

Miljenko Petrović*
Miljenka Krolo-Petrović**

PRIMJENA RAČUNALNOG PROGRAMA MATHEMATICA ZA IZRAČUN VRIJEDNOSTI PRI RIZIKU

Sažetak

Povijest financija prožeta je financijskim gubitcima što je dovelo do usvajanja mjere rizika, tzv. vrijednosti pri riziku (engl. Value at Risk – VaR), kao jedinstvene referentne vrijednosti za upravljanje financijskim rizikom. VaR je statistička mjera mogućih gubitaka portfelja (engl. portfolio) zbog tržišnog rizika, a gubici se veći od iznosa VaR-a javljaju s određenom malom vjerojatnosti. VaR se razvio u aktivan alat za upravljanje rizikom, a za izračun VaR-a može se upotrebljavati računalni program Mathematica.

Ključne riječi: metrika rizika, vrijednost pri riziku, očekivani gubitak, Mathematica

1. Uvod

Upravljanje financijskim rizicima u središtu je pozornosti od sredine devedesetih godina prošlog stoljeća (Jorion, 1995) prvenstveno zbog upotrebe vrijednosti pri riziku (engl. Value at Risk – VaR). Na temelju metode koja se naziva metrika rizika (engl. risk metrics) nastala je kovanica vrijednost pri riziku. Tako je VaR postao standardna referenca za mjerenje financijskih rizika. VaR sadrži ukupan rizik u portfelju financijskih instrumenata, tj. sažima tržišne varijable koje stoje iza portfelja u jedan broj. VaR-om se koriste upravitelji fondova (engl. fund managers) i financijske institucije. Regulatori banaka također se koriste VaR-om za određivanje pričuvnog kapitala koji banka mora zadržati zbog rizika koji preuzima. Vrijednost pri riziku ima dva parametra: vremenski horizont (engl. time horizon) izražen u danima i razinu pouzdanosti ili prag vjerojatnosti (engl. confidence level – q) pomoću kojih se procjenjuje ukupan rizik portfelja tijekom nadolazećeg vremenskog razdoblja. Vrijednost pri riziku statistička je mjera mogućih gubitaka vrijednosti portfelja (engl. portfolio

* Miljenko Petrović, kap. d. pl., C&M Ltd, Hamilton, Bermuda, miljenko.petrovic@zg.t-com.hr

** Miljenka Krolo-Petrović, prof., XI. gimnazija, Savska 77, Zagreb, Hrvatska, miljenkakrolopetrovic@gmail.com

losses) zbog tržišnog rizika što znači da je mala vjerojatnost pojave gubitka većeg od VaR-a.

Zamisao je odrediti razinu izloženosti financijske pozicije (portfelja) za koju možemo „razumski sigurno” jamčiti da neće biti premašena. Najprije se odabire razina povjerenja, npr. 99 %. Zatim se definira gubitak koji u 99 % slučajeva neće biti premašen, tako da je samo 1 % (engl. 1%-quantile) prinosa (engl. yield) ispod te razine. Tu razinu prinosa (povrata) moguće je odrediti iz podataka s financijskih tržišta. Pretpostavimo, na primjer, da je povrat 2 %. Ako investitor posjeduje 100 milijuna takvih financijskih sredstava (aktive), na temelju prethodnih podataka može biti 99 % „siguran” da portfelj neće pasti za više od 2 % svoje vrijednosti (tj. za više od 2 milijuna) tijekom sljedećeg vremenskog horizonta. Naravno, razina povjerenja od 99 % može se promijeniti, kao i vremenski okvir. Drugim riječima, VaR je iznos koji financijska institucija mora imati do razine pouzdanosti (q) da bi smanjila vjerojatnost gubitka financijske pozicije. S druge strane, financijska institucija (npr. banka) dodatnim kapitalom (kao investicija bez rizika), u određenoj otvorenoj poziciji, financijsko izlaganje portfelja čini prihvatljivim. Uz VaR upotrebljava se i alternativna mjera rizika tj. očekivani gubitak ili uvjetna vrijednost pri riziku (engl. Expected Shortfall – *ES* or Conditional Value at Risk – *CVaR*). Navedena literatura (Holton, 2013; Jorion, 2007; Pearson, 2002) detaljno obrađuje pojmove vrijednost pri riziku i očekivani gubitak.

