Srednjoeuropska matematička olimpijada, Szeged, Mađarska, 24. – 30. kolovoza 2024. g.

18TH MEMO
Szeged, 2024

Od 24. do 30. kolovoza održana je 18. Srednjoeuropska matematička olimpijada (MEMO) u Szegedu (Mađarska). Na ovom natjecanju sudjelovalo je 60 učenika iz 10 država Srednje Europe: Austrija, Češka, Hrvatska, Litva, Mađarska, Njemačka, Poljska, Slovačka, Slovenija i Švicarska. Prema pravilima, ekipe su zastupljene učenicima koji te godine ne idu na Međunarodnu matematičku olimpijadu i nisu maturanti. Hrvatska ekipa se kao i prošlih godina birala na Hrvatskoj matematičkoj olimpijadi. Ove godine članovi ekipe Republike Hrvatske bili su:

Emanuel Bajamić, III. gimnazija, Split,

Hrvoje Valent, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb,

Patrik Cvetek, Elektrotehnička škola, Split,

Lana Milani, Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka,

Fran Pilipović, XV. gimnazija, Zagreb,

Maša Dobrić, XV. gimnazija, Zagreb.

Emanuel, Lana i Patrik su u školskoj godini 2023./ 24. pohađali treći, Maša i Hrvoje drugi, a Fran prvi razred. Voditelji su bili Petar Orlić i Borna Šimić.

Pripreme za MEMO imali smo dva tjedna u Zagrebu, u organizaciji Hrvatskog matematičkog društva. Nakon priprema smo od voditelja dobili zadatke za ljeto, po područjima i težini. Zadnje pripreme smo imali tjedan prije samog natjecanja na kampu Udruge mladih nadarenih matematičara "Marin Getaldić" održanom u Kaštel-Štafiliću, u trajanju od tjedna dana.

Ekipa je putovala autobusom do Budimpešte i onda vlakom do Szegeda. Bilo je to vrlo dugo putovanje. U Szegedu smo bili smješteni u Art hotelu, nedaleko od fakulteta u kojem se održalo natjecanje.

Naši natjecatelji s medaljama i njihovi voditelji.

Na individualnom natjecanju Patrik je osvojio zlatnu (s maksimalnim brojem bodova), Emanuel, Fran i Hrvoje srebrnu, Lana brončanu medalju, dok je Maša dobila pohvalu. Bili smo uvjereni da smo dosta dobro pokriveni u svim područjima pa smo se i nadali timskoj medalji. Iako smo znali da su Poljaci individualno dobro napisali još uvijek smo se nadali barem bronci. Ipak, rezultat timskog je bio razočaravajuće slabiji od naših očekivanja. Na timskom dijelimo sedmo mjesto. Na pojedinačnom natjecanju smo bili drugi po broju bodova, odmah nakon Poljaka, koji su bili prvi i na timskom dijelu natjecanja.

Nakon dva dana natjecanja ugodno smo se proveli u društvu ostalih ekipa. U slobodno vrijeme igrali smo odbojku, išli na penjanje po zidu (wall climbing), išli u zoološki vrt, kao i obavezna cjelodnevna ekskurzija u Szarvas gdje smo posjetili takozvanu malu Mađarsku.

Zadatci

Na kraju navodimo i popis zadataka s natjecanja.

Pojedinačno natjecanje

1. Nađi sve $k \in \mathbb{N}_0$ za koje postoji funkcija $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ takva da je $f(2024) = k$ i vrijedi

$$f(f(n)) \leq f(n+1) - f(n)$$

za sve $n \in \mathbb{N}_0$.

Opaska. Ovdje s $\mathbb{N}_0$ označavamo skup nenegativnih cijelih brojeva.

2. Na beskonačnoj školskoj ploči nalazi se komad papira (poput ovoga). Matija tajno bira konveksni 2024-terokuta P koji se u potpunosti nalazi na papiru. Tea želi pronaći vrhove P. U svakom koraku, Tea može nacrtati pravac g na ploči koji se u potpunosti nalazi izvan papira, na što Matija odgovara s pravcem h paralelnim s g koji prolazi kroz barem jedan vrh P, a najbliži je pravcu g. Dokaži da postoji prirodan broj n takav da Tea može pronaći vrhove P u najviše n koraka.

