

## **Goran Rujević**

Univerzitet u Novom Sadu, Filozofski fakultet, Dr Zorana Đinđića 2, RS–21000 Novi Sad  
goran.rujevic@ff.uns.ac.rs

# **Negativni brojevi i Kantovo prekriticno razumijevanje matematike**

### **Sažetak**

*U ranijoj povijesti matematike moguće pronaći barem tri načina tumačenja negativnih brojeva: (1) odbijajući, u kojem se negativni brojevi smatraju indikatorima greške u zaključivanju; (2) računski, u kojem se negativni brojevi prihvaćaju samo kao apstraktni računski alati; i (3) fizikalistički, u kojem se negativni brojevi povezuju s konkretnim realnim interpretacijama kao što su suprotstavljene sile. Uspoređivanjem ovih načina tumačenja s idejama koje je Immanuel Kant (1724. – 1804.) iznio u svojem prekriticnom tekstu Pokušaj da se u svjetsku mudrost uvede pojam negativnih veličina (1763.), zaključujemo da je on posve zastupao fizikalističko tumačenje negativnih brojeva. Na temelju ovog uvida možemo pouzdano zaključiti da je Kant u svojem prekriticnom razdoblju baštiniio ne samo newtonovsko viđenje prirodnog svijeta nego i newtonovsko shvaćanje matematike.*

### **Ključne riječi**

Immanuel Kant, fizikalizam, negativni brojevi, realizam, suprotstavljenost, veličine

## **1. Uvod**

O matematičkim se idejama königsberškog filozofa Immanuela Kanta (1724. – 1804.) često govori u kontekstu njegova seminalnog djela *Kritika čistoga uma*. Učenje o transcendentalnoj estetici objašnjava mogućnost sintetičkih apriornih sudova čiste matematike pomoću čistih zorova prostora i vremena. No, i prije nego što je ova knjiga objavljena 1781. godine, Kant je svoju pažnju usmjeravao na matematičke teme. Njegov prekriticni period, za koji se obično smatra da završava s 1770. godinom, tj. s objavljivanjem *Inauguralne disertacije*, najviše je poznat po prirodnjačkim spisima, dok se matematička pitanja tu redovno pojavljuju – katkada u kontekstu filozofije prirode, a katkada i kao konkretan predmet refleksije. Jedan od kraćih prekriticnih tekstova, koji je direktno posvećen matematici, nosi naslov *Pokušaj da se u svjetsku mudrost uvede pojam negativnih veličina* (u nastavku teksta ovaj naslov navodimo kao *Negativne veličine*) iz 1763. godine. Komparativno gledano, povjesničari filozofije posvećivali su manje pažnje ovom tekstu, ponajviše zato što ideje koje se u njemu zatiču nisu posebno inovativne za ono vrijeme. Međutim, veoma je zanimljivo kako se Kant, razmatrajući mogućnosti upotrebe negativnih veličina u filozofiji, nimalo nenamjerno uključio u stoljetnu raspravu o tome što točno, ako išta, predstavljaju negativni brojevi.

U autobiografskom romanu *Život Henryja Brularda*, Marie-Henri Beyle Stendhal kritizira svoje učitelje Dupuyja i Chaberta, kao i njihov rigidan pristup podučavanju koji je usmjeren na pamćenje sadržaja s vrlo ograničenim pokušajima da se isti usvoji s razumijevanjem. On pritom kao primjer navodi njihovu nemogućnost da mu objasne kako to da u aritmetici operacija množenja dvaju negativnih brojeva daje pozitivan rezultat. Chabretov poku-

šaj da negativne brojeve dočara preko ideje dugovanja Stendhal domišljato, i uz zdravu dozu humora, problematizira pitajući se znači li to da množenjem duga od 10 000 franaka i duga od 500 franaka možemo doći do bogatstva od pet milijuna franaka?<sup>1</sup> Stendhalovo iskustvo ovdje, zasigurno, nije usamljeno i brojne su se glave redovno pitale što to točno negativni brojevi predstavljaju. Relativno je lako vizualizirati broj 5 – npr. s pomoću pet jabuka, ali kako to izgleda -5 jabuka? Predstavljanje negativnih brojeva nije problem suvremene matematike. Skup negativnih brojeva  $Z^-$  smatra se podskupom skupa cijelih brojeva  $Z$ , pa je sasvim moguće ispostaviti njihovu formalnu konstrukciju kao klase ekvivalencije uređenih parova prirodnih brojeva.<sup>2</sup>

Pronalaženje modela interpretacije za ove konstrukcije može imati neposredne koristi za matematičku pedagogiju, s obzirom na to da se često javlja problem da mladi učenici nailaze na različite kognitivne prepreke prilikom učenja negativnih brojeva.<sup>3</sup> Formalna se izvođenja uglavnom upotrebljavaju na visokoškolskoj razini, premda postoje pokušaji da se rigorozni formalni pristupi adaptiraju i za školske učionice.<sup>4</sup> U ovom su pravcu provedena i brojna empirijska pedagoška istraživanja, a pogotovo su zanimljivi rezultati Laure Bofferding, koji pokazuju da je iskustvo važniji faktor u razumijevanju negativnih brojeva nego uzrast i razvojna razina, barem kada je riječ o matematici u osnovnoj školi.<sup>5</sup> U učionicama se zato često koriste pristupačni modeli za apstraktne matematičke strukture, dok se za dočaravanje negativnih brojeva najčešće upotrebljava brojevni pravac. Više stručnjaka koji se bave matematičkom pedagogijom smatraju da je jedan od boljih modela za dočaravanje negativnih brojeva upravo model veličina suprotnih smjerova,<sup>6</sup> kao npr. kretanje kornjače lijevo/desno po brojevnom pravcu, uspinjanje/silaženje po katovima zgrade, zbrajanje veselih/tužnih misli i sl. Athanasios Gagatsis i Maria Alexandrou zalažu se za model tumačenja negativnih brojeva pomoću predstavljanja pozitivnih i negativnih naboja jer se pokazuje da školska upotreba ovog modela dovodi do boljih rezultata u odnošenju učenika s negativnim brojevima.<sup>7</sup>

Povijest matematike ili, nešto šire uzeto, povijest ideja još su jedno područje u kojem su iskustveni modeli matematičkih struktura relevantna tema. Naime, način na koji jedan mislilac odabire relevantne modele za apstraktne entitete može dosta reći o epistemološkim ili metafizičkim pretpostavkama s kojima raspolaže taj autor. U kontekstu matematike, to može pomoći pri rekonstrukciji stavova pojedinih mislilaca o tome koje je porijeklo matematičkih istina, i u tom je pogledu relevantno zapamtiti da je rana matematika često povezivana s konkretnim iskustvom. Morris Kline tako konstatira da su matematički pojmovi sve do 16. stoljeća shvaćani ili kao neposredne idealizacije iskustva ili kao apstrakcije iz njega.<sup>8</sup> Čak i nešto kasnije, u doba novovjekovlja i prosvjetiteljstva, bilo je pokušaja da se matematika utemelji na apstrakciji iskustva.<sup>9</sup> S druge strane, vrijedi ponoviti da suvremena matematika jasno odstupa od takvih ideja, što koncizno demonstrira Gottlob Frege kada znamenito kritizira iskustvene pristupe psihologizaciji matematike nazivajući ih »aritmetikom paprenjaka i oblutaka«.<sup>10</sup>