2. Osnovna obilježja financijske imovine (kapitala)

Financijska imovina (engl. financial asset) prodaje se kako bi se prikupio novac za buduća ulaganja, npr. neka tvrtka koja postaje javna prodaje dionice (engl. stocks/shares/equities). Dionice su stoga potraživanja na buduće novčane tokove. Obveznica (engl. bond) je ugovor o dugovanju, a kupnja jamči buduću isplatu izdavača obveznice (u početnoj prodaji obveznice) zajedno s kamatom. Kupnja opcije (engl. call/put option – the right to buy or sell shares, currencies or commodities) daje njezinom kupcu pravo na uvjetni budući novčani tok koji ovisi o budućem poslovanju. Zamjena (engl. swap – exchange payments or investments) dolazi s pravima i obvezama gdje se dvije strane dogovaraju o periodičnoj razmjeni plaćanja različitih vrsta, na primjer fiksne svote nasuprot promjenjive koja ovisi o trenutnim tržišnim uvjetima. Informacije o cijenama na tržištu mogu se izraziti, u bilo kojem trenutku, kao cijena financijske imovine koja se zove scenarijem (engl. scenario). Tipični su scenariji trenutni scenarij na tržištu, prošli ili povijesni scenarij tržišta i hipotetski scenarij.

Određivanje vrijednosti financijske pozicije naziva se određivanje cijene pozicije (engl. pricing the position). Kako se cijene financijskih instrumenata mijenjaju, tako ni vrijednosti pozicija nisu stalne. Ova promjena vrijednosti naziva se dobit ili gubitak (engl. profit and loss – *PnL*), a može se izraziti kao razlika cijena dvaju scenarija.

Derivati ili izvedenice (engl. derivatives) financijski su instrumenti za učinkovito upravljanje financijskim rizicima. Derivatni ugovor (engl. derivative contract) može se općenito definirati kao privatni ugovor koji crpi svoju vrijednost iz neke osnovne cijene imovine, referentne stope ili indeksa poput dionica, obveznica, valute ili robe. Takav ugovor također detaljno određuje nominalan iznos definiran u valuti, dionicama ili nekoj drugoj jedinici. Za razliku od vrijednosnih papira, poput dionica i obveznica koji se izdaju radi prikupljanja kapitala, izvedenice (derivatni instrumenti) su ugovori ili privatni dogovori između dviju strana vezano za kupovinu i prodaju financijskih instrumenata. Detaljniji prikaz termina koji se upotrebljavaju u području financija mogu se pronaći kod Parkinsona i Noblea (2008).

3. Vrijednost pri riziku i očekivani gubitak

Rizik (engl. risk) se može definirati kao kolebljivost (engl. volatility) neočekivanih ishoda što može u konačnici promijeniti vrijednost imovine, financijskog kapitala ili dobiti. Financijski rizici odnose se na moguće gubitke zbog aktivnosti na financijskom tržištu, na primjer gubitci mogu nastati zbog nepovoljnih kretanja kamatnih stopa (engl. interest rates) ili insolventnosti financijskih obveza. Rizik može biti stvoren ljudskim djelovanjem, kao što su poslovni ciklusi, inflacija, promjene u vladinim politikama, ratovi itd. Rizik također nastaje uslijed nepredviđenih prirodnih pojava (poplave, potresi i sl.). Da bi se smanjili utjecaji navedenih čimbenika, potrebno je detaljno isplanirati postupke za identifikaciju, mjerenje i upravljanje financijskim rizicima.

