti da je $p=q$.



Tada je $AB=appb=ab=a\cdot b+a\wedge b\overset{\text{def}}{=}A\cdot B+A\times B$.

Treći, najsloženiji slučaj, je da su linearno nezavisni. Tada je

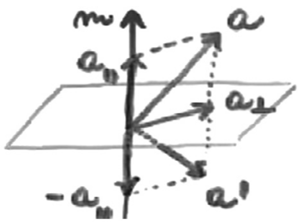
$$AB=apbq=(a_{\|}+a_{\perp})(p_{\|}+p_{\perp})qb$$

$$=(a_{\|}\wedge p_{\|})\cdot(q\wedge b)+(a_{\|}\wedge p_{\perp})\times(q\wedge b)+(a_{\perp}\wedge p_{\|})\times(q\wedge b)+(a_{\perp}\wedge p_{\perp})\times(q\wedge b)\,.$$

Prvi produkt je skalar, sljedeća dva su 2-vektori, a zadnji je 4-vektor.

6. Refleksije i rotacije u G_n

Refleksiju (zrcaljenje) u hiperravnini okomitoj na jedinični vektor m u G_n zvat ćemo m-refleksijom u G_n.



Zrcalna slika vektora $a = a_\perp + a_\parallel$ je vektor $a' = a_\perp - a_\parallel$.

Iz $a_\parallel = (a\cdot m)m$ i $a_\perp = a-(a\cdot m)m = (am-(a\cdot m)))m = (a\wedge m)m$ slijedi

$$a' = a_\perp - a_\parallel = -(m\wedge a + m\cdot a)m = -mam.$$

Refleksije su izometrije, što se lako dokazuje:

$$a'\cdot b' = (-mam)(-mbm) = \langle mabm\rangle = \langle mmab\rangle = \langle ab\rangle = a\cdot b.$$

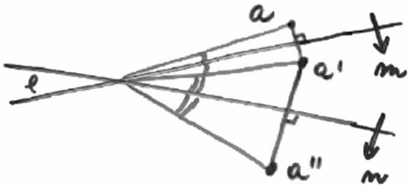
S $\langle X\rangle$ se označava skalarni dio od X, a lako se dokazuje da je $\langle XY\rangle = \langle YX\rangle$.

Prije nego nastavimo, zanimljivo je pogledati što je zrcalna slika 2-vektora $a\wedge b$

$$a'\wedge b' = (-mam)\wedge(-mbm) = \frac{1}{2}(mammbm - mbmmam)$$
$$= \frac{1}{2}m(ab-ba)m = m(a\wedge b)m.$$

Primijetite da se 2-vektori ne transformiraju kao 1-vektori („nema minusa"). To je u simulaciji 2-vektora 1-vektorima (usp. 1. odjeljak) dovelo do razlikovanja polarnih vektora (koji su zapravo 1-vektori) i aksijalnih vektora (koji su zapravo 2-vektori) i izazivalo je mnoge zabune i nerazumijevanja. No, vratimo se zrcaljenju vektora.

Kompozicija m i n-refleksije ($m^2 = n^2 = 1$) je m,n-ravninska rotacija za $2\angle(m,n)$:



$$a'' = \text{-}na'n = \text{-}n(\text{-}mam)n = nmamn.$$

Rotacija vektora a za kut $2\angle(m,n)$ je množenje vektora a jediničnim spinorom $R = nm$ (koji zovemo rotorom) i njemu konjugiranim rotorom $\overline{R} = mn$

$$a'' = Ra\overline{R}.$$

U ravnini su to jedinični kompleksni brojevi, a u trodimenzijskom prostoru jedinični kvaternioni. Označimo li kut $\angle(m,n)$ s φ, jedinični 2-vektor m, n-ravnine s I i uzmemo li u obzir da je $nm = m \cdot n - m \wedge n = \cos\varphi - I\sin\varphi$ vidimo da je

$$R = nm = \cos\varphi - I\sin\varphi = e^{-I\varphi}.$$

Dakle, rotacija za kut φ u ravnini I je množenje rotorom $e^{-I\frac{\varphi}{2}}$ (koji je jedinični kompleksni broj u 2-dim i jedinični kvaternion u 3-dim) i njegovim konjugatom $e^{I\frac{\varphi}{2}}$:

$$a'' = Ra\overline{R} = e^{-I\frac{\varphi}{2}} a e^{I\frac{\varphi}{2}}.$$

Ako je $a \parallel I$, onda je $aI = -Ia$, pa je $e^{-I\frac{\varphi}{2}} a = a e^{I\frac{\varphi}{2}}$. Tada je rotacija za kut φ u ravnini I jednostavno množenje rotorom $e^{I\varphi}$ (tj. jediničnim kompleksnim brojem u ravnini od I):

$$a'' = ae^{I\varphi}.$$

Općenito imamo

$$a'' = e^{-I\frac{\varphi}{2}}(a_{\|} + a_{\perp})e^{I\frac{\varphi}{2}} = a_{\|}e^{I\varphi} + a_{\perp}e^{-I\frac{\varphi}{2}}e^{I\frac{\varphi}{2}} = a_{\|}e^{I\varphi} + a_{\perp}$$

Primijetimo još da je

$$I = \cos\frac{\pi}{2} + I\sin\frac{\pi}{2} = e^{I\frac{\pi}{2}}$$
$$-I = \cos\frac{\pi}{2} - I\sin\frac{\pi}{2} = e^{-I\frac{\pi}{2}},$$

odakle slijedi da imaginarna jedinica I predstavlja rotaciju za kut π:

$$a'' = -IaI.$$

U posebnom slučaju $a \parallel I$ imaginarna jedinica I predstavlja rotaciju za $\pi/2$:

$$a'' = aI.$$

U dvije dimenzije uvijek vrijedi ovaj drugi slučaj jer je uvijek $a \parallel I$. U tri dimenzije nije tako, što je također zbunjivalo Hamiltona jer je očekivao da i u tri dimenzije imaginarne jedinice predstavljaju rotacije za kut $\pi/2$.

7. Paulijeva matrična „mistika"

Paulijevi spinori (koji su dio „mistike" kvantne mehanike) generirani su sljedećim kompleksnim matricama, tzv. Paulijevim matricama

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ako ih označimo s e_1, e_2 i e_3 lako je provjeriti sljedeće jednakosti.

$$e_1^{\,2} = e_2^{\,2} = e_3^{\,2} = 1$$

$$e_1 e_2 = ie_3 \overset{\text{def}}{=} E_3 \qquad e_2 e_3 = ie_1 \overset{\text{def}}{=} E_1 \qquad e_3 e_1 = ie_2 \overset{\text{def}}{=} E_2 \,.$$

Dakle,

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Ie_1 e_2 e_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = i \,.$$

Očito se radi o elementima geometrijske algebre (vektorima e_i, 2-vektorima E_i i 3-vektoru I) zamaskiranim u «mistiku" kompleksnih matrica, koja je dovela do „mistične" tvrdnje da su kompleksni brojevi nezaobilazni temelj kvantne mehanike.

Paulijevi spinori oblika

$$|\Psi\rangle = \left(\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_0 + \alpha_3 i & \alpha_2 + \alpha_1 i \\ -\alpha_2 + \alpha_1 i & \alpha_0 - \alpha_3 i \end{pmatrix} = \alpha_0 + \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

očito su kvaternioni iz pozitivne podalgebre od G_3

$$\alpha_0 + \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3$$

koji imaju jasno geometrijsko (i nimalo mistično) značenje i čija je veza s rotacijama također jasna (i nimalo mistična).