Vodeći se ovom idejom, na narednim stranicama pokušat ćemo kontekstualizirati kako se Kantov pokušaj interpretacije negativnih brojeva u *Negativnim veličinama* odmjerava spram onodobnih, aktualnih modela koji su se koristili za interpretiranje negativnih brojeva. U tu svrhu, prvo ćemo načiniti kratak pregled istaknutih povijesnih primjera interpretacije negativnih brojeva i potom predložiti jedan način klasifikacije ovih modela. Nakon toga, raz-

motrit ćemo kako se Kantovo razumijevanje *negativnih veličina* uklapa u taj predloženi okvir, te kakve šire implikacije o Kantovoj pretkritičkoj filozofiji možemo iščitati iz toga. Očekujemo da će rezultati ove komparativne analize pokazati da su temeljne pretpostavke u *Negativnim veličinama* podudarne s pretpostavkama na kojima je Kant izgradio svoju pretkritičku prirodnjačku filozofiju.

## 2. Tumačenja negativnih brojeva

Prva sustavna upotreba negativnih brojeva javlja se u kineskom priručniku *Devet poglavlja o matematičkoj vještini*, koji je sastavljan u dugom periodu od 11. stoljeća prije nove ere pa sve do prvih godina nove ere.<sup>11</sup> Ovaj je priručnik obuhvaćao procedure rješavanja brojnih praktičnih problema, među kojima su bili i računovodstveni postupci izvođeni uz pomoć štapića za brojanje. Prihodi i rashodi prikazani su crvenim i crnim štapićima, a međusobno su se zbrajali u konačnom obračunu. Ovdje jasno vidimo da imamo posla s negativnim brojevima koji su modelirani preko trgovačkog gubitka ili rashoda, što je sasvim blisko jednoj i dan-danas često korištenoj interpretaciji

1

Stendal [Marie-Henri Beyle Stendhal], *Život Anrija Brilara*, prev. Milica Carcaračević, Novo pokolenje, Beograd 1953., str. 271.

2

Cecilia Kilhamn, *Making Sense of Negative Numbers* (doktorska disertacija), Faculty of Education, University of Gothenburg, Gothenburg 2011., str. 34.

3

Jessica Pierson Bishop *et al.*, »Obstacles and Affordances for Integer Reasoning: An Analysis of Children's Thinking and the History of Mathematics«, *Journal for Research in Mathematics Education* 45 (2014) 1, str. 19–61, ovdje str. 44–45, doi: <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.45.1.0019>.

4

Abraham Arcavi, Maxim Bruckheimer, »How Shall We Teach the Multiplication of Negative Numbers?«, *Mathematics in School* 10 (1981) 5, str. 31–34, ovdje str. 33.

5

Laura Bofferding, »Negative Integer Understanding: Characterizing First Graders' Mental Models«, *Journal for Research in Mathematics Education* 45 (2014) 2, str. 194–245, ovdje str. 196, doi: <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.45.2.0194>.

6

Npr. Ian Whitacre *et al.*, »Happy and Sad Thoughts: An Exploration of Children's Integer Reasoning«, *Journal of Mathematical Behavior* 31 (2012) 3, str. 356–365, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.03.001>; te već spomenuta L. Bofferding, »Negative

Integer Understanding: Characterizing First Graders' Mental Models«.

7

Athanasios Gagatsis, Maria Alexandrou, »A review of the research in teaching and learning the negative numbers: an 'action research' concerning the application of the geometrical model of the number line«, *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula* 11 (2022), str. 9–32, doi: <http://dx.doi.org/10.33683/ddm.22.11.1>.

8

Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, sv. 2, Oxford University Press, Oxford 1972., str. 392.

9

Goran Rujević, »Logički elementi empirijske matematike Džona Stjuarta Mila«, *Arhe* 10 (2013) 19, str. 113–124, ovdje str. 118.

10

Gottlob Frege, *Osnove aritmetike i drugi spisi*, prev. Filip Grgić, Maja Hudoletnjak Grgić, KruZak, Zagreb 1995., str. 18.

11

David Mumford, »What's so Baffling About Negative Numbers? A Cross-Cultural Comparison«, u: Conjeevaram Srirangachari Seshadri (ur.) *Studies in the History of Indian Mathematics*, Hindustan Book Agency, Gurgaon 2010., str. 120.

negativnih brojeva: interpretaciji po obrascu dugovanja.<sup>12</sup> Vrijedi napomenuti da se u ovom priručniku iznose samo tehnike za zbrajanje i oduzimanje negativnih brojeva, ali ne i za druge aritmetičke operacije.<sup>13</sup> Povjesničar matematike Carl Boyer naglašava da stari kineski matematičari i dalje nisu prihvaćali da negativni brojevi budu posljednja rješenja matematičkih problema,<sup>14</sup> što implicira da su negativni brojevi prije smatrani kao korisni alati nego kao samostalni i realni entiteti.

Među zapadnim matematičarima dugo nije bilo nikakvog govora o negativnim brojevima. Knjige Euklidovih *Elemenata* u kojima se razvija aritmetika ne spominje negativne brojeve. Prvu referencu među antičkim matematičarima zatičemo kod Diofanta iz Aleksandrije, u spisu *Aritmetika* iz 3. stoljeća nove ere. Diofant u petoj knjizi ovoga teksta navodi da je jednačba  $4x + 20 = 4$  apsurdna, jer na mjestu broja 4 mora stajati neki broj veći od 20.<sup>15</sup> Evidentno, Diofant se ovdje poziva na ideju da zbir dvaju brojeva mora biti veći od svakog od tih brojeva, samim time diskvalificira mogućnost da rješenje jednačbe bude -4. Taj osjećaj da je pojava negativnih brojeva kao rezultat matematičkih procesa pokazatelj pogreške u izračunu ili besmislene operacije ugrađen je u tradiciju europske matematičke misli i često će se pojavljivati kasnije.

U Indiji nailazimo na već spomenutu ideju da se negativni brojevi mogu koristiti za predstavljanje dugovanja,<sup>16</sup> ali osim toga, negativni brojevi sada imaju svoju upotrebu i u astronomiji, npr. pri izračunavanju nebeskih pozicija (umjesto opisnih geografskih termina sever/jug ili lijevo/desno).<sup>17</sup> Kod matematičara Bramagupte (7. stoljeće nove ere) pronalaze se prva sustavna pravila za rad s negativnim brojevima koja su ekstenzivnija i integralnija od prethodno spominjanih kineskih, jer uključuju pravila za množenje i dijeljenje.<sup>18</sup> S druge strane, arapski matematičari, kao što je npr. bio znameniti Al-Hvarizmi, iako su poznavali postignuća svojih indijskih kolega, načelno su odbijali upotrebu negativnih brojeva ili su ih naprosto ignorirali.<sup>19</sup>