Nastavno se određuje prag vjerojatnosti q (npr. 1 %) za vrijednost pri riziku. Ako se slučajna varijabla, koja predstavlja neku financijsku poziciju koja može pretrpjeti mogući gubitak, označava s X , tada postoji najmanji x koji za vrijednost ima $P(X > x) < q$. Ovdje x predstavlja „prihvatljivu” razinu gubitka. Obično se za definiranje VaR-a upotrebljava kritična vrijednost od jedan posto jer postavlja gornju granicu mogućeg gubitka. VaR sažima najgori gubitak tijekom ciljanog razdoblja koji se neće premašiti uz određenu razinu povjerenja. Postoje tri glavna načina izračunavanja VaR-a: povijesna metoda (engl. historical simulation or non-parametric method), metoda varijance-kovarijance (engl. variance-covariance, delta-normal or parametric method) i metoda Monte Carlo (engl. Monte Carlo simulation or semi-parametric method).

Povijesna simulacija uključuje stvaranje baze podataka na temelju dnevnih promjena u svim tržišnim varijablama tijekom određenog vremenskog okvira. Povijesni pristup pretpostavlja blisku budućnost sličnu nedavnoj prošlosti stoga se mogu upotrebljavati podatci iz prošlosti za predviđanje rizika. Budući da ovaj pristup ne ovisi o parametarskim pretpostavkama o distribuciji portfelja prinosa, može se prilagoditi širokim repovima (engl. fat tails), asimetrijama (engl. skewness) i drugim značajkama financijskih obilježja. Najveća je potencijalna slabost ovog pristupa da

njegovi rezultati u potpunosti ovise o skupu podataka. Ako je naše podatkovno razdoblje stabilno, povijesna metoda često će podcijeniti rizik, a ako je naše podatkovno razdoblje promjenjivo, isti će ga pristup često precijeniti. Osim toga, pristup povijesne simulacije ponekad sporo odražava glavne događaje, poput povećanja rizika povezanog s iznenadnim promjenama na financijskom tržištu.

Parametarski pristup mjeri rizik prilagodbom krivulje vjerojatnosti s podacima. Ovaj model pretpostavlja da portfelj povrata slijedi normalnu distribuciju. Normalna distribucija u potpunosti je opisana dvama parametrima, matematičkim očekivanjem i standardnom devijacijom (odstupanjem). Radi potpunosti treba spomenuti još dva momenta višeg reda. Koeficijent asimetrije u većini je slučajeva negativan i statistički značajan, što implicira da je distribucija financijskog povrata asimetrična ulijevo. Ovaj rezultat nije u skladu sa svojstvima normalne distribucije koja je simetrična. Također empirijska distribucija financijskog povrata pokazuje značajno prekomjeran koeficijent spljoštenosti (engl. kurtosis). Koeficijent spljoštenosti normalne razdiobe iznosi 3. Veći koeficijent znači da repovi padaju sporije što implicira veću vjerojatnost velikih vrijednosti. Empirijski podatci pokazuju da financijski povrati ne slijede doslovno normalnu raspodjelu. U konačnici je stvarni gubitak mnogo veći od predviđenog normalnom distribucijom.