8. Newtonov zakon recipročnih kvadrata

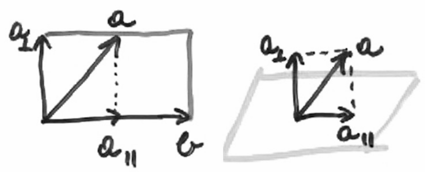
Jedna od prednosti geometrijske pred linearnom algebrom je da u njoj svaki multivektor ima inverz. Na primjer, inverz b^{-1} vektora b je b/b^2 (uočite da je b^2 skalar) jer je

$$b\left(\frac{b}{b^2}\right) = 1 \,.$$

Za 2-vektor B (zbog $B^2 = cdcd = -c^2 d^2$) $B^{-1} = B/B^2$ (uočite da je B^2 skalar) jer je

$$B\left(\frac{B}{B^2}\right) = 1 \,.$$

To nam, na primjer, omogućava laki rastav vektora u paralelnom i okomitom smjeru:



$$a_{\parallel} = a_{\parallel} b b^{-1} = a \cdot b b^{-1} \qquad a_{\parallel} = a_{\parallel} B B^{-1} = a \cdot B B^{-1}$$
$$a_{\perp} = a_{\perp} b b^{-1} = a \wedge b b^{-1} \qquad a_{\perp} = a_{\perp} B B^{-1} = a \wedge B B^{-1}$$

Evo i jednog složenijeg primjera. Dokazat ćemo da je putanja čestice koja se giba pod utjecajem centralne sile čiji je iznos recipročan kvadratu udaljenosti čestice od centra sile konusni presjek. Za usporedbu ćemo to učiniti u vektorskoj i geometrijskoj algebri. Najprije izvodimo formule za akceleraciju gibanja pod utjecajem centralne sile, tj. pod uvjetom da je $\ddot{r} = \lambda r$.

U vektorskoj analizi to izgleda ovako:

$$\ddot{r} \times r = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(r \times \dot{r}) = 0 \Leftrightarrow r \times \dot{r} = h .$$

Dakle, vektor h (koji je vektor kutne količine gibanja) je konstanta gibanja u centralnom polju sila i tijelo se giba u ravnini koja je okomita na vektor kutne količine gibanja. Budući da je $|dP| = -|r \times dr|$, slijedi da je $|\dot{P}| = \frac{1}{2}|r \times \dot{r}| = \text{const}$, tj. gibanje zadovoljava drugi Keplerov zakon.

Uz oznaku $r = \rho u$, gdje je ρ iznos vektora r, a u jedinični vektor u smjeru od r, imamo

$$h = \rho u \times (\dot{\rho} u + \rho \dot{u}) = \rho^2 u \times \dot{u} .$$

Ako razmislimo o geometrijskoj vezi vektora h, u i $\dot{u}$ (radi se o ortogonalnom trobridu), nalazimo

$$\dot{u} = \frac{h \times u}{\rho^2} .$$

Sada možemo izračunati $\dot{r}$ i $\ddot{r}$

$$\dot{r} = \dot{\rho} u + \rho \dot{u} = \dot{\rho} u + \frac{h \times u}{\rho}$$
$$\ddot{r} = \ddot{\rho} u + \rho \dot{u} - \frac{h}{\rho^2} \dot{\rho} \times u + \frac{h}{\rho^2} \rho \times \dot{u} .$$

Nakon malo složenijeg razmišljanja o geometrijskoj vezi vektora h, u i $\dot{u}$ nalazimo

$$\ddot{r} = \ddot{\rho}u + \rho\dot{u} - \frac{h}{\rho^2} \times \left(\frac{h}{\rho^2} \times u\right).$$

U geometrijskoj analizi to izgleda ovako:

$$\ddot{r} \wedge r = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(r \wedge \dot{r}) = 0 \Leftrightarrow r \wedge \dot{r} = H\ .$$

Zasad nema velikih razlika (osim što su ravnine ravnine, a površine su površine, bez ikakvih simulacija). Bivektor H (kutna količina gibanja) je konstanta gibanja u centralnom polju sila i tijelo se giba u njegovoj ravnini. Budući da je $dP = \frac{1}{2} r \wedge dr$, slijedi da je $\dot{P} = \frac{1}{2} r \wedge \dot{r} = const$, tj. gibanje zadovoljava drugi Keplerov zakon.

