ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 28. veljače 2025. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 4/300.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 144.

A) Zadatci iz matematike

4001. Riješi sustav jednadžbi

$$x - \frac{2x+y}{x^2-y^2} = 1$$
$$y + \frac{x+2y}{x^2-y^2} = -1.$$

4002. Dokaži da se broj $(1+\sqrt{2})^n$, $n \in \mathbb{N}$, može prikazati u obliku $a+b\sqrt{2}$, gdje su a i b međusobno prosti brojevi.

4003. Ako su a, b, c duljine stranica trokuta, dokaži nejednakost

$$\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}+\sqrt{a+b-c} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

4004. U skupu prirodnih brojeva riješi jednadžbu $x^{-2}+y^{-2}=z^{-2}$.

4005. Odredi sve proste brojeve p takve da je suma znamenaka broja p^4-5p^2+13 najmanja moguća.

4006. Unutar pravokutnika $ABCD$ dana je točka P na simetrali kuta A. Paralele kroz točku P paralelne s AB i AD sijeku stranice $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ redom u točkama Q i R. Dokaži da se pravci AP, BR i DQ sijeku u istoj točki.

4007. Poznato je da su u trokutu ABC kutovi $\alpha = 30^\circ$ i $\beta = 50^\circ$. Dokaži da za duljine stranica tog trokuta vrijedi $c^2 = b(a+b)$.

4008. U trokutu ABC visina h_c dijeli stranicu $\overline{AB}$ na dijelove duljina p i q. Okomica na tu stranicu dijeli trokut na dva dijela jednakih površina. Ako je M njezin presjek sa stranicom $\overline{AB}$, odredi $|AM|$ i $|BM|$.

4009. U trokutu ABC kut C je jednak 60°, a polumjer opisane kružnice $2\sqrt{3}$ cm. Točka D na stranici $\overline{AB}$ je takva da je $|AD|:|DB| = 2$ i $|CD| = 2\sqrt{2}$ cm. Odredi površinu trokuta.

4010. Pravac l siječe stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ paralelograma $ABCD$ u točkama E i F, tim redom. Pravac l siječe dijagonalu $\overline{AC}$ u točki G. Dokaži jednakost

$$\frac{|AB|}{|AE|}+\frac{|AD|}{|AF|}=\frac{|AC|}{|AG|}.$$

4011. Točka P se nalazi na bazi $\overline{AB}$ jednakokračnog trokuta ABC.

a) Dokaži $|PC|^2 = |AC|^2 - |AP|\cdot|PB|$.

b) Nađi odgovarajuću formulu za slučaj kada je točka P na produžetku stranice $\overline{AB}$.

4012. Riješi sustav jednadžbi

$$\sin x + 2\sin(x+y+z) = 0$$
$$\sin y + 3\sin(x+y+z) = 0$$
$$\sin z + 4\sin(x+y+z) = 0.$$

4013. Dokaži jednakost

$$\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = \sqrt{3}.$$

4014. U unutrašnjosti svake strane kocke dano je n točaka od kojih nikoje tri nisu kolinearne.

a) Koliko ima pravaca, određenih tim točkama, koji ne leže u ravninama strana kocke?

b) Koliko ima trokuta, određenih tim točkama, koji ne leže u ravninama strana kocke?

c) Ako strane kocke obojimo sa šest različitih boja, koliko ima tetraedara s vrhovima u danim točkama ako su:

i) tri vrha iste boje

ii) po dva vrha iste boje?

B) Zadatci iz fizike

OŠ – 542. Iz grada A u grad B je krenuo prvi vlak brzinom 54 km/h, a 15 min nakon njega krenuo je drugi vlak brzinom 36 km/h. Pola sata nakon polaska prvi je vlak sreo treći koji mu je vozio u susret po drugom kolosijeku pruge. Treći se vlak sreo s drugim 10 min kasnije. Kolika je brzina trećeg vlaka?

OŠ – 543. Ivan je svojoj kćerki Astrid kupio u Maksimiru balon napunjen helijem. Procijenio je da je masa praznog balona 15 g, a njegov volumen kad je pun 20 L (litara). Kolikom silom mora Astrid držati balon da joj ne odleti? Gustoća helija je $0.18\ \mathrm{kg/m^3}$, a gustoća zraka $1.3\ \mathrm{kg/m^3}$.

OŠ – 544. Kad oprugu rasteže sila od 10 N ona se produlji za 5 cm, a kad na nju, u suprotnom smjeru od prve, djeluje sila od 4 N njena je duljina 28 cm. Koliko će opruga biti dugačka kad na nju djeluje sila od 18 N u smjeru prve sile?

OŠ – 545. Andrija ima dvije žice od nehrđajućeg čelika. Jedna ima promjer 2 mm, a druga 1 mm. Deblja je žica dvostruko dulja. Opleo je dulju žicu oko kraće i spojio dobivenu pletenicu na bateriju od 1.5 V. Izmjerio je da tada kroz žicu teče struja od 900 mA. Koliko su dugačke žice? Električna otpornost nehrđajućeg čelika iznosi $6.9 \cdot 10^{-7}\ \Omega\mathrm{m}$.

1854. U radioaktivnom uzorku nalazi se 1 mol radioaktivnih atoma ^{138}La. Njihovo vrijeme poluživota je 102 milijarde godina. Koliko se nuklearnih raspada dogodi unutar 1 sekunde?