Nakon srednjeg vijeka, u Europi su prevladavale tendencije da se negativni brojevi praktično upotrebljavaju tijekom računanja, ali da se ne prihvaćaju kao smisleni konačni rezultati. U 15. i 16. stoljeću, Nicolas Chuquet i Michael Stifel negativne brojeve nazivaju *apsurdnim*,<sup>20</sup> a Girolamo Cardano *fiktivnim*.<sup>21</sup> Descartes je u *Geometriji* konstatirao da se pri rješavanju polinomskih jednačbi »često dešava da neki od korijena budu lažni ili manji od nule«<sup>22</sup> i već je na sljedećoj stranici ponudio uputstvo kako pretvoriti te lažne korijene u istinite (a i obratno). Gottfried Wilhelm Leibniz<sup>23</sup> pridružio se razmatranju ovog pitanja tako što je pokušao odgovoriti na argument koji se pripisuje Antoineu Arnauld, a koji glasi da prihvaćanje negativnih brojeva dovodi do važnja jednačbe  $1/-1 = -1/1$ , a što je, navodno, paradoks jer se time tvrdi da je odnos većeg broja prema manjem isti kao odnos manjeg prema većem. Leibniz u tom kontekstu zauzima zanimljiv operacionalistički stav, s obzirom na to da tvrdi da čitav problem nestaje ako cjelokupan odnos promatramo kroz prizmu simboličkog računa, tj. kada proporciju tretiramo kao prostu operaciju dijeljenja, a u kojem su slučaju oba rezultirajuća količnika ista.<sup>24</sup>

Sredinom 17. stoljeća, u svojoj knjizi *Rasprava o algebri*, engleski matematičar John Wallis načinio je značajan pomak u predstavljanju negativnih brojeva. Iako Wallis tvrdi da je realno nemoguće da neka količina bude negativna »jer nije moguće da ijedna veličina bude manja od ništa niti da ijedan broj bude manji ni ničeg«,<sup>25</sup> on također smatra da ovakve ideje mogu biti sasvim korisne ako se ispravno razumiju. U fizičkom smislu, negativne su količine

identične pozitivnim samo su usmjerene u suprotnom smjeru, kao u slučaju kada se čovjek pomakne unaprijed 5 koraka pa unazad 8 koraka, te ukupno kretanje bude -3 koraka unaprijed. Apsolutna vrijednost kretanja u tom slučaju nije manja od nule, ali je vrijednost *kretanja unaprijed* manja od nule, jer je riječ o *kretanju unazad*. Kroz prostu skicu koja prati ovaj primjer, Wallis je konstruirao prvi dijagram brojevnog pravca u povijesti matematike te ujedno dao i fizičku i apstraktnu interpretaciju negativnih brojeva.

Sličnu fizičku interpretaciju negativnih brojeva ponudit će Isaac Newton početkom 18. stoljeća, kada u *Univerzalnoj aritmetici* konstatira da pored afirmativnih količina koje su veće od praznog ništa postoje i negativne količine koje su manje od praznog ništa. Za oba matematička koncepta odmah nudi interpretacije u okviru ljudskog iskustva, neke koje su već poznate i neke koje su sasvim nove:

»Posjedi ili zalihe mogu se nazivati *afirmativnim* dobrima, a dugovanja *negativnim*. Tako i u prostornom kretanju, progresija se može nazvati afirmativnim kretanjem, a regresija negativnim kretanjem zato što prva uvećava, a druga umanjuje prijedeni put. Na isti način u geometriji, ako se linija povučena na određeni način smatra afirmativnom, onda se linija povučena u suprotnom pravcu može smatrati negativnom.«<sup>26</sup>

Ovdje je važno naglasiti da kod Newtona ovo nisu samo usputne ilustracije za formalne koncepte afirmativnog i negativnog, već osnove iz kojih su ti pojmovi idealizirani. Kada Newton govori o matematičkim principima prirode

12

Petar Bojanić, Sanja Todorović, »Realism's Understanding of Negative Numbers«, *Filozofija i društvo* 27 (2016) 1, str. 131–136, ovdje str. 131, doi: <https://doi.org/10.2298/FID1601131B>.

13

Frank Swetz, »The Evolution of Mathematics in Ancient China«, *Mathematics Magazine* 52 (1979) 1, str. 10–19, ovdje str. 14, doi: <https://doi.org/10.2307/2689967>.

14

Carl Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York 1968., str. 223.

15

Diophantus, »The Arithmetica«, u: Thomas Heath, *Diophantus of Alexandria. A Study in the History of Greek Algebra*, Cambridge University Press, Cambridge 1910., str. 129–266, ovdje str. 200.

16

Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, sv. 1, Oxford University Press, Oxford 1972., str. 185.

17

D. Mumford, »What's so Baffling About Negative Numbers? A Cross-Cultural Comparison«, str. 124–125.

18

C. Boyer, *A History of Mathematics*, str. 242.

19

Ibid., str. 252 i 256; M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, str. 192.

20

Ibid., str. 252.

21

D. Mumford, »What's so Baffling About Negative Numbers? A Cross-Cultural Comparison«, str. 132.

22

Rene Dekart, *Geometrija*, prev. Milan D. Tasić, Dereta, Beograd 2017., str. 80.

23

Gottfried Wilhelm Leibniz, »Observatio, quod rationes sive proportiones non habeant locum circa quantitates nihilo minores, & de vero sensu methodi infinitesimalis«, *Acta Eruditorum* (1712), str. 167–169.

24

Albrecht Heeffer, »The Emergence of Symbolic Algebra as a Shift in Predominant Models«, *Foundations of Science* 13 (2008) 2, str. 149–161, ovdje str. 155, doi: <https://doi.org/10.1007/s10699-008-9124-0>.

25

John Wallis, *A Treatise of Algebra*, Richard Davis, London 1685., str. 264.

26

Isaac Newton, *Universal Arithmetick*, Printed for W. Johnston, London 1769., str. 8–9.

u okviru svoje eksperimentalne filozofije, on ne misli na izolirane platoničke oblike koji se »spuštaju« u stvarnost iz nekog drugog svijeta ili naše uobrazilje, nego na opće zakonitosti koje su nam dostupne uslijed iskustva kretanja.<sup>27</sup>

Druga je polovina 18. stoljeća vrijeme šireg prihvaćanja negativnih brojeva, u čemu se ističu dvije figure, matematičari Jean le Rond d'Alembert i Leonhard Euler. D'Alembertov stav o negativnim brojevima veoma je sličan Wallisovu, a zatičemo ga u 11. tomu *Enciklopedije* iz 1765. godine, u odjeljku o »Negativnom«. Ovdje D'Alembert iznosi kritiku da je uobičajeno razumijevanje negativnih brojeva kao nečega što je manje od ničeg<sup>28</sup> izvor velikih problema, upravo zato što je takav koncept nepojmljiv.<sup>29</sup> Dapače, negativne brojeve treba uvijek shvatiti u relativnom smislu: kao suprotne radnje ili kao suprotnost pozitivnim brojevima, jer gdje prestaju pozitivni, počinju negativni (jasna aluzija na prikaz brojevnog pravca). Negativni brojevi za D'Alemberta ne postoje sami po sebi, već samo kroz naznaku da je u nečemu neophodno mijenjanje perspektive: nemoguće je nekome dati -3 kruna, ali je sasvim moguće nekome oduzeti 3 kruna, i to je ono što taj negativni broj stvarno predstavlja.<sup>30</sup>

Euler, s druge strane, smatra da je ispravno reći da su negativni brojevi manji od ničeg i da se takva možda neobična situacija najbolje može razumjeti kroz ideju dugovanja. U *Potpunom uvodu u algebru* iz 1768. godine, Euler to ilustrira situacijom u kojoj osoba koja duguje 50 rubalja i potom dobije poklon u istom iznosu u cilju vraćanja toga duga, nakon svega toga opet ne posjeduje ništa, ali i dalje ima više nego što je imala prije toga.<sup>31</sup> Ovaj Eulerov vrlo plastičan primjer eksplicitno afirmira da rasuđivanje o negativnim brojevima katkada može izgledati neobično, ali da time nije ništa manje ispravno.