3. Neka je ABC šiljatokutan raznostraničan trokut. Odaberimo kružnicu ω koja prolazi kroz B i C te ponovo siječe dužine $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ u točkama $D \neq A$ i $E \neq A$ redom. Neka je F sjecište BE i CD. Neka je G točka na opisanoj kružnici trokuta ABF takva da je GB tangenta na ω, te neka je H točka na opisanoj kružnici trokuta ACF takva da je HC tangenta na ω. Dokaži da postoji točka $T \neq A$, neovisna o odabiru ω, takva da je opisana kružnica trokuta AGH prolazi kroz T.

4. Za prirodan broj n, neka σ označava zbroj pozitivnih djelitelja n. Nađi sve polinome P s cjelobrojnim koeficijentima takve da $\sigma(k)$ dijeli $P(k)$ za sve prirodne brojeve k.

Ekipno natjecanje

1. Neka su $a_1, a_2, a_3, \ldots$ i $b_1, b_2, b_3, \ldots$ beskonačni nizovi realnih brojeva takvi da je $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ i

$$a_{k+1} = b_k, \qquad b_{k+1} = \frac{a_k b_k + a_k + 1}{b_k + 1}$$

za sve cijele brojeve $k \geq 0$. Dokaži da je $a_{2024} + b_{2024} \geq 88$.

2. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je

$$yf(x+1) = f(x + y - f(x)) + f(x)f(f(y))$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Pokraj rijeke Tise redom sjedi 2024 matematičara. Svaki od njih radi na točno određenoj temi, a ako dva matematičara rade na istoj temi, svi matematičari između njih također rade na istoj temi.

Ilko pokušava, za svaki par matematičara, odrediti rade li na istoj temi. Dozvoljeno mu je svakog matematičara pitati: "Koliko od ovih 2024 matematičara rade na istoj temi?" Pitanja postavlja jedno po jedno, te zna sve prethodne odgovore prije nego što postavi iduće pitanje.

Odredi najmanji prirodan broj k takav da Ilko uvijek može postići svoj cilj s najviše k pitanja.

4. Konačan niz $x_1, x_2, \ldots, x_r$ prirodnih brojeva je *palindrom* ako je $x_i = x_{r+1-i}$ za sve prirodnje brojeve $1 \leq i \leq r$.

Neka je $a_1, a_2, \ldots$ beskonačan niz prirodnih brojeva. Za prirodan broj $j \geq 2$, s $a[j]$ označavamo konačan podniz $a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}$. Pretpostavimo da postoji beskonačan strogo rastući niz $b_1, b_2, \ldots$ prirodnih brojeva takav da je za svaki prirodan broj n podniz $a[b_n]$ palindrom te vrijedi $b_{n+2} \leq b_{n+1} + b_n$. Dokaži da postoji prirodan broj T takav da je $a_i = a_{i+T}$ za sve prirodne brojeve i.

5. Neka je ABC trokut u kojem je $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. Neka je D točka na pravcu AC takva da je $|AB| = |AD|$ i da A leži između C i D. Pretpostavimo da postoje dvije točke $E \neq F$ na opisanoj kružnici trokuta DBC takve da je $|AE| = |AF| = |BC|$. Dokaži da pravac EF prolazi kroz središte opisane kružnice trokuta ABC.

6. Neka je ABC šiljastokutni trokut. Neka je M polovište dužine $\overline{BC}$, te neka su I, J, K središta upisanih kružnica trokuta ABC, ABM, ACM redom. Neka su P, Q točke na pravcima MK, MJ redom takve da su $\sphericalangle AJP = \sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle AKQ = \sphericalangle BCA$. Neka je R sjecište pravaca CP i BQ. Dokaži da su pravci IR i BC okomiti.

7. Definiramo *spajanje* prirodnih brojeva kao pisanje njihovih dekadskih zapisa jednog za drugim i shvaćanje rezultata kao dekadski zapis nekog prirodnog broja.

Nađi sve prirodne brojeve k za koje postoji prirodan broj N_k sa sljedećim svojstvom: za sve $n \geq N_k$ možemo spojiti brojeve $1, 2, \ldots, n$ u nekom poretku tako da dobijemo broj djeljiv s k.

Opaska. Dekadski zapis prirodnog broja nikad ne počinje s nulom.

Primjer. Spajanjem 15, 14, 7 u tom poretku dobivamo 15147.

8. Neka je k prirodan broj te $a_1, a_2, \ldots$ beskonačan niz prirodnih brojeva takav da

$$a_i a_{i+1} \mid k - a_i^2$$

za sve prirodne brojeve i. Dokaži da postoji prirodan broj M takav da je $a_n = a_{n+1}$ za sve prirodne brojeve $n \geq M$.

Više informacija o MEMO-u 2024. možete naći na `https://memo2024.bolyai.hu`

Patrik Cvetek