Napomena. Numerička aproksimacija je

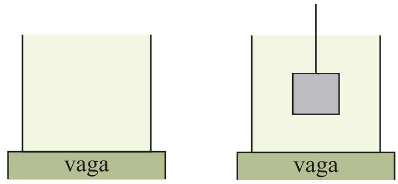
$$2^x \approx 1 + x \ln 2$$

koja vrijedi za vrlo male vrijednosti x. Za provjeru pogreške te aproksimacije može se promatrati egzaktni izraz

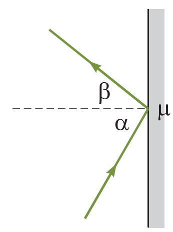
$$2^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x \ln 2)^k}{k!} = 1 + x \ln 2 + \frac{(x \ln 2)^2}{2} + \cdots$$

1855. Dva spremnika ispunjena su plemenitim plinovima (svaki od njih je čista tvar, prirodne izotopne zastupljenosti). U prvome spremniku nalazi se čisti helij temperature $0\ ^\circ\mathrm{C}$. U drugome spremniku je plin temperature $60\ ^\circ\mathrm{C}$ te 91 puta veće gustoće i 2 puta većeg tlaka. Koji je to plin?

1856. Vaga, na koju je postavljena čaša s vodom, pokazuje 10 N. Nakon toga u vodu je na niti spušten kamen (bez prelijevanja vode preko ruba čaše), tako da je potpuno uronjen, ali ne dodiruje dno čaše. Vaga sada pokazuje 15 N. Koji podatak o kamenu možete izračunati iz ovih podataka? Gustoća vode je $1000\ \mathrm{kg/m^3}$. Koristi $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.



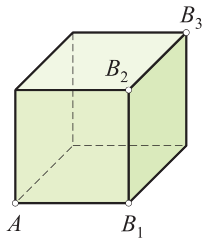
1857. Tijelo nalijeće na podlogu pod kutom 60° s obzirom na njezinu okomicu i odbija se od nje. Odboj je elastičan *u smjeru okomitom na podlogu* (komponenta količine gibanja okomita na podlogu ne mijenja iznos nakon odboja). Ako je koeficijent trenja između tijela i podloge jednak 0.5, koliki je kut odboja tijela s obzirom na okomicu podloge?



Uputa. Sjetite se impulsa sile i njegova učinka na količinu gibanja. Pretpostavite da tijekom kratkog vremena odboja djeluje dinamičko trenje kako biste silu trenja mogli povezati s koeficijentom trenja.

1858. Vrijeme poluživota slobodnog neutrona iznosi 10.2 minute u sustavu u kojem je njegova ukupna relativistička energija jednaka njegovoj energiji mirovanja. Koliko je njegovo vrijeme poluživota u sustavu u kojem je njegova kinetička energija jednaka njegovoj energiji mirovanja?

1859. Od vodljivih žica istih otpornih svojstava sastavljen je "kostur" kocke kao na slici. Izvor istosmjernog napona spojen je preko točke A i jedne od točaka B_1, B_2, B_3. U prvom slučaju napon od 12 V narinut je preko točke B_1 pa je elektronima koji vode struju potrebno određeno vrijeme kako bi prošli između točaka A i B_1 najkraćim putem kroz strujni krug. Koliki napon mora biti između točaka A i B_2 te između točaka A i B_3 da bi vrijeme prolaza elektrona najkraćim putem između tih parova točaka bilo jednako kao u prvom slučaju?



1860. Mirujuća loptica s visine od 10 m je puštena da slobodno pada prema tjemenu sabirnog sfernog zrcala polumjera zakrivljenosti 4 m. Nakon koliko vremena će se loptica susresti sa svojom realnom slikom?

C) Rješenja iz matematike

3973. *Ako je* $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{7}=1$ *odredi najveću moguću vrijednost od* $(x+y)^2$.

Prvo rješenje. Vidimo da postoji $\alpha\in[0,2\pi\rangle$ takav da je $x=\sqrt{5}\sin\alpha$ i $y=\sqrt{7}\cos\alpha$. Tada je

$$\begin{aligned}(x+y)^2&=(\sqrt{5}\sin\alpha+\sqrt{7}\cos\alpha)^2\\&=12\cdot\left(\sqrt{\frac{5}{12}}\sin\alpha+\sqrt{\frac{7}{12}}\cos\alpha\right)^2.\end{aligned}$$

Kako postoji kut β za koji je $\cos\beta=\sqrt{\frac{5}{12}}$ i $\sin\beta=\sqrt{\frac{7}{12}}$ imamo:

$$\begin{aligned}(x+y)^2&=12\cdot(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)^2\\&=12\cdot\sin^2(\alpha+\beta)\\&\leqslant 12.\end{aligned}$$

Dakle, maksimalna vrijednost od $(x+y)^2$ iznosi 12 (za $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$).

Duje Dodig (3),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

Drugo rješenje. Neka je $x+y=z$. Tada je $y=z-x$ i

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{5}+\frac{(z-x)^2}{7}&=1\\7x^2+5(z-x)^2&=35\\12x^2-10zx+5z^2-35&=0.\end{aligned}$$

Kako je x realan broj diskriminante kvadratne jednadžbe po x mora biti nenegativna:

$$\begin{aligned}(-10z)^2-4\cdot12\cdot(5z^2-35)&\geqslant0\\100z^2-240z^2+1680&\geqslant0\\z^2&\leqslant12.\end{aligned}$$

Najveća vrijednost od $(x+y)^2=12$ i dostiže se za $x=\frac{5}{\sqrt{12}}$ i $y=\frac{7}{\sqrt{12}}$.

Ur.

3974. *Nađi sva pozitivna cjelobrojna rješenja jedadžbe*

$$x^2y+y^2z+z^2x=3xyz.$$

Rješenje. Koristeći A-G nejednakost imamo:

$$\begin{aligned}x^2y+y^2z+z^2x&\geqslant3\cdot\sqrt[3]{(x^2y)(y^2z)(z^2x)}\\&=3xyz.\end{aligned}$$

Jednakost vrijedi samo u slučaju

$$x^2y=y^2z=z^2x$$

tj.

$$x^2=yz,\quad y^2=zx,\quad z^2=xy.$$

Zbrajanjem posljednjih jednakosti dobivamo

$$x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$$

odakle je

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$$

tj.