Sve češći konkretni modeli za negativne brojeve ne znače, međutim, da je nakon 18. stoljeća njihovo prihvaćanje postalo bezrezervno. Augustus De Morgan u priručniku *O izučavanju i poteškoćama matematike* izražava pomalo diofantsko stajalište da je situacija u kojoj se veći broj oduzima od manjeg pokazatelj pogreške u postavljanju zadatka.<sup>32</sup> Nešto kasnije, pišući enciklopedijski članak o negativnim brojevima 1840. godine, izjavljuje:

»Ove tvorevine algebre zadržale su svoje postojanje usprkos očiglednom nedostatku racionalnih objašnjenja u svakom pokušaju njihove teorije.«<sup>33</sup>

Ipak, vrijedi napomenuti da je De Morgan smatrao da je za algebru i njezinu upotrebljivost daleko značajnija pažljiva upotreba pravila nego oslanjanje na nejasne teorije.<sup>34</sup> U to vrijeme, pitanje o tome što predstavljaju negativni brojevi polako biva napuštan u matematičkim krugovima, a formiranje novije filozofije matematike s kraja 19. stoljeća sada u fokus dovodi doslovno fundamentalna pitanja o tome što su opći temelji matematičkog znanja.

U ovom kratkom pregledu različitih načina tretiranja negativnih brojeva možemo prepoznati tri tipa teorijskih stavova. Prvi je *odbijajući tip*, u koji spadaju sva shvaćanja za koja su negativni brojevi besmislene tvorevine, apsurdnosti ili greške; u bi ovu grupu spadali Diofant, Al-Hvarizmi, Chuquet, Stifel, Arnauld i De Morgan (u izvjesnoj mjeri). Drugi tip stavova možemo nazvati *računskim*, jer se negativni brojevi prihvaćaju ili barem toleriraju u kontekstu praktične upotrebljivosti u računu. U ovu grupu možemo svrstati stare kineske matematičare, Bramaguptu, Leibniza, Eulera, a donekle možda i De Morgana – uglavnom one koji su kao model tumačenja negativnih brojeva koristili dugovanja. Model duga, naime, sa sobom nosi jasnu upotrebnu vrijednost koja nam je poznata iz knjigovodstvene prakse, a opet nije opterećena metafizikom odsustva. Najzad, treći tip stavova možemo nazvati *fizikalistič-*

*kim* jer pored upotrebne vrijednosti negativnih brojeva uključuju i njihovu interpretaciju koja je na neki način povezana s fizičkim svijetom. Tu svrstavamo stavove Wallisa, Newtona i D'Alemberta. Alternativni bi nazivi za ovaj treći tip mogli biti *realistički* ili *relativistički*.

Vrlo je zanimljivo primijetiti da su spomenuta razmišljanja o negativnim brojevima vrlo kratka, ponekad na razini jedne rečenice ili kratkog odlomka. Daleko najrječitiji su fizičari, no ni njihovi komentari ne zauzimaju više od nekoliko stranica teksta. Negativni brojevi se gotovo uvijek pronađu jednostavno, bilo kao pogreška ili kao nenamjerna nuspojava matematičkih postupaka. Osim što se napominje da se negativni brojevi dobivaju oduzimanjem većeg broja od manjeg broja, nema puno govora o njihovu porijeklu. Jedno od manje opsežnih razmišljanja iz 18. stoljeća o tome što se točno može prikazati negativnim brojevima ne dolazi iz pera matematičara, već filozofa – Immanuel Kanta.

### 3. Negativni brojevi i negativne veličine

Kant uvodni dio spisa *Pokušaj da se u svjetsku mudrost uvede pojam negativnih veličina* posvećuje opravdanju disciplinarnog prekoračenja koje namjerava učiniti: pojmove razrađene u jednom području znanja (matematici) prenijeti u drugo (svjetska mudrost – filozofija). Tom prilikom Kant naznačuje da ne namjerava oponašati metodu matematike u filozofiji, već ima za cilj da u filozofiju uključi one matematičke spoznaje koje su svoju potvrdu našle u učenju o prirodi. Filozofske ideje od toga mogu imati veliku korist:

»Na primjer, metafizika nastoji otkriti prirodu prostora i najvišu osnovu iz koje se može razumjeti njegova mogućnost. A tome, pak, ništa ne može toliko biti od pomoći koliko i odnekud posuđeni podaci što su na pouzdan način dokazani, kako bi se pomoću njih zasnovalo vlastito razmatranje. Geometrija daje neka od njih, koja se tiču najopćenitijih svojstava prostora, npr. da se prostor uopće ne sastoji od jednostavnih dijelova.«<sup>35</sup>

27

Goran Rujević, »Idealizacija prostora u Newtonovoj racionalnoj mehanici«, *Filozofska istraživanja* 38 (2018) 1, str. 17–33, ovdje str. 27, doi: <https://doi.org/10.21464/fi38102>.

28

Iako bi jezično bilo ispravno reći »ni od čeg«, nadamo se da čitaoci neće zamjeriti na uporabi ove nezgrapne forme kojom pokušavamo istaknuti da se pod ovim »ništa« razumije nula.

29

Jean le Rond d'Alembert, »Négatif«, u: Jean le Rond d'Alembert (ur.), *Encyclopédie*, sv. 11, Samuel Faulche & Compagnie, Neufchâtel 1765., str. 72.

30

Ibid., str. 73.

31

Leonhard Euler, *Vollständige Anleitung zur Algebra*, B. G. Teubner, Leipzig 1911., str. 14.

32

Augustus de Morgan, *On the Study and Difficulties of Mathematics*, The Open Court Publishing Company, Chicago 1910., str. 102.

33

Augustus de Morgan, »Negative and impossible quantities«, u: George Long (ur.), *The Penny Cyclopaedia*, sv. 16, Charles Knight & Co., London 1840., str. 130.

34

A. de Morgan, *On the Study and Difficulties of Mathematics*, str. 103.

35

Immanuel Kant [Immanuel Kant], »Pokušaj da se u svetsku mudrost uvede pojam negativnih veličina«, prev. Damir Smiljanić, u: Immanuel Kant [Immanuel Kant], *Metafizika prirode*, Akademska knjiga, Novi Sad 2016., str. 164–197, ovdje str. 165.

