65. Međunarodna matematička olimpijada 2024. g.

IMO2024
65th International Mathematical Olympiad

Međunarodna matematička olimpijada je ove godine održana u Ujedinjenom Kraljevstvu u Bathu od 11. do 22. srpnja. Našu ekipu su predstavljali: *Fabijan Cikač* (2. r.), *Adrian Grbac Lacković* (4. r.), *David Lang* (4. r.), *Emil Missoni* (2. r.), *Kristijan Šimović* (2. r.) i *Jurica Špoljar* (3. r.) svi iz XV. gimnazije u Zagrebu. Voditelj naše ekipe je bio *Ivan Novak*, a vođa puta *Lukas Novak*.

Članovi hrvatske ekipe i njihovi voditelji.

Dok je voditelj ekipe otputovao 11. srpnja, učenici su krenuli 14. srpnja u jutarnjim satima iz zračne luke Franjo Tuđman. Organizatori natjecanja su nas dočekali na Heathrowu u Londonu te nas uputili organiziranim autobusom za Bath. Nakon dva dana natjecanja imali smo puno prilika i slobodnog vremena za izlete i druženje s ostalim natjecateljima. Izbor izleta je bio dosta velik: štenja po Londonu, razgledavanje Stonehenga, Bletchley Parka ili Sveučilišta Oxford. Nažalost samo smo mogli odabrati dvije opcije od svih izleta. Naša ekipa se odlučila za Stonehenge i Betchley Park. Glavno mjesto za druženje s ostalim sudionicima natjecanja je bio tzv. "XTX Hub" kojeg su organizatori i sponzori izvrsno opremili za druženje u raznim društvenim igrama, video igrama te drugim raznoraznim aktivnostima poput kvizova, tečaja origamija, gledanja filmova i karaoka. Za ljubitelje sporta također je bila mogućnost korištenja sportske drvorane u sklopu kampusa gdje smo mogli igrati nogomet, košarku, badminton i stolni tenis, a također smo se mogli okušati u plivanju u (50 m dugačkom) olimpijskom bazenu.

Konačno je došao zadnji dan olimpijade kada su bili objavljeni rezultati i podjelile nagrade. Hrvatska ekipa je zauzela sveukupno 35. mjesto, između 108 država, a pojedinačno smo osvojili tri srebra (*Fabijan Cikač*, *David Lang* i *Kristijan Šimović*), dvije bronce (*Adrian Grbac Lacković* i *Jurica Špoljar*) te jednu pohvalu (*Emil Missoni*).

Veselimo se idućoj olimpijadi koja će se održati u dalekoj Australiji u Sunshine Coastu sredinom srpnja i nadamo se još boljim rezultatima.

Bodovi hrvatskih učenika na 65. IMO:

natjecatelj	P1	P2	P3	P4	P5	P6	ukupno	osvojeno
F. Cikač	7	2	0	7	7	0	23	srebrna
D. Lang	6	1	0	7	7	1	22	srebrna
K. Šimović	7	2	0	7	5	1	22	srebrna
A. Grbac Lacković	6	3	0	7	0	1	17	brončana
J. Špoljar	7	2	0	7	1	0	17	brončana
E. Missoni	7	1	0	7	0	0	15	pohvala
ekipni rezultat	**40**	**11**	**0**	**42**	**20**	**3**	**116**	

Zadatci

Prvi dan, utorak, 16. srpnja 2024.

Zadatak 1. Odredi sve realne brojeve α takve da za svaki prirodan broj n vrijedi da je cijeli broj

$$\lfloor\alpha\rfloor + \lfloor 2\alpha\rfloor + \ldots + \lfloor n\alpha\rfloor$$

višekratnik broja n. (Sa $\lfloor z\rfloor$ označavamo najveći cijeli broj koji nije veći od z. Na primjer, $\lfloor -\pi\rfloor = -4$ i $\lfloor 2\rfloor = \lfloor 2.9\rfloor = 2$.)

Zadatak 2. Odredi sve parove (a, b) prirodnih brojeva za koje postoje prirodni brojevi g i N takvi da vrijedi

$$\gcd(a^n + b, b^n + a) = g$$

za sve cijele brojeve $n \geq N$. (Sa $\gcd(x, y)$ označavamo najveći zajednički djelitelj cijelih brojeva x i y.)

Zadatak 3. Neka je $a_1, a_2, a_3, \ldots$ beskonačan niz prirodnih brojeva, i neka je N prirodan broj. Pretpostavimo da za svaki $n > N$ vrijedi da se broj a_{n-1} pojavljuje točno a_n puta na listi $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Dokaži da barem jedan od nizova $a_1, a_3, a_5, \ldots$ i $a_2, a_4, a_6, \ldots$ postaje periodičan.

(Za beskonačan niz $b_1, b_2, b_3, \ldots$ kažemo da *postaje periodičan* ako postoje prirodni brojevi p i M takvi da je $b_{m+p} = b_m$ za sve $m \geq M$.)

Drugi dan, srijeda, 17. srpnja 2024.

Zadatak 4. Neka je ABC trokut u kojem vrijedi $|AB| < |AC| < |BC|$. Označimo središte upisane kružnice i upisanu kružnicu od ABC redom s I i ω. Neka je X točka na pravcu BC različita od C takva da je pravac kroz X paralelan s AC tangenta na ω. Slično, neka je Y točka na pravcu BC različita od B takva da je pravac kroz Y paralelan s AB tangenta na ω. Pravac AI siječe opisanu kružnicu od ABC u točki $P \neq A$. Neka su K i L redom polovišta dužina $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$. Dokaži da vrijedi $\sphericalangle KIL + \sphericalangle YPX = 180°$.