$$x=y=z.$$

Znači, skup pozitivnih cjelobrojnih rješenja je:

$$(x,y,z)\in\{(n,n,n):n\in\mathbb{N}\}.$$

Duje Dodig (3), Zagreb

3975. *Odredi sva realna rješenja sistema jednadžbi*

$$\begin{aligned}3(x^2+y^2+z^2)&=1\\x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2&=xyz(x+y+z)^3.\end{aligned}$$

Rješenje. Iz druge jednadžbe sustava zaključujemo

$$xyz(x+y+z)\geqslant0. \qquad (1)$$

Budući da vrijedi:

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \\ &= 3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2, \end{aligned} \tag{2}$$

iz prve jednadžbe sustava slijedi:

$$(x+y+z)^2 \leqslant 1. \tag{3}$$

Također vrijedi:

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant (xy-yz)^2+(yz-zx)^2+(zx-xy)^2 \\ &= 2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)-2xyz(x+y+z) \end{aligned}$$

tj.

$$xyz(x+y+z) \leqslant x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2. \tag{4}$$

Zahvaljujući nejednakosti (1) možemo pomnožiti nejednakosti (3) i (4):

$$xyz(x+y+z)^3 \leqslant x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2. \tag{5}$$

Iz druge jednadžbe sustava slijedi da u nejednakosti (5) vrijedi jednakost. To znači da su obje pomnožene nejednakosti (3) i (4), zapravo, jednakosti ili su članovi s obje strane nejednakosti (4) jednaki nuli. U prvom slučaju znak jednakosti u (2) i (3) vodi do zaključka da je $x = y = z = \pm\frac{1}{3}$. U drugom slučaju umnošci xy, yz, zx jednaki su nuli, tj. neka dva od brojeva x, y, z su nule, a treći mora biti jednak $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, prema prvoj jednadžbi sustava. Ovime smo dobili osam trojki koje zadovoljavaju dani sustav:

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \Big\{ &\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right), \\ &\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0,0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}},0,0\right), \\ &\left(0,-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right), \left(0,\frac{1}{\sqrt{3}},0\right), \\ &\left(0,0,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(0,0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Big\}. \end{aligned}$$

Duje Dodig (3), Zagreb

3976. *Izračunaj vrijednost determinante*

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}.$$

Rješenje. Imamo

$$\frac{1}{4}D = \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ -\frac{1}{2}b & -\frac{1}{2}c & -\frac{1}{2}a & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}c & -\frac{1}{2}a & -\frac{1}{2}b & -\frac{1}{2} \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

(pribrajanjem drugog i trećeg retka četvrtom)

$$= \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ -\frac{1}{2}b & -\frac{1}{2}c & -\frac{1}{2}a & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}c & -\frac{1}{2}a & -\frac{1}{2}b & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

tj. $D = 0$.

Duje Dodig (3), Zagreb

3977. *Odredi sumu*

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)k!.$$

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned} (k^2+1)k! &= (k^2+k-k+1)k! \\ &= k(k+1)k! - (k-1)k! \\ &= k(k+1)! - (k-1)k! \\ &= a_{k+1} - a_k, \end{aligned}$$

gdje je $a_k = (k-1)k!$.

Tražena suma je $a_{n+1} - a_1 = n(n+1)!$.

Franka Horvat (1),
X. gimnazija "Ivan Supek", Zagreb

3978. *Dokaži da je trokut ABC sa stranicama a, b, c i kutovima α, β, γ jednakostraničan ako i samo ako je*

$$\begin{aligned} a\cos(\beta-\gamma)+b\cos(\gamma-\alpha)+c\cos(\alpha-\beta) \\ = \frac{a^4+b^4+c^4}{abc}. \end{aligned}$$

Rješenje. Pretpostavimo da vrijedi dana jednakost. Primjenom A-G nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} &a^4+b^4+c^4 \\ &= \frac{a^4+b^4}{2}+\frac{b^4+c^4}{2}+\frac{c^4+a^4}{2} \end{aligned}$$

$$\geqslant a^2 \cdot \frac{b^2+c^2}{2} + b^2 \cdot \frac{c^2+a^2}{2} + c^2 \cdot \frac{a^2+b^2}{2}$$
$$\geqslant a^2bc + b^2ca + c^2ab$$
$$= abc(a+b+c).$$

Sada dobivamo:

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{abc}$$
$$\geqslant a+b+c$$
$$\geqslant a\cos(\beta-\gamma) + b\cos(\gamma-\alpha) + c\cos(\alpha-\beta)$$
$$= \frac{a^4+b^4+c^4}{abc}.$$

Dakle, svuda moraju vrijediti jednakosti. Lako je vidjeti da je

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{abc} = a+b+c$$

ako i samo ako je $a=b=c$ i

$$a+b+c$$
$$= a\cos(\beta-\gamma) + b\cos(\gamma-\alpha) + c\cos(\alpha-\beta)$$

ako i samo ako je

$$\cos(\beta-\gamma) = b\cos(\gamma-\alpha) = c\cos(\alpha-\beta) = 1,$$

tj. ako i samo ako je $\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{\pi}{3}$.

Dakle, $\triangle ABC$ je jednakostraničan.

Duje Dodig (3), Zagreb

3979. *Niz a_n definiran je rekurzivno: $a_1 = 2$, $a_n = 3a_{n-1}+1$ za $n \geq 2$. Odredi zbroj $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.*

Rješenje. Nađimo opći član ovoga niza:

$$a_2 = 3a_1 + 1 = 7$$
$$a_3 = 3a_2 + 1 = 3(3a_1+1)+1$$
$$= 3^2a_1 + 3 + 1 = 22$$
$$a_4 = 3a_3 + 1 = 3(3a_2+1)+1$$
$$= 3^3a_1 + 3^2 + 3 + 1 = 67$$
$$a_5 = 3a_4 + 1 = 3(3a_3+1)+1$$
$$= 3^4a_1 + 3^3 + 3^2 + 3 + 1 = 202.$$