Pojam koji Kant želi prenijeti pojam je *negativnih veličina*, za koji smatra da je u svjetskoj mudrosti još uvijek vrlo stran, ali je zato

»... u matematici dugo bio u upotrebi i tamo je bio od velike važnosti.«<sup>36</sup>

Ovakav opis može djelovati neobično, pogotovo ako u obzir uzmemo ono što smo prethodno rekli o tome na koliko je otpora u europskoj matematici naišla ideja negativnih brojeva. Razotkriva li Kant ovim svoju neupućenost u povijest matematike? Ne nužno, prije će biti da on ovdje govori iz konkretne pozicije koja matematiku shvaća kao vrlo primijenjenu djelatnost, te da time on prihvaća newtonovsku ideju matematike.<sup>37</sup> To, naravno, nije nečuveno za Kanta: spis *Opća povijest prirode i teorija neba* započinje kratkom skicom osnovnih pojmova newtonovske svjetske znanosti, a koji su potrebni za razumijevanje ostatka toga djela.<sup>38</sup> Henry Allison čak napominje da je u spisima koji su nastali 1760-ih godina, Newtonov analitički pristup prirodnoj filozofiji bio Kantu nedvojbeni uzor.<sup>39</sup>

Pojam *negativnih veličina* na koji Kant referira nije stroga negacija veličine, niti je riječ o veličinama koje su manje od ničega, što je ideja za koju Kant kaže da je ništavna i besmislena.<sup>40</sup> Umjesto toga, kantovske su negativne veličine nešto pozitivno, ali i nešto što ima suprotan učinak spram nečeg drugog.<sup>41</sup> Kant izričito potvrđuje newtonsko podrijetlo ovog izraza, ujedno spominjući zanimljivu ilustraciju nizova

»... u kojima negativne veličine nastaju tamo gdje prestaju one pozitivne.«<sup>42</sup>

Budući da prirodni brojevi mogu rasti u beskonačnost, jedino smisljeno mjesto u kojem oni mogu »prestat« jest *nula*, dok su iza te nule upravo negativni brojevi. Ako pozitivni brojevi izražavaju pozitivne veličine, negativni brojevi izražavat će negativne veličine. Prikaz poretka u kojem su brojevi koji izražavaju veličine raspoređeni tako da negativni počinju tamo gdje završavaju pozitivni nije ništa više od Wallisove brojeвне crte. Kant ga ne spominje imenom, ali je put inspiracije preko Newtona više nego jasan.

Već iz navedenog možemo opravdano očekivati da će Kantovo razumijevanje negativnih veličina jasno pripadati fizikalističkom tipu interpretacije. No, ono po čemu će se Kantovo shvaćanje značajno razlikovati od drugih predstavnika ovog tipa tumačenja jest u tome da njemu neće biti dovoljno da navede konkretne primjere realnih negativnih veličina (iako će tih primjera biti dosta), već će se potruditi da pronikne u principe koji su preduvjet za tu interpretaciju, a to pronicanje podrazumijeva sučeljavanje apstraktnih, formalnih konceptualizacija i realnih, sadržajem obremenjenih znanja. Temelj svoje interpretacije Kant pronalazi u višestrukim načinima suprotstavljenosti između različitih entiteta. On, naime, smatra da možemo govoriti bar o dvije vrste suprotstavljanja: jedno je *logičko suprotstavljanje*, utemeljeno na načelu proturječnosti, kada se za jednu stvar istovremeno tvrdi i poriče neko svojstvo; dok je drugo *realno suprotstavljanje*, koje se ne poziva na načelo proturječnosti i koje se javlja kada dva svojstva neke stvari proizvode učinke koji se međusobno odbijaju.

Svaki slučaj logičkog suprotstavljanja daje logičku nemogućnost, uslijed čega iz ovog suprotstavljanja slijedi naprosto *ništa* – kako u pogledu svojstava, tako i u pogledu podmeta koji bi ih nosio. Nema niti može postojati dan za koji istovremeno vrijedi da jest i nije ponedjeljak, nema ničeg pozitivnog što bi se ikada moglo povezati sa spomenutom kontradikcijom. Proturječnost se javlja između afirmacije i negacije istog svojstva, gdje samo jedno princi-

pijelno može biti realno i prisutno, dok je drugo puka negacija i odsutnost, uslijed čega je njihov spoj ništavno nemoguć. Zanimljivo, Kant u tom pogledu napominje:

»Pri tome [logičkom suprotstavljanju, op. a.] se uopće ne obraća pažnja na to koji je od ova dva predikata zaista potvrđan [lat. *realitas*], a koji zaista odričan [lat. *negatio*].«<sup>43</sup>

S druge strane, u slučaju realnog suprotstavljanja, sukobljena su svojstva oba sasvim realna na podmetu koji ih nosi. Rezultat je realnog suprotstavljanja anuliranje realnih posljedica ovih svojstava, ali ne i ništenje podmeta koji ih nosi. Dvije realno suprotstavljene sile mogu istovremeno djelovati na isto tijelo, obje sile i tijelo bit će postojeći, ali će izostati svako kretanje koje bi bilo posljedica djelovanja svake od pojedinačnih sila. Drugim riječima, tijelo će mirovati taman *kao* da na njega ne djeluju sile, ali će i sile i to tijelo sasvim realno postojati. Konkretno realno suprotstavljanje nije deducirano iz nekog pretpostavljenog logičkog zakona, već se očituje iz iskustva koje imamo o tome kako se stvari u svijetu ponašaju. Zbog toga, kao što je maločas naznačeno, realno suprotstavljanje ne može zanemariti koji je od dva suprotstavljena predikata »potvrđan«, a koji »odričan.« Već na razini ove distinkcije možemo vidjeti bliskost Kantove pozicije s pozicijama Newtona i Wallisa.

Primjeri kojima Kant ilustrira ovu zamisao šarmantno su identični primjerima koje su drugi fizikalisti koristili za interpretiranje negativnih brojeva. Kant se prvo osvrće na ideju dugovanja, te konstatira kako osoba koja istovremeno ima aktivni dug od 100 carskih talira i pasivni dug istog iznosa efektivno stoji na nuli, jer svaki iznos koji joj se vrati odmah ide na otplatu duga. Nema ničeg nemogućeg ni proturječnog u tome da jedna osoba istovremeno ima i dug i pozajmicu. Ako su dug i pozajmica istog iznosa, onda jedino stoji da ova osoba neće ništa zaraditi, ali ni izgubiti. Podsjetimo se da će Eulerova tumačenja negativnih brojeva koristiti sličan obrazac, ali Kant se ovdje ne zadržava samo na računskoj interpretaciji.

Drugi je primjer koji se navodi kretanje, i to kretanje broda od Portugala do Brazila, pri čemu se suprotstavljenost javlja između istočnog i zapadnog vjetera. Ovaj je primjer s brodom još važniji za pitanje kojim se bavimo jer u njemu Kant konkretno i koristi negativne brojeve. Određujući da se učinak istočnog vjetera označava predznakom +, a utjecaj zapadnog vjetera predznakom -, Kant pokazuje nekoliko jednostavnih jednadžbi koje izračunavaju ukupno gibanje broda. Jedna je od tih jednadžbi:  $-4 - 5 = -9$ , a u kojoj se, kao što vidimo, koriste isključivo negativni brojevi i koja izražava situaciju

36  
Ibid., str. 166.

37  
Ronald Callinger, »Kant and Newtonian Science: The Pre-Critical Period«, *Isis* 70 (1979) 3, str. 349–362, ovdje str. 355, doi: <https://doi.org/10.1086/352280>.

