Rješenje nagradnog natječaja br. 247

Dokaži da je trokut ABC jednakokračan ako i samo ako je

$$a(a^2-b^2)\sin\beta + b(b^2-c^2)\sin\gamma + c(c^2-a^2)\sin\alpha = 0.$$

Prvo rješenje. Koristeći poučak o sinusima $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ dani uvjet je ekvivalentan s

$$ab(a^2-b^2) + bc(b^2-c^2) + ca(c^2-a^2) = 0,$$

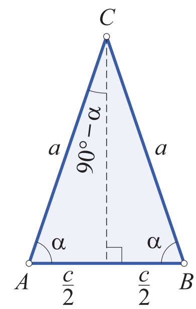
ili $(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a) = 0$, odakle slijedi tvrdnja.

Ur.

Drugo rješenje.

$\Longrightarrow$ Neka je $a=b$, $\alpha=\beta$. Dana jednakost je ekvivalentna sa

$$\begin{aligned} a(a^2-c^2)\sin 2\alpha + c(c^2-a^2)\sin\alpha = 0 \ / &\ : \sin\alpha \\ \Longrightarrow\ 2a(a^2-c^2)\cos\alpha + c(c^2-a^2) &= 0 \\ \Longrightarrow\ 2a(a^2-c^2)\cdot\frac{c}{2a} + c(c^2-a^2) &= 0 \\ \Longrightarrow\ a^2-c^3+c^3-a^2c &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$



$\Longleftarrow$

$$\begin{aligned} a(a^2-b^2)\sin\beta + b(b^2-c^2)\sin\gamma + c(c^2-a^2)\sin\alpha &= 0 \ / \ : \sin\alpha \\ a(a^2-b^2)\cdot\frac{b}{a} + b(b^2-c^2)\cdot\frac{c}{a} + c(c^2-a^2) &= 0 \ / \ \cdot a \\ a^3b - ab^3 + cb^3 - bc^3 + ac^3 - ca^3 &= 0 \\ ab(a^2-b^2) + c^3(a-b) - c(a^3-b^3) &= 0 \\ (a-b)[ab(a+b) + c^3 - c(a^2+ab+b^2)] &= 0 \\ (a-b)[a^2(b-c) + ab(b-c) + c(c^2-b^2)] &= 0 \\ (a-b)(b-c)[a^2+ab-c(b+c)] &= 0 \\ (a-b)(b-c)(a-c)(\underbrace{a+b+c}_{>0}) &= 0 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $a=b$ ili $b=c$ ili $a=c$, pa je i drugi smjer tvrdnje dokazan.

Duje Dodig (3), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

Knjigom Brian Cox, Jeff Forshow, *Zašto je $E=mc^2$?*, Stilus knjiga, Zagreb, 2024., nagrađen je učenik *Duje Dodig* (3), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb.

Riješili zadatke iz br. 4/296

a) Iz matematike: *Duje Dodig* (3), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, 3973–3981, 3983–3986; *Franka Horvat* (1), X. gimnazija "Ivan Supek", Zagreb, 3977.

b) Iz fizike: *Leon Hudoletnjak* (8), OŠ Mate Lovraka, Zagreb, 534–536; *Ema Stanešić* (8), OŠ Mate Lovraka, Zagreb, 534–536; *Nika Valešić* (8), OŠ Mate Lovraka, Zagreb, 534–536; *Duje Dodig* (3), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, 1840, 1842, 1845, 1846; *Franka Horvat* (1), X. gimnazija "Ivan Supek", Zagreb, 1840, 1844.

Nagradni natječaj br. 249

Koji je od brojeva $\dfrac{24^{2023}+1}{24^{2024}+1}$ i $\dfrac{24^{2024}+1}{24^{2025}+1}$ veći?

SVIM SURADNICIMA

U Matematičko-fizičkom listu objavljuju se članci iz matematike, fizike i informatike, s malim prilogom iz astronomije, zadatci i rješenja, prikazi natjecanja i ljetnih škola iz matematike i fizike, zanimljivosti u obliku članaka i zadataka od učenika, profesora i ostalih matematičara i fizičara, novosti iz znanosti, prilozi o državnoj maturi i nagradni natječaj.

Prilozi trebaju biti napisani računalom (Word, Tex, Latex) ili pisaćim strojem.

Slike trebaju biti jasno nacrtane na posebnom papiru i pogodne za presnimavanje ili pošaljite slike crtane računalom (eps, jpg, png i sl.).

Članci neka ne budu dulji od osam stranica, a ako je to potrebno neka budu napisani u nastavcima.

Pozivaju se učenici da pošalju članak o nekoj zanimljivoj temi, originalne zadatke s rješenjima ili prikaze nekih manifestacija (ljetne škole, susreti učenika, rad školske grupe).

Kako se rukopisi ne vraćaju, sačuvajte original, a pošaljite kopiju na papiru formata A-4.

Svi rukopisi podliježu recenziji redakcije ili neke stručne osobe za određeno područje.

Prilozi se šalju na adresu ovog časopisa koja je na početku lista.

RJEŠAVATELJIMA ZADATAKA

Svako rješenje neka bude napisano na **posebnom** papiru i to samo na **jednoj** strani papira. Uz svako rješenje na vrhu papira treba potpuno ispisati tekst zadatka. Svako rješenje treba čitljivo potpisati (ime i prezime), naznačiti razred, školu i mjesto. **Rješenja se mogu slati i e-poštom na adresu glavnog urednika:** `zeljko.hanjs@math.hr`

Matematičko-fizički list na Facebooku

Možete pronaći MFL i na Facebooku na stranici

`https://www.facebook.com/MatFizL`

Uz razno-razne podatke o MFL-u moći ćete naći i nove zadatke za rješavanje.