Induktivno zaključujemo da je:

$$a_n = 3a_{n-1} + 1$$
$$= 3^{n-1}a_1 + 3^{n-2} + 3^{n-3} + \ldots + 3 + 1$$
$$= 3^{n-1}\cdot 2 + \frac{1-3^{n-1}}{1-3}$$
$$= 2\cdot 3^{n-1} + \frac{1}{2}\cdot 3^{n-1} - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{5}{6}\cdot 3^n - \frac{1}{2}.$$

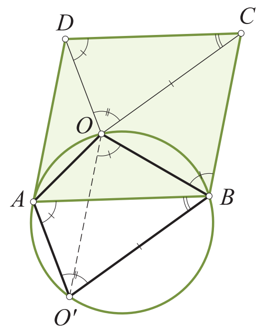
Sada je traženi zbroj:

$$S = a_1 + a_1 + \ldots + a_n$$
$$= \frac{5}{6}\cdot(3^n + 3^{n-1} + \ldots + 3) - \frac{n}{2}$$
$$= \frac{5}{6}\cdot\frac{1-3^n}{1-3}\cdot 3 - \frac{n}{2}$$
$$= \frac{5}{6}\cdot\left(\frac{3^{n+1}}{2} - \frac{3}{2}\right) - \frac{n}{2}$$
$$= \frac{5}{4}\cdot 3^n - \frac{5}{4} - \frac{n}{2}.$$

Duje Dodig (3), Zagreb

3980. *Neka je O točka unutar paralelograma $ABCD$ tako da je $\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = \pi$. Dokaži da je $\sphericalangle OBC = \sphericalangle ODC$.*

Rješenje. Povucimo pravce $AO' \| DO$ i $BO' \| CO$, a točka O' je njihov presjek. Tada je $\sphericalangle COD = \sphericalangle AO'B$, pa je $\sphericalangle AOB + \sphericalangle AO'B = 180^\circ$ i četverokut $AOBO'$ je tetivni.



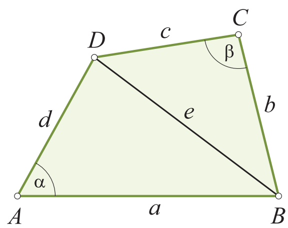
Kako je, po konstrukciji, $\triangle OCD \cong \triangle O'BA$ to je i četverokut $O'OCB$ paralelogram. Imamo $\sphericalangle OCD = \sphericalangle O'BA$, a kao kutovi nad istom tetivom je $\sphericalangle O'AB = \sphericalangle O'OB$, a kao kutovi uz presječnicu je još $\sphericalangle O'OB = \sphericalangle OBC$. Time je tvrdnja dokazana.

Duje Dodig (3), Zagreb

3981. *Dokaži da od svih konveksnih četverokuta $ABCD$ sa zadanim duljinama stranica $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DA| = d$, najveću površinu ima onaj oko kojeg se može opisati kružnica, tj. ako je tetivni.*

Rješenje. Neka je $ABCD$ proizvoljan konveksan četverokut i neka je P njegova površina. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} 2P &= 2(P_{\triangle ABD} + P_{\triangle BCD}) \\ &= ad\sin\alpha + bc\sin\beta. \end{aligned} \tag{1}$$



Koristeći kosinusov poučak je:

$$\begin{aligned} &a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\beta \\ &\Longrightarrow \frac{1}{2}(a^2 + d^2 - b^2 - c^2) \\ &= ad\cos\alpha - bc\cos\beta. \end{aligned} \tag{2}$$

Kvadrirajmo, a potom zbrojimo jednakosti (1) i (2):

$$\begin{aligned} &4P^2 + \frac{1}{4}(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 \\ &= a^2d^2 + b^2c^2 \\ &\quad - 2abcd(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \\ &= a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd\cos(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

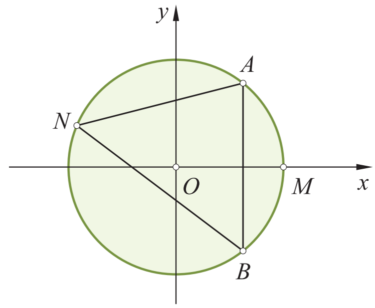
Najveća vrijednost P^2 se postiže za $\alpha + \beta = \pi$, tj. kada je četverokut tetivni.

Duje Dodig (3), Zagreb

3982. *Točka M je polovište luka $\overset{\frown}{AB}$ kružnice. Dokaži da za svaku točku N te kružnice vrijedi jednakost*

$$||AM|^2 - |MN|^2| = |AN| \cdot |BN|.$$

Rješenje. Neka je O središte kružnice koja je ishodište kompleksne ravnine. Neka je M na x-osi, a polumjer kružnice je $r = 1$. Točkama M, A, B, N pripadaju kompleksni brojevi 1, a, b, n.



Jednadžba kružnice je $z\overline{z} = 1$ i $a = \overline{b}$, $b = \overline{a}$. Sada imamo

$$\begin{aligned} |AN| \cdot |BN| &= |a - n| \cdot |b - n| \\ &= |(a - n)(\overline{a} - n)| \\ &= |a\overline{a} - n\overline{a} - na + n^2| \\ &= |1 + n^2 - n(a + \overline{a})|. \end{aligned}$$

Kako je

$$\begin{aligned} |AM|^2 &= |a - 1||\overline{a} - 1| \quad \text{i} \\ |MN|^2 &= |n - 1||\overline{n} - 1| \end{aligned}$$

imamo

$$||AM|^2 - |MN|^2| = |n + \overline{n} - (a + \overline{a})|.$$

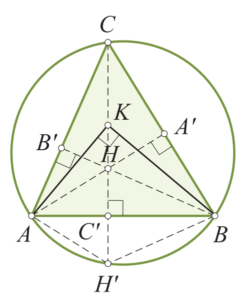
Pomnožimo li ove jednakosti s $|n| = 1$ dobivamo

$$\begin{aligned} ||AM|^2 - |MN|^2| &= |n^2 + 1 - n(a + \overline{a})| \\ &= |AN| \cdot |BN|. \end{aligned}$$

Ur.