38  
Immanuel Kant [Immanuel Kant], »Opšta istorija prirode i teorija neba«, prev. Goran Rujević, u: Immanuel Kant [Immanuel Kant], *Metafizika prirode*, Akademski knjiga, Novi Sad 2016., str. 7–146, ovdje str. 28.

39  
Henry E. Allison, *Kant's Transcendental Deduction*, Oxford University Press, Oxford 2015., str. 3.

40  
I. Kant, »Pokušaj da se u svetsku mudrost uvede pojam negativnih veličina«, str. 173, fusnota.

41  
Ibid., str. 166.

42  
Ibid.

43  
Ibid., str. 168.

u kojoj se brod nalazi nakon dva dana zapadnog vjetera, a to je da se u svojem putovanju k zapadu vratio devet milja na istok.

Osim što nalazimo da Kant bez zadržke koristi negativne brojeve ne samo tijekom računanja, već i kao valjan rezultat jednadžbe, uz ovaj primjer vežu se još dva značajna uvida. Prvi je da su pozitivne i negativne vrijednosti uvijek samo *relativne*: istočni je vjetar realan koliko i zapadni, *pozitivnost* i *negativnost* tiče se samo njihovih suprotnih učinaka na kretanje broda. Drugi je uvid koji Kant iznosi taj da simboli + i - sami po sebi ne označavaju operacije sabiranja i oduzimanja:

»A budući da je oduzimanje ukidanje [njem. *Aufhebung*] do kojeg dolazi kada se suprotstavljene veličine uzmu zajedno, onda je jasno da - u stvari ne može biti znak za oduzimanje, kako se to obično pretpostavlja, nego da + i - uzeti samo zajedno označavaju oduzimanje. [...] Isto tako znak + sâm za sebe u stvari ne znači sabiranje [...]«<sup>44</sup>

Kant ovdje na pomalo kompliciran način izražava ideju da nema operativne razlike između sabiranja i oduzimanja, što bismo danas rekli da je oduzimanje sabiranje negativnih brojeva. Time što Kant potpuno zanemaruje uobičajene restrikcije za oduzimanje koje vrijede u skupu prirodnih brojeva (npr. da se od manjeg broja ne može oduzeti veći) implicitno pokazuje da on smisleno prihvaća negativne brojeve s obzirom na to da ta restrikcija ne vrijedi u skupu cijelih brojeva (i nadalje). Nakon toga, Kant dolazi do obuhvatnog određenja pojma koji želi uvesti u svjetsku mudrost:

»Odatle proistječe matematički pojam *negativnih veličina*. Jedna je veličina u odnosu na drugu negativna ako se ne može sabrati drukčije osim suprotstavljanjem, naime tako da jedna u drugoj ukine onoliko koliko je sama vrijedna.«<sup>45</sup>

Naglašavajući da se o negativnim veličinama može govoriti samo u relativnom smislu, Kant se još sigurnije smješta u tabor fizikalista. Možda još važnije, time se jasno pokazuje utemeljenost ideje negativnih veličina u principu realne suprotstavljenosti. Naime, ako uvjet njihove mogućnosti izvodimo iz relacije realnog suprotstavljanja, smisleno je da će i njihova priroda biti odnosa, što im doista i jest osnovna karakteristika. U suprotnom slučaju, ako bi njihova negativnost bila apsolutna, one bi po sebi ništile predmet za koji se izražavaju, čime njihova suprotstavljenost prema pozitivnim veličinama više ne bi mogla biti realna već samo logička. Relativnost negativnih veličina ima jednu zanimljivu posljedicu, a to je da efektivno možemo birati za koju ćemo od dvije realno suprotstavljene veličine reći da je *negativna*, a za koju da je *pozitivna*. Međutim, Kant apelira na izvjesnu dozu trezvenog rasuđivanja: točno je da se za dug može reći da je negativan kapital, kao što se i za kapital može reći da je negativan dug. Ipak, prva varijanta ima mnogo više smisla.

Kako možemo znati da se dvije veličine nalaze u odnosu realnog suprotstavljanja? Osnovno pravilo realnog suprotstavljanja glasi: »realna repugnacija dešava se samo onda ako su dane dvije stvari kao *pozitivni razlozi* i ako jedna od njih ukida posljedicu druge«,<sup>46</sup> a Kant navodi i četiri uvjeta koja za to moraju biti zadovoljena: (1) ono što ćemo izraziti kao negativne veličine moramo steći u istom predmetu; (2) te karakteristike ne mogu već biti u odnosu logičke suprotstavljenosti; (3) te karakteristike mogu samo negirati jedna drugu i ništa više; (4) obje karakteristike moraju biti pozitivne – tj. realne. Na navedeno osnovno pravilo može se dodati i njegova transpozitivna verzija, a to je da u svim slučajevima u kojima postoji pozitivan razlog, a ipak izostaje njegova očekivana posljedica, znači da postoji drugi pozitivan razlog koji je prvom realno suprotstavljen i koji se može izraziti negativnom veliči-

nom u odnosu na veličinu kojom izražavamo prvi. Važno je naglasiti da ovo osnovno pravilo i četiri uvjeta ne govore o tome kako se u matematici došlo do pojma negativnih veličina, već o tome pod kojim okolnostima se taj pojam može fizički primijeniti.

Nakon ove ekspozicije pojma negativnih veličina, u preostalim odjeljcima ovog spisa Kant predstavlja primjere iz svjetske mudrosti u kojima se ovaj pojam javlja, kao i moguće regije perspektivne primjene ovog pojma. Budući da su ovo trenuci u kojima tematika teksta doslovno izlazi izvan okvira matematike, ovi odjeljci neće biti od presudne važnosti za naše istraživanje. Ipak, u cilju potpunosti, vrijedi napomenuti da se filozofska upotreba negativnih veličina može zapaziti na poljima *prirodne filozofije* (istovrsne sile suprotnog smjera djelovanja), *psihologije* (afekti duše), *praktičke filozofije* (vrline i nevrline). S pomoću pojma negativnih veličina mogu se objasniti fundamentalni ontološki procesi nestajanja i mijenjanja.

Prije nego što donesemo definitivan zaključak o tome kojem tipu tumačenja negativnih brojeva pripada ovo koje je Kant iznio u *Negativnim veličinama*, neophodno je da se osvrnemo na par konceptualnih nedoumica. Prvo, valjalo bi položiti računa o tome koliko je opravdano da na osnovu teksta koji govori o negativnim *veličinama* (njem. *Größen*) mi izvodimo zaključke o negativnim *brojevima* (njem. *Zahlen*). Razlika je između ovih termina jasna i veoma stara. Zatičemo je još kod Aristotela, koji u *Kategorijama* kaže:

»Od količina jedna je djeljiva, a druga neprekidna. [...] Djeljiva količina je na primjer broj, ili govor, a neprekidna je linija, površina, tijelo, i pored toga, vrijeme i prostor.«<sup>47</sup>

Ovo je dalje eksplicirano u *Metafizici*:

»Neka je količina mnoštvo ako je izbrojiva, a veličina ako je izmjerljiva. Mnoštvom se naziva ono što je po mogućnosti djeljivo na dijelove koji nisu neprekidni, a veličinom ono što je djeljivo na neprekidne dijelove.«<sup>48</sup>

U oba navoda zatičemo da je kriterij razlikovanja karakteristika diskretnosti ili kontinuiranosti: veličina je kontinuirana količina, dok je broj ili diskretna količina (prema *Kategorijama*) ili oznaka za mnoštvo koje je diskretna količina (prema *Metafizici*). Aristotel ne zalazi dublje u uspostavljanje odnosa između ovih termina, ali i bez toga možemo zaključiti da ovakva distinkcija ima savršenog smisla u antičko doba – kada ranije spominjani problem nesumjerljivosti dijagonale kvadrata stvara veliki jaz između aritmetike (koja radi s brojevima) i geometrije (koja radi s veličinama).