Uz oznaku $r = \rho u$, gdje je ρ iznos vektora *r*, a *u* jedinični vektor u smjeru od *r*, imamo

$$H = \rho u \wedge (\dot{\rho}u + \rho\dot{u}) = \rho^2 u \wedge \dot{u} = \rho^2 u\dot{u}\ .$$

Zadnja jednakost slijedi iz okomitosti vektora u i $\dot{u}$. S ovim prijelazom na geometrijski produkt daljnja je argumentacija bitno jednostavnija. Bez ikakvih razmišljanja o geometrijskoj vezi vektora *H*, *u* i $\dot{u}$, običnim množenjem jednadžbe $H = \rho^2 u\dot{u}$ slijeva s *u* i dijeljenjem s ρ^2 nalazimo

$$\dot{u} = \frac{uH}{\rho^2} = -\frac{Hu}{\rho^2}\ .$$

Sada je lako izračunati $\dot{r}$ i $\ddot{r}$ bez „složenijih geometrijskih razmišljanja".

$$\dot{r} = \dot{\rho}u + \rho\dot{u} = \left(\dot{\rho}u - \frac{H}{\rho}\right)u$$

$$\ddot{r} = \left(\ddot{\rho} + \frac{\dot{\rho}H}{\rho^2}\right)u + \left(\dot{\rho} - \frac{H}{\rho}\right)\dot{u} = \left(\ddot{\rho} + \frac{\dot{\rho}H}{\rho^2}\right)u - \left(\dot{\rho} - \frac{H}{\rho}\right)\frac{Hu}{\rho^2}$$

$$\ddot{r} = \left(\ddot{\rho} - \frac{H}{\rho^3}\right)u\ .$$

Usporedite li izvode i krajnje formule, očita je prednost geometrijske analize pred vektorskom. No, nastavimo s izvodom konusnih putanja iz zakona recipročnih kvadrata

$$\ddot{r} = -\frac{\lambda}{\rho^2}u\ .$$

U vektorskoj analizi to izgleda ovako:

$$\ddot{r}\times h=-\frac{\lambda}{\rho^2}u\times h=\lambda\frac{h\times u}{\rho^2}=\lambda\dot{u}\Leftrightarrow \dot{r}\times h=\lambda(u-e)\,.$$

Konstanta integracije e je Laplace-Runge-Lenzov vektor. Skalarnim množenjem zadnje jednadžbe s r nalazimo

$$r\cdot(\dot{r}\times h)=\lambda\rho(1-u\cdot e)\,.$$

Uzevši u obzir geometriju mješovitog produkta, nalazimo

$$r\cdot(\dot{r}\times h)=r\times(\dot{r}\;\cdot\;h)=(r\times\dot{r})\cdot h=h\cdot h=h^2\,.$$

Dakle,

$$h^2=\lambda\rho(1-u\cdot e)\Leftrightarrow \rho=\frac{h^2}{\lambda}\frac{1}{1-u\cdot e}=\frac{h^2}{\lambda}\frac{1}{1-|e|\cos\varphi}\,.$$

Zadnja jednadžba je polarna jednadžba konusnog presjeka s ekstrencitetom $|e|$. Ako je $|e|$ manje, jednako ili veće od 1, onda imamo elipsu, parabolu ili hiperbolu.

U geometrijskoj analizi to izgleda ovako:

$$\ddot{r}H=-\frac{\lambda}{\rho^2}uH=-\frac{\lambda}{\rho^2}u\rho^2u\dot{u}=-\lambda\dot{u}\Leftrightarrow H\dot{r}=\lambda\rho(u-e).$$

Zasad nema velikih razlika. Konstanta integracije e je Laplace-Runge-Lenzov vektor. Geometrijskim množenjem zadnje jednadžbe s r nalazimo

$$Hr\dot{r}=\lambda(u-e)r=\lambda\rho(u-e)u.$$

Daljnja je argumentacija bitno jednostavnija. Bez ikakvih „razmišljanja o geometriji mješovitog produkta", običnim izjednačavanjem skalarnih komponenti lijeve i desne strane nalazimo

$$H(\dot{r}\wedge r)=-H^2=\lambda\rho(1-e\cdot u)\Leftrightarrow \rho=\frac{H^2}{\lambda}\frac{1}{1-e\cdot u}=\frac{H^2}{\lambda}\frac{1}{1-|e|\cos\varphi}\,.$$

Zadnja jednadžba je polarna jednadžba konusnog presjeka s ekstrencitetom $|e|$.