3983. *Točka H je ortocentar trokuta ABC. Točka K je na CH tako da je ABK pravokutan trokut. Dokaži da je površina trokuta ABK geometrijska sredina površina trokuta ABC i ABH.*

Rješenje. Neka je točka H' simetrična točki H u odnosu na stranicu $\overline{AB}$. Pokazat ćemo da se točka H' nalazi na kružnici opisanoj trokutu ABC.



Kako su $\triangle AHB \cong \triangle AH'B$ i četverokut $HA'CB'$ je tetivni $(\sphericalangle A' = \sphericalangle B' = 90^\circ)$ vrijedi:

$$\sphericalangle AH'B = \sphericalangle AHB = 180^\circ - \sphericalangle ACB,$$

odakle slijedi da je četverokut $AH'BC$ tetivni i tvrdnja vrijedi.

Sada koristimo potenciju unutarnje točke C' u odnosu na kružnicu

$$|CC'| \cdot |C'H'| = |AC'| \cdot |BC'|.$$

Budući da je $\overline{KC'}$ visina pravokutnog trokuta spuštena na hipotenuzu, po Euklidovu poučku je

$$|KC'| = \sqrt{|AC'| \cdot |BC'|}.$$

Iz gornje jednakosti slijedi:

$$\begin{aligned} |KC'| &= \sqrt{|CC'| \cdot |C'H'|} \\ &= \sqrt{|CC'| \cdot |HC'|} \\ \frac{|KC'| \cdot |AB|}{2} &= \sqrt{\frac{|AB| \cdot |CC'|}{2} \cdot \frac{|AB| \cdot |HC'|}{2}} \\ P_{\triangle ABK} &= \sqrt{P_{\triangle ABC} \cdot P_{\triangle ABH}} \end{aligned}$$

i tvrdnja je dokazana.

Duje Dodig (3), Zagreb

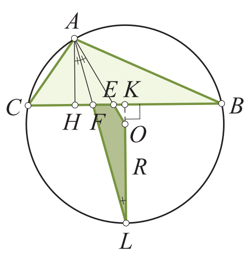
3984. *Kružnica sa središtem O opisana je trokutu ABC, gdje je kut uz vrh A tupi. Radijus $\overline{AO}$ je pod kutem od 30° u odnosu na visinu $\overline{AH}$. Simetrala AF kuta $\sphericalangle CAB$ siječe kružnicu u točki L i radijus $\overline{AO}$ siječe $\overline{BC}$ u točki E. Izračunaj površinu četverokuta $OEFL$ ako je $|AL| = 4\sqrt{2}$ cm i $|AH| = \sqrt{2\sqrt{3}}$ cm.*

Rješenje. Kako istim obodnim kutovima odgovaraju jednaki kutovi imamo:

$$\sphericalangle CAL = \sphericalangle BAL = \frac{\alpha}{2}$$

$$\Longrightarrow \overset{\frown}{CL} = \overset{\frown}{BL}.$$

Tada je KL simetrala stranice $\overline{BC}$ kao na slici.



Jer je $AH \| KL$ vrijedi $\sphericalangle HAL = \sphericalangle ALO$, a jer je $\triangle ALO$ jednakokračan još je i $\sphericalangle FAO = \sphericalangle FLO$. Znači imamo:

$$\begin{aligned} \sphericalangle HAF = \sphericalangle ALO &= \sphericalangle OAL \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle HAO = 15^\circ. \end{aligned}$$

Kosinusov poučak za $\triangle ALO$ daje:

$$\begin{aligned} |AL|^2 &= |AO|^2 + |OL|^2 \\ &\quad - 2 \cdot |AO| \cdot |OL| \cdot \cos 150^\circ \\ 32 &= R^2 + R^2 + 2R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Longrightarrow R^2 &= \frac{32}{2+\sqrt{3}} = 32(2-\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Računamo:

$$\begin{aligned} P_{\triangle AOL} &= \frac{1}{2}|AO| \cdot |OL| \cdot \sin 150^\circ \\ &= \frac{1}{2}R^2 \cdot \frac{1}{2} = 8(2-\sqrt{3})\ \mathrm{cm}^2 \\ |HE| &= |AH| \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \\ &= \sqrt{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \\ |HF| &= |AH| \cdot \operatorname{tg} 15^\circ \\ &= \sqrt{2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}} \\ &= \sqrt{2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} \\ &= \sqrt{2\sqrt{3}} \cdot (2-\sqrt{3}) \\ |EF| &= |HE| - |HF| \\ &= \sqrt{2\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 2 + \sqrt{3}\right) \\ &= \sqrt{2\sqrt{3}} \cdot \frac{4\sqrt{3}-6}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{2\sqrt{3}} \cdot \frac{12-6\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{2\sqrt{3}} \cdot \frac{2(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}} \\ P_{\triangle AFE} &= \frac{1}{2}|EF| \cdot |AH| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2\sqrt{3}} \cdot \frac{2(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2\sqrt{3}} \\ &= 2(2-\sqrt{3})\ \mathrm{cm}^2. \end{aligned}$$

Površina traženog četverokuta je:

$$P_{OEFL} = P_{\triangle AOL} - P_{\triangle AFE}$$
$$= 8(2-\sqrt{3}) - 2(2-\sqrt{3})$$
$$= 6(2-\sqrt{3})\ \text{cm}^2.$$

Duje Dodig (3), Zagreb

3985. *Odredi pozitivan cijeli broj n takav da je $n^2+19n+48$ potpuni kvadrat.*

Rješenje.

$$n^2+19n+48 = (n+3)(n+16)$$

i ovaj broj mora biti potpuni kvadrat. Za najveći zajednički djelitelj ovih dvaju faktora vrijedi:

$$\text{nzd}\,(n+16, n+3) = \text{nzd}\,(n+3, 13)$$

i iznosi 13 ili 1.