Descartesova algebraizacija geometrije danas nam omogućava da savladamo taj jaz. Ipak, terminološka razlika između broja i veličine može se održati. Veličinom možemo nazvati bilo kakvu karakteristiku po kojoj se različite instance mogu uspoređivati kao veće, manje ili jednake, dok je broj simbolički izraz izmjerene veličine, veličine uspoređene s određenom jedinicom. Ovo vrijedi bez obzira na to je li veličina kontinuirana ili diskretna. Po ova-

44  
Ibid., str. 169.

45  
Ibid., str. 170.

46  
Ibid., str. 171–172.

47  
Aristotel, *Kategorije, O izrazu, Analitika I-II*, prev. Slobodan U. Blagojević, Paideia, Beograd 2008., str. 21–22 (4b20–25).

48  
Aristotel, *Metafizika*, prev. Slobodan U. Blagojević, Paideia, Beograd 2007., str. 193 (1020a9–12).

kvom razumijevanju, veličina jest ono pretpostavljeno na što se odnosi broj; ako tražimo prikaz broja, zapravo tražimo prikaz veličine čiju mjeru broj izražava. Pokazivanje mogućnosti negativnih veličina samim je tim i pokazivanje mogućnosti tumačenja negativnih brojeva koje nije puko računsko.

Odbijanje negativnih brojeva u prošlosti matematike s ovim se uvidom može potpunije konceptualizirati. Stari su matematičari znali da se odgovarajućom manipulacijom simbola mogu dobiti rezultati koje bismo danas zvali negativnim brojevima, najjednostavnije tako što se postavi takav računski problem u kojem se od manjeg broja oduzima veći broj. Odbijanje negativnih brojeva nije značilo poricanje takvih formalnih postupaka, već poricanje da iza takvog postupka može biti smislen podmet, realna veličina. To je sve slučaj kada su negativni brojevi etiketirani kao »apsurdni«, »fiktivni« ili »lažni«, ili kao indikatori greške u računanju. Ovdje možemo uračunati i interpretacije koje će negativnim brojevima ponuditi samo funkcionalni značaj kao alat za računanje, jer oni služe samo kao privremeni posrednici za dolazak do konačnog ne-negativnog rezultata. Drugim riječima, odbijanje negativnih brojeva značilo je poricanje korespondirajuće veličine koja bi bila uvjet mogućnosti njihova utemeljenja.

Kantovo razumijevanje negativnih veličina daje konceptualni okvir u kojem se taj matematički pojam može smisljeno povezivati s realno postojećim predmetima. Ako su negativne veličine nešto što možemo izmjeriti na stvarima, sasvim je opravdan korak u zaključivanju da očekujemo da će se za izražavanje izmjerenih negativnih veličina koristiti negativni brojevi, što je upravo način na koji Kant upotrebljava brojeve u svojim primjerima.<sup>49</sup> Dakako, svaka negativna veličina može imati svoju apsolutnu vrijednost izraženu prirodnim brojem, ali negativan broj u sebi čuva karakteristiku realne suprotstavljenosti, te omogućava adekvatan račun tih veličina. Tako negativni brojevi imaju i upotrebnu vrijednost, ali i realnu utemeljenost. U tom smislu, Kant je ponudio okvir za realnu interpretaciju negativnih brojeva preko negativnih veličina. Kant je adekvatnost te interpretacije demonstrirao preko primjera s obračunavanjem putovanja broda k zapadu, a pri čemu je neposredno upotrebljavao brojeve s negativnim predznakom upravo da izrazi slučajeve u kojima brod zbog vjetrova plovi k istoku, tj. udaljava se od zapada.

Druga je nedoumica koja se može javiti oko Kantova tumačenja negativnih brojeva u *Negativnim veličinama* vezana za kratku fusnotu u kojoj komentira da je u filozofskom smislu nemoguće od nule oduzeti neki broj

»... jer ne može se nikako od ničega oduzeti nešto pozitivno.«<sup>50</sup>

S jedne strane, Kant koristi ovaj moment da obori ideju da su negativne veličine nešto manje od ničeg (nule). S druge strane, ovaj stav nije kompatibilan s onim što danas smatramo da su pravila aritmetičkih operacija na poljima cijelih, racionalnih i realnih brojeva, te se može smatrati kao mjesto na kojem se ponuđeni model interpretacije raspada. Srećom, najjednostavniji se odgovor na ovu nedoumicu pronalazi u istoj fusnoti, gdje Kant konstatira da oduzimanje nekog broja od nule može biti prihvatljivo u proceduralnom, računskom smislu, ali da u filozofskom smislu ta oduzeta veličina nije manja od te nule, nego je i dalje realna jer »nula skoro ništa ne mijenja«. <sup>51</sup> Očigledno, Kantu nije namjera ponuditi formalne aksiome aritmetike cijelih brojeva, što dijelom može objasniti zašto ove Kantove ideje nisu izvršile veliki utjecaj na kasnije matematičare (suvremeni intuicionisti će se, recimo, više oslanjati na njegovu kritičku filozofiju).

#### 4. Zaključak

Uspoređujući sažeti pregled tipova interpretiranja negativnih brojeva s pregledom Kantovih stavova iz *Negativnih veličina*, možemo zaključiti da je Kantovo tumačenje negativnih brojeva iz tog spisa u skladu s fizikalističkim tipom tumačenja koje nalazimo kod Wallisa, Newtona i D'Alemberta. Argumenti koji idu u prilog toj tezi glase:

1. Kantova je pretkritička filozofija pod jakim utjecajem Newtonova razumijevanja svijeta;
2. primjeri koji ilustriraju negativne brojeve pomoću kretanja slični su Wallisovim i Newtonovim primjerima;
3. poricanje ideje da su negativni brojevi manji od ničeg podudarno je s D'Alembertovim stavom;
4. presudno, razlikovanje stvarne suprotnosti od logičke i povezivanje stvarne suprotnosti s matematičkim pojmovima omogućuje im smislene fizikalističke interpretacije;
5. fizikalističke interpretacije matematičkih pojmova nisu slučajna podudarnost matematike i eksperimentalnih znanosti, već su obrazložive odgovarajućim uvjetima.

Ovim direktnim argumentima moguće je dodati i jedan posredni, a to je da Kantovo tumačenje negativnih brojeva nije podudarno ni s *odbijajućim* (jer smatra da su smislene interpretacije moguće) ni s *računskim tipom* (jer smatra da smislene interpretacije imaju širu primjenu od samo računске). Naravno, snaga ovog posrednog argumenta prvenstveno ovisi od toga da su potonja tri tipa tumačenja negativnih brojeva jedine mogućnosti, dok buduće povijesne analize mogu lako priložiti nove uvide na tu temu.