Zadatak 5. Puž Turbo igra igru na ploči s 2024 redaka i 2023 stupca. U 2022 polja ploče nalazi se čudovište. Na početku, Turbo ne zna gdje su čudovišta, ali zna da postoji točno jedno čudovište u svakom retku osim prvog i zadnjeg te da svaki stupac sadrži najviše jedno čudovište.

Turbo zatim čini niz pokušaja da dođe iz prvog retka u posljednji redak. U svakom a zatim se redom pomiče u bilo koje susjedno polje koje ima zajedničku stranicu s poljem na kojem se trenutno nalazi. (Dozvoljeno je da se vrati u polje koje je već ranije posjetio.) Ako dođe u polje u kojem se nalazi čudovište, njegov pokušaj završava i vraća se u prvi redak da započne novi pokušaj. Čudovišta se ne miču i Turbo za svako polje koje je posjetio pamti sadrži li čudvište ili ne. Ako Turbo dođe u bilo koje polje u zadnjem retku, igra je gotova.

Odredi najmanju vrijednost broja n za koju Turbo ima strategiju koja garantira da će u n ili manje pokušaja doći do zadnjeg retka, bez obzira kako su čudovišta raspoređena.

Zadatak 6. Neka je $\mathbb{Q}$ skup svih racionalnih brojeva. Funkcija $f : Q \to Q$ je *dobra* ako vrijedi sljedeće: za sve $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$f(x+f(y)) = f(x)+y, \qquad \text{ili} \qquad f(f(x)+y = x+f(y).$$

Dokaži da postoji cijeli broj c takav da za svaku dobru funkciju f postoji najviše c različitih racionalnih brojeva koji se mogu zapisati kao $f(r)+f(-r)$ za neki racionalan broj r, i odredi najmnaju moguću vrijednost od c.

Vrijeme rješavanja svakog dana: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Na izletu.

Lukas Novak

Rang-lista

	nagrade				broj
	I	II	III	poh.	bod.
SAD	5	1			192
Kina	5	1			190
Republika Koreja	2	4			168
Indija	4	1		1	167
Bjelorusija	4		2		165
Singapur	1	5			162
Ujedinjeno Kraljevstvo	2	3	1		162
Mađarska	2	3	1		155
Poljska	1	4	1		151
Turska	2	2	2		151
Tajvan	2	2	2		149
Rumunjska	1	4	1		145
Bosna i Hercegovina	3	1	2		144
Italija	1	3	2		143
Japan	2	2	1	1	143
Izrael	2	2	2		142
Mongolija	1	2	3		142
Hong Kong		5	1		140
Iran	1	3	1	1	137
Brazil	1	3	2		134
Francuska	1	3	1	1	133
Srbija		4	1	1	132
Kanada		4	1	1	131
Meksiko	1	2	2	1	129
Austrija		5		1	127
Kazahstan		3	2	1	127
Bugarska		3	2	1	126
Grčka	1	2	3		126
Kirgistan	1	3		2	122
Peru		2	3	1	122
Njemačka		2	4		120
Novi Zeland		3	3		120
Malezija		2	4		118
Vijetnam		2	3	1	118
Hrvatska		3	2	1	116
Slovačka	1	1	3	1	116
Tajland		3	1	2	116
Armenija			5	1	113
Australija	1	1	2	2	113
Ukrajina		2	3	1	113
Indonezija	1		3	2	111
Saudijske Arabija		1	4	1	111
Uzbekistan		2	3		110
Nizozemska		1	4	1	109
Gruzija	1		3	1	108
Sjeverna Makedonija	1		3	2	107
Turkmenistan		2	2	2	107
Švicarska	1		1	4	106
Češka		2	2	2	103
Filipini		1	3	2	102
Švedska		1	3	2	102
Litva (5)	1		2	2	94
Južnoafrička Rebublika		1	2	1	93
Slovenija		1	1	3	92

	nagrade				broj
	I	II	III	poh.	bod.
Estonija		1	1	4	91
Argentina		1	3	1	90
Cipar		2	1	3	88
Danska			2	4	88
Kolumbija			2	4	87
Latvija			2	4	87
Alžir	1			4	86
Finska		1	1	3	85
Norveška			3	3	85
Moldavija (5)		1	2	2	84
Bangladeš			2	4	83
Kostarika			2	3	82
Belgija		1	2	1	80
Španjolska			2	3	80
Tađikistan			2	3	80
Portugal			1	4	71
Šri Lanka			2	4	71
Kuba				5	68
Irska				4	67
Tunis			1	3	67
Azerbajdžan			1	5	64
Pakistan		1	1	1	64
Sirija			1	4	64
Luksemburg			1	3	60
Makao				5	56
Albanija			1	3	51
Irak (5)			2	1	50
Kosovo				4	48
Urugvaj				3	48
Ekvador			1	2	46
Dominikanska Republika				3	39
Ruanda				4	39
Trinidad i Tobago (5)				2	37
Island				2	35
Mianmar				3	30
Nepal				2	28
Bolivija (4)			1	1	26
Uganda				1	22
Paragvaj (4)				1	20
Obala Bjelokosti					19
Portoriko (3)				1	18
Čile (2)				1	17
Salvador (3)				1	17
Nikaragva (1)			1		16
Bocvana				1	15
Lihtenštajn (1)				1	14
Venecuela (3)					14
Panama (1)				1	10
Butan (5)					8
Kenija (5)					7
Gana					4
Oman					4
Honduras (1)					1
UAE (4)					1

Broj u zagradi je broj natjecatelja kada je on manji od 6.