Neka je nzd $=13$, tj. $n+3=13k$ i $n+16=13(k+1)$. Tako je:

$$(n+3)(n+16) = 169k(k+1)$$

što očito ne može biti kvadrat cijelog broja. Znači nzd $(n+16, n+3)=1$ i svaki od njih mora biti potpuni kvadrat. Stavimo li $n+3=m^2$ imamo

$$n+16 \geqslant (m+1)^2 = m^2+2m+1$$
$$= n+3+2m+1$$
$$\Longrightarrow\ m \leqslant 6.$$
$$m \in \{2,3,4,5,6\} \Longrightarrow$$
$$n+16 = m^2+13 \in \{17,22,29,38,49\}.$$

Jedini kvadrat je 49 za $m=6$ i tada je $n=33$.

Duje Dodig (3), Zagreb

3986. *Neka su x, y, z realni brojevi takvi da je*

$$\cos x+\cos y+\cos z = 0$$
$$\cos 3x+\cos 3y+\cos 3z = 0.$$

Dokaži $\cos 2x\cos 2y\cos 2z \le 0$.

Rješenje.

$$\cos^3 x+\cos^3 y+\cos^3 z$$
$$= (\cos x+\cos y)^3 - 3\cos x\cos y(\cos x+\cos y)$$
$$+\cos^3 z$$
$$= (-\cos z)^3 - 3\cos x\cos y(\cos x+\cos y)$$
$$+\cos^3 z$$
$$= -3\cos x\cos y(-\cos z)$$
$$= 3\cos x\cos y\cos z. \qquad (*)$$

Koristimo formulu:

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$

pa iz drugog uvjeta imamo:

$$4(\cos^3 x+\cos^3 y+\cos^3 z)$$
$$= 3(\cos x+\cos y+\cos z) = 0.$$

Zbog $(*)$ slijedi:

$$\cos x\cos y\cos z = 0,$$

pa je barem jedan od brojeva $\cos x$, $\cos y$, $\cos z$ jednak nuli. Neka je npr. $\cos z = 0$. Tada je

$$\cos x+\cos y = 0$$
$$\Longrightarrow\ \cos y = -\cos x \quad \text{i}$$
$$\cos^2 y = \cos^2 x.$$

Sada je

$$\cos 2x\cos 2y\cos 2z$$
$$= (2\cos^2 x-1)(2\cos^2 y-1)(2\cos^2 z-1)$$
$$= -(2\cos^2 x-1)^2 \leqslant 0,$$

što očito vrijedi.

Duje Dodig (3), Zagreb

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 534. *Marko grije vodu za čaj u kuhalu. Izmjerio je da kuhalu treba 4 min da zakuha litru vode početne temperature $18\,^\circ C$. Pročitao je da je korisnost kuhala $90\ \%$. Kolika je snaga i električni otpor tog kuhala? Specifični toplinski kapacitet vode je $4200\ J/kgK$, a napon električne gradske mreže je 230 V.?*

Rješenje.

$V = 1$ L

$m = 1$ kg

$t = 4$ min $= 240$ s

$t_1 = 18\,^\circ$C

$t_2 = 100\,^\circ$C

$U = 250$ V

$c = 4200\ \dfrac{\text{J}}{\text{kgK}}$

$\eta = 90\ \%$

$P, R = ?$

$\Delta t = t_2 - t_1 = 82\,^\circ\mathrm{C}$

$$Q = cm\Delta t = 4200\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kgK}} \cdot 1\ \mathrm{kg} \cdot 82\ \mathrm{K}$$

$$= 344\,400\ \mathrm{J} = W_{\mathrm{korisni}}$$

$$W_{\mathrm{ukupni}} = \frac{W_{\mathrm{korisni}}}{\varepsilon} = \frac{344\,400\ \mathrm{J}}{0.9}$$

$$W_{\mathrm{korisni}} = 382\,666.7\ \mathrm{J}$$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{382\,666.7\ \mathrm{J}}{240\ \mathrm{s}} = 1594.4\ \mathrm{W}$$

$$I = \frac{P}{U} = \frac{1594.4\ \mathrm{W}}{230\ \mathrm{V}} = 6.93\ \mathrm{A}$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{230\ \mathrm{V}}{6.93\ \mathrm{A}} = 33.2\ \Omega.$$

Nika Valešić (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 535. *Ivan i Grga se utrkuju na stazi dugačkoj 300 m. Grga je viši i njegovi su koraci dugački 150 cm, a Ivanovi su 10 cm kraći. Grga napravi dva koraka u sekundi, a Ivan 132 koraka u minuti. Tko će od njih pobijediti u toj utrci i koliko će u trenutku ulaska u cilj biti udaljen od drugoplasiranog?*

Rješenje.

$s = 300\ \mathrm{m}$

$l_{\mathrm{G}} = 150\ \mathrm{cm} = 1.5\ \mathrm{m}$

$l_{\mathrm{I}} = 140\ \mathrm{cm} = 1.4\ \mathrm{m}$

$\frac{n_{\mathrm{G}}}{t} = 2\ \frac{\mathrm{korak}}{\mathrm{s}}$

$\frac{n_{\mathrm{I}}}{t} = 132\ \frac{\mathrm{korak}}{\mathrm{min}} = 2.2\ \frac{\mathrm{korak}}{\mathrm{s}}$

$t_{\mathrm{pobjednika}} = ?$

$\Delta s = ?$

$$v_{\mathrm{Grga}} = \frac{s}{t} = 2\ \frac{\mathrm{korak}}{\mathrm{s}} \cdot 1.5\ \mathrm{m} = 3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$v_{\mathrm{Ivan}} = \frac{s}{t} = 2.2\ \frac{\mathrm{korak}}{\mathrm{s}} \cdot 1.4\ \mathrm{m} = 3.08\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$t_{\mathrm{Ivan}} = \frac{s}{t} = \frac{300\ \mathrm{m}}{3.08\ \mathrm{m/s}} = 97.4\ \mathrm{s}$$

$$s_{\mathrm{Grga}} = v_{\mathrm{Grga}} \cdot t_{\mathrm{Ivan}} = 3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 97.4\ \mathrm{s} = 292.2\ \mathrm{m}$$

$$\Delta s = s_{\mathrm{Ivan}} - s_{\mathrm{Grga}} = 300\ \mathrm{m} - 292.2\ \mathrm{m}$$

$$= 7.8\ \mathrm{m}.$$

Pobijedit će Ivan jer mu je brzina veća i u trenutku ulaska u cilj bit će od Grge udaljen 7.8 m.