Ako prihvatimo tezu da je Kantovo tumačenje negativnih brojeva u *Negativnim veličinama* fizikalističkog tipa, sljedeći je korak u našem istraživanju taj da razmotrimo što nam ovo govori o Kantovim pretkritičkim matematičkim idejama. Kao što smo na samom početku napomenuli, matematička se tematika uobičajeno vezuje za kritički period Kantove filozofije, tako da su analize njegove pretkritičke filozofije u ovoj dimenziji vrlo dobrodošle. Direktan je zaključak koji se lako nameće taj da je Kantovo pretkritičko razumijevanje matematike posve newtonovsko: (1) matematika se bavi idealiziranim oblicima realnih veličina i njihovih odnosa, i to je demonstrirano time što za veličine u matematičkom računu vrijedi princip realnog suprotstavljanja; (2) metodologija idealizacije i deduktivnog izvođenja kojom matematika dolazi do svojih istina njoj je specifična i po svoj prilici se ne može učinkovito preslikati u drugim disciplinama; (3) matematika nije izmišljotina ljudske mašte, naprotiv, matematički su rezultati široko primjenjivi u drugim područjima (od mehanike, preko navigacije do računovodstva) zato što opisuju najopćenitija svojstva stvarnosti; (4) naposljetku, može se reći da svaka instanca primjenjivosti matematičkih rezultata predstavlja demonstraciju istinitosti njezinih uvida.

Iz navedenog bi se moglo pomisliti da je pretkritičkom Kantu matematika empirijska disciplina i da se puno ne razlikuje od fizike. Međutim, to bi bio

pogrešan zaključak i nešto što ni eksperimentator Newton nije zastupao. Pred sâm kraj *Negativnih veličina* Kant navodi važan podatak da realno suprotstavljanje može biti dvojako: *aktualno*, kada uzroci suprotstavljenih veličina istovremeno djeluju na isti predmet, i *potencijalno*, kada se uzroci ne nalaze konkretno u istom predmetu.<sup>52</sup> Aktualna su suprotstavljanja ona o kojima se može imati eksperimentalno znanje, dok potencijalna zahtijevaju mogućnost apstraktnog razmatranja relacija čak i onda kada one nisu neposredno dane. Na temelju svoje idealizirajuće i deduktivne metodologije, matematika je u stanju zahvatiti oba vida realnog suprotstavljanja. To čini da mogućnost primjene matematičkih rezultata ne bude samo u mehanici nego, kako se Kant nadao, i u metafizici i etici.

Zaključak da je prekriticno Kant baštiniio Newtonovo viđenje matematike nije iznenađujuć. Već smo spomenuli slično zapažanje kod Allisona, a moguće ga je pronaći i kod drugih povjesničara filozofije. Tako je, primjerice, Ernst Cassirer konstatirao:

»Ako hoćemo spoznati, tako reći, prirodnu genealogiju njegova [Kantova, op. a.] pogleda, moramo taj pogled usporediti – ne s učenjima Engleza [Lockea i Humea, op. a.] nego – s učenjima takvih mislilaca koji, kao i on, Newtonovu znanost uzimaju za središte spoznajnoteorijskog razmatranja.«<sup>53</sup>

Cassirer napominje da je ovaj utjecaj na Kanta došao preko Christiana Augusta Crusiusa,<sup>54</sup> a zanimljivo je primijetiti da je baš u pogledu negativnih veličina i brojeva Kant bio još više usuglašen s Newtonom nego sâm Crusius, što se može vidjeti iz sljedećeg komentara:

»Da je čuveni gospodin dr. *Crusius* bio voljan upoznati se sa smislom koji matematičari daju tom pojmu [*negativnih veličina*, op. a.], ne bi u čuđenju smatrao pogrešnim usporedbu Isaaca Newtona, koji privlačnu silu, koja, iako na izvjesnoj udaljenosti, u blizini tijela postepeno prelazi u odbojnu, uspoređuje s nizovima u kojima negativne veličine nastaju tamo gdje prestaju one pozitivne.«<sup>55</sup>

Kantova je centralna namjera u spisu *Negativne veličine* bila demonstracija mogućnosti i perspektivnosti primjene jednog matematičkog pojma u drugim sferama znanja. Analiza koju smo izveli na prethodnim stranicama pokazala je kakvu sliku matematike takav postupak izgrađuje. No, *Negativne veličine* nisu jedini prekriticni tekst u kojem se Kant bavi matematikom, pa bi se stoga slika koja je ovdje prikazana mogla proširiti i novim detaljima. Na primjer, može se primijetiti da je ovom prilikom samo dotaknuta ideja da je metodologija kojom matematika dolazi do istinitih spoznaja specifična i da se nije dublje zalazilo u to kakva je to idealizirajuća i deduktivna metodologija u pitanju. Nedugo nakon što su se pojavile *Negativne veličine*, objavljen je i Kantov esej *Istraživanje o razgovijetnosti principa prirodne teologije i morala*, u kojem se upravo razmatra metodološka razlika između matematičkog sintetičkog pristupa znanju i filozofskog analitičkog pristupa. Ovaj je esej

52  
Ibid., str. 187.

53  
Ernst Cassirer [Ernst Cassirer], *Problem saznanja u filozofiji i nauci novijeg doba*, sv. 2, prev. Olga Kostrešević, Izdavačka Knjižarnica Zorana Stojanovića, Sremski Karlovci – Novi Sad 1999., str. 421.

54  
Ibid., str. 413, 420 i 421.

55  
I. Kant, »Pokušaj da se u svetsku mudrost uvede pojam negativnih veličina«, str. 166.

već bio predmet ekstenzivnih povijesno-filozofskih analiza,<sup>56</sup> dok bi jedna buduća povijesna komparacija mogla potražiti sličnosti i razlike koje se tu javljaju između Kantove i Newtonove ideje matematike, i time obogati istraživanje o Kantovu prekriticnom razumijevanju matematike.

Goran Rujević

**Negative Numbers and Immanuel Kant's  
Pre-Critical Understanding of Mathematics**

**Abstract**

*In the early history of mathematics, we can find at least three different types of interpretations of negative numbers: (1) the rejecting type, which considers negative numbers as indicators of errors in reasoning; (2) the computational type, which considers negative numbers only as useful computational tools; and (3) physicalist type, which gives realist interpretations of negative numbers such as opposed physical forces. By comparing these types with Immanuel Kant's (1724–1804) ideas found in his pre-critical text *Attempt to Introduce the Concept of Negative Magnitudes into Philosophy* (1763), we conclude that Kant espoused the physicalist interpretation of negative numbers. This insight enables us to conclude that pre-critical Kant followed not only Newton's understanding of the natural world but his understanding of mathematics as well.*

**Keywords**

Immanuel Kant, magnitudes, negative numbers, opposition, physicalism, realism

56

Npr. Daniel Sutherland, »Philosophy, Geometry, and Logic in Leibniz, Wolff, and the Early Kant«, u: Michael Friedman, Mary Domski, Michael Dickson (ur.), *Discourse on a New*

*Method. Reinvigorating the Marriage of History and Philosophy of Science*, Open Court Publishing, Chicago – La Salle 2010., str. 155–192.