Leon Hudoletnjak (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 536. *Učenici su dobili zadatak da odrede gustoću nepoznatog metala. Učiteljica im je dala komadić tog metala, vagu i čašu. Masu metala su lako odredili, iznosila je 55 g, ali čaša je bila prevelika za točno mjerenje tako malenog obujma. Smislili su drugi način. Napunili su čašu vodom do vrha, pažljivo je stavili na vagu i izvagali. Masa vode i čaše je iznosila 360 g. Nakon toga su čašu maknuli s vage i stavili u nju metal, tako da se dio vode prelio iz čaše. Nakon toga su je ponovo izvagali, te utvrdili da je masa vode, čaše i metala iznosila 407 g. Kolika je gustoća tog metala? Gustoća vode je 1000 kg/m^3.*

Rješenje.

$m_{\mathrm{m}} = 55\ \mathrm{g}$

$m_{\mathrm{v_1+č}} = 360\ \mathrm{g}$

$m_{\mathrm{v_2+č+m}} = 407\ \mathrm{g}$

$\rho_{\mathrm{v}} = 1000\ \mathrm{kg/m^3} = 1\ \mathrm{g/cm^3}$

$\rho_{\mathrm{m}} = ?$

$$m_{\mathrm{v_2+č}} = m_{\mathrm{v_2+č+m}} - m_{\mathrm{m}} = 407\ \mathrm{g} - 55\ \mathrm{g}$$
$$= 352\ \mathrm{g}$$

$$m_{\mathrm{izlivena\ voda}} = m_{\mathrm{v_1+č}} - m_{\mathrm{v_2+č}}$$
$$= 360\ \mathrm{g} - 352\ \mathrm{g} = 8\ \mathrm{g}$$

$$V_{\mathrm{izlivena\ voda}} = 8\ \mathrm{cm^3} = V_{\mathrm{m}}$$

$$\rho_m = \frac{m}{V} = \frac{55\ \mathrm{g}}{8\ \mathrm{cm^3}} = 6.875\ \mathrm{g/cm^3}$$
$$= 6875\ \mathrm{kg/m^3}.$$

Ema Stanešić (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 537. *Ispred sabirne leće se nalazi predmet visok 12 cm koji je od nje udaljen 40 cm. Njegova je slika na jednakoj udaljenosti s druge strane leće. Koliko će biti visoka slika predmeta ako ga se udalji od leće za 10 cm?*

Rješenje.

$v_1 = 12\ \mathrm{cm}$

$a_1 = 40\ \mathrm{cm} = b_1$

$a_2 = 50\ \mathrm{cm}$

$v_2 = ?$

Ako je slika s druge strane na istoj udaljenosti kao i predmet on se tada nalazi točno u središtu zakrivljenosti leće, dakle polumjer zakrivljenosti je 40 cm.

$$r = 40 \text{ cm}$$
$$f = \frac{r}{2} = 20 \text{ cm}$$
$$\frac{1}{b_2} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a_2} = \frac{1}{20 \text{ cm}} - \frac{1}{50 \text{ cm}}$$
$$= \frac{5-2}{100 \text{ cm}} = \frac{3}{100 \text{ cm}}$$
$$b_2 = \frac{100}{3} \text{ cm}$$
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{a_2}{b_2}$$
$$v_2 = \frac{v_1 \cdot b_2}{a_2} = \frac{12 \text{ cm} \cdot 33.3 \text{ cm}}{50 \text{ cm}}$$
$$= 8 \text{ cm}.$$

Ur.

1840. *Svjetlo na mobitelu radeći neprekidno isprazni bateriju za 4 sata. Korištenje Wi-Fi mreže bi ispraznilo bateriju za 10 sati, a rad ekrana za 6 sati. Koliko će trajati baterija ako stalno koristimo svjetlo, ekran i Wi-Fi?*

Rješenje. Sumiramo snagu svih potrošača $(P = W/t)$:

$$P = P_S + P_W + P_E,$$
$$\frac{W}{t} = \frac{W}{t_S} + \frac{W}{t_W} + \frac{W}{t_E},$$
$$\frac{1}{t} = \frac{1}{t_S} + \frac{1}{t_W} + \frac{1}{t_E}.$$

Odatle je

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{6} = \frac{15+6+10}{60} = \frac{31}{60}.$$

Dakle, baterija će trajati $t = 60/31 = 1.935$ h $=$ 1 h 56 min 8 s.

Franka Horvat (1),
X. gimnazija "Ivan Supek", Zagreb

1841. *Kolica imaju fiksirane kotače tako da rade zavoj radijusa zakrivljenosti 4 m. Ako ih guramo u krug sve većom brzinom, ona će se prevrnuti ili prokliznuti. Na kojim bi se brzinama dogodilo prevrtanje ili prokliznuće, ako je koeficijent trenja kotača i podloge 0.7, a težište je na visini dvaput manjoj od duljine osovine? Uzeti $g = 9.81$ m/s^2.*

Rješenje. Kolica će se prevrnuti ako rezultanta sile teže i centrifugalne sile s hvatištem u težištu premaši tlocrtnu veličinu kolica (polovinu duljine osovine, $d/2$). To će se dogoditi ako je

$$\frac{F_{cf}}{F_g} > \frac{h}{d/2} = 1,$$

tj. uz $F_{cf} = mv^2/r$ i $F_g = mg$,

$$v^2 > rg$$

slijedi da će se kolica prevrnuti ako je $v > 6.264$ m/s. Kolica bi prokliznula ako centrifugalna sila premaši silu trenja, tj.

$$F_{\text{cf}} > F_{\text{tr}},$$
$$m\frac{v^2}{r} > \mu mg,$$
$$v^2 > 0.7rg.$$

Odgovarajuća će brzina biti $v > 5.241$ m/s. Zaključujemo da prevrtanje ili prokliznuće ovisi o visini težišta i koeficijentu trenja, tj. za $\mu < \frac{2h}{d}$ kolica će prokliznuti, a u suprotnom će se prevrnuti.

Ur.

1842. *Metalni kontejner ima površinu 50 m^2. Vanjska temperatura je 5 °C, a nutarnja 21 °C. Koliku snagu treba imati grijalica koja u kontejneru održava temperaturu? Metal je tanak i dobro provodi toplinu, te možemo kontejner smatrati crnim tijelom.*

Rješenje. Snaga zračenja topline kontejnera veća je od snage kojom okolina zrači prema kontejneru u skladu sa Stefan-Bolzmannovim zakonom zračenja crnog tijela,

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \sigma S T_1^4 - \sigma S T_2^4,$$

gdje je $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ W/m^{2}K^4 Stefan-Bolzmannova konstanta, $S = 50$ m^2 površina kontejnera, $T_1 = 294$ K temperatura kontejnera, a $T_2 = 278$ K temperatura okoline.

Uvrštavanjem dobijemo

$$\Delta P = 2.835 \cdot 10^{-6}(294^4 - 278^4) = 4248 \text{ W}.$$

Duje Dodig (3),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

1843. *Oko planeta se giba satelit po eliptičnoj putanji. Kutna brzina orbitiranja mijenja se od 4 do 9 kutnih stupnjeva na sat. Odredi ekscentricitet putanje i ophodno vrijeme satelita u satima.*

Rješenje. Prema drugom Keplerovom zakonu, skalarni umnožak brzine i radijvektora satelita je konstantan, dakle isti u najbližoj (q) i najdaljoj (Q) točki putanje:

$$v_{\max} q = v_{\min} Q,$$

što za omjer kutnih brzina daje

$$\frac{\omega_q}{\omega_Q} = \frac{9}{4} = \left(\frac{Q}{q}\right)^2 = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2,$$

gdje je e numerički ekscentricitet elipse. Iz gornje jednadžbe $e = 0.2$. Kutnu brzinu kruženja (za koje je ophodno vrijeme jednako kao za elipsu) je

$$\omega_k = \sqrt{\omega_q \omega_Q} \cdot (1 - e^2) = 5.8788^\circ/\text{h}.$$

Dijeljenjem punog kruga (360°) dobivenom kutnom brzinom dobijemo ophodno vrijeme

$$T = \frac{360^\circ}{\omega_k} = 61.24 \text{ h}.$$

Ur.

1844. *Izotop* ^{201}*Tl koji se koristi u dijagnostičkoj medicini ima vrijeme poluraspada 72.912 sati. Nakon koliko će sati aktivnost primljenog uzorka pasti na 100 Bq, ako je početna aktivnost bila 3000 Bq? Koliko je ukupno bilo radioaktivnih atoma u uzorku?*

Rješenje. Za aktivnost vrijedi isti izraz kao za broj atoma,

$$A(t) = A_0 \cdot 2^{-t/T},$$

$$100 = 3000 \cdot 2^{-t/72.912},$$

$$\frac{-t}{72.912} = -4.90689,$$

$$t = 357.77 \text{ h} = 14.9 \text{ dana}.$$

Ukupan broj radioaktivnih atoma, N_0 odredimo iz

$$A_0 = \frac{N_0}{T} \ln 2,$$

uz $T = 72.912 \text{ h} = 262\,483.2 \text{ s}$.

$$N_0 = A_0 T / \ln 2 = 1.136 \cdot 10^9 \text{ atoma}.$$

Ur.

1845. *Plankonveksna leća ima 3 puta veću žarišnu daljinu u vodi* $(n = 1.33)$ *nego u zraku. Odredi jačinu leće, ako je radijus zakrivljenosti dioptra 5 cm (drugi dioptar je ravan).*

Rješenje. Žarišna daljina leće f indeksa loma n_l u sredstvu indeksa loma n_s je

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_l}{n_s} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

gdje su $R_1 = 0.05$ m i $R_2 \to \infty$ radijusi zakrivljenosti dioptra. Omjer žarišnih daljina je

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{1/f_1}{1/f_2} = \frac{(n_l - n_v)/n_v}{(n_l - n_z)/n_z},$$

gdje je $n_z = 1$ indeks loma zraka i $n_v = 1.33$ indeks loma vode. Odatle je

$$\frac{1}{3} = \frac{n_l - 1.33}{1.33(n_l - 1)},$$

$$1.67 n_l = 2.66,$$

$$n_l = 1.5928.$$

Jačina leće (u zraku) je

$$J = \frac{1}{f_2} = (n_l - 1)\frac{1}{0.05} = 0.5928 \cdot 20$$
$$= 11.856 \text{ dpt}.$$

Duje Dodig (3), Zagreb

1846. *Odredi gustoću planeta radijusa R ako satelit kruži na visini R iznad površine i ima ophodno vrijeme 6 sati.*

Rješenje. Prema trećem Keplerovom zakonu, radijus kruženja r satelita je

$$r^3 = T^2 \frac{GM}{4\pi^2},$$

gdje je M masa planeta. Uvrstimo $r = 2R$, $T = 21\,600$ s i $M = \rho V = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot R^3 \pi$:

$$8R^3 = (21\,600)^2 \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot R^3 \pi}{4\pi^2}.$$

Nakon skraćivanja dobijemo

$$8 = 4.6656 \cdot 10^8 \cdot 7.081334 \cdot 10^{-12} \rho,$$

$$\rho = \frac{8}{0.003304} = 2421 \text{ kg/m}^3.$$

Duje Dodig (3), Zagreb