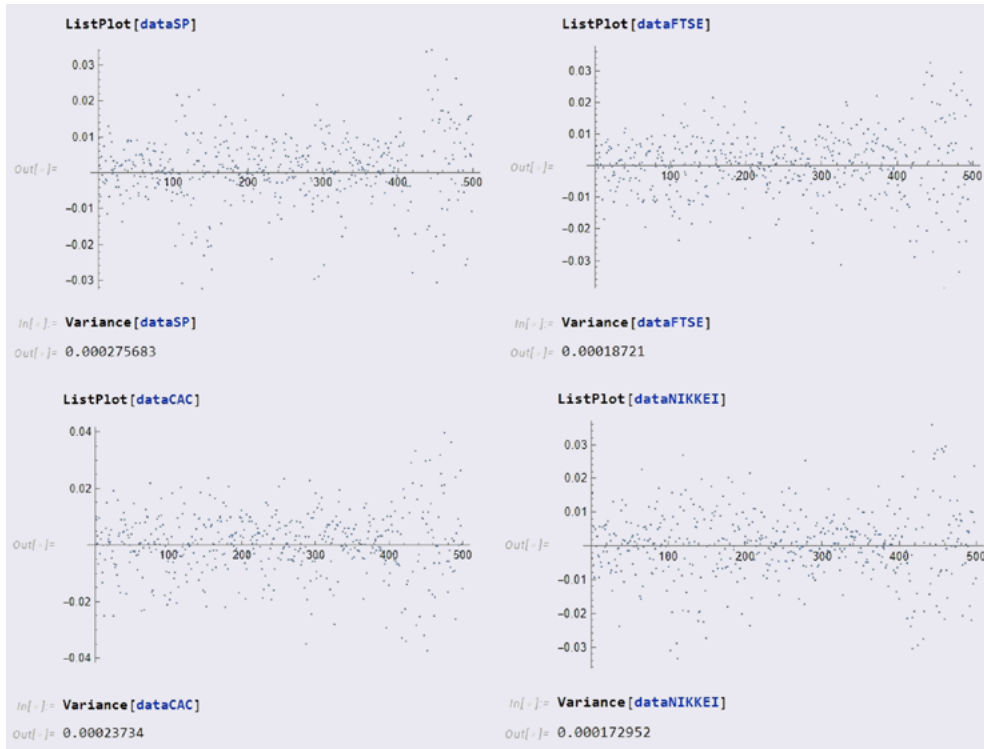
Monte Carlo metoda zanimljiva je tehnika koja se može upotrijebiti za procjenu VaR-a nelinearnih portfelja jer ne zahtijeva pojednostavljene pretpostavke o zajedničkoj distribuciji temeljnih podataka. Monte Carlo metoda (Carol, 2009), uz povijesnu metodu, pripada simulacijskim metodama. Ovom metodom simulira se veliki broj mogućih ishoda VaR-a za svaki od tih scenarija. Postoje algoritmi koji zahtijevaju skromne računalne troškove, kao i metodologija koja poboljšava računsku učinkovitost Monte Carlo simulacijskog pristupa procjenama VaR-a. Pomoću VaR alata institucije mogu odlučiti kako upravljati rizikom (engl. risk hedging). VaR integrira tržišni rizik (engl. market risk) u sve vrste imovine: izvedenice (derivate), dionice, obveznice ili robe. Očekivani gubitak (ES/CVaR) za portfelj ili investiciju izvodi se iz VaR-a, tj. kvantificira očekivani gubitak izvan razine pouzdanosti. ES/CVaR uvjetno je očekivanje gubitaka koji premašuju VaR. Nasuprot VaR-u, ES/CVaR pruža dodatne informacije o gubitcima u repu distribucije. Vrijednost pri riziku, kao i očekivani gubitak, proizlaze iz statističke metode, pa treba naglasiti da je riječ ipak samo o procjeni.

4. Primjena računalnog programa Mathematica

U sljedećem primjeru (Hull, 2022) upotrebljavaju se četiri indeksa dionica (S&P 500, FTSE 100, CAC 40 i Nikkei 225). Korišteni su podatci ukupni indeksi povrata (Slika 1) gdje se pretpostavlja da su dividende isplaćene na dionice koje čine te indekse ponovno investirane u iste indekse. Vrijednosti portfelja (α) za izračun VaR-a su (u

tisućama dolara): S & P = 4000, FTSE = 3000, CAC = 1000 i Nikkei = 2000. Očekivani gubitak (engl. Expected Shortfall) uvjetovan je gubitkom većim od razine VaR-a. Za izračun parametarskom, povijesnom i Monte Carlo metodom korišten je računalni program WolframAlpha – Mathematica (Wolfram, 2003) i referentna literatura (Carol, 2009; Mun, 2006; Wong, 2013).

4.1. Parametarska metoda



Slika 1. Grafikoni dnevnih povrata indeksa dionica (Izvor: obrada autora)

Prikaz simetrične matrice korelacije (engl. Correlation matrix – ρ) i matrice varijance-kovarijanse (engl. variance-covariance matrix – C) za petsto dnevnih povrata (podatci sa slika 1 i 2):

$$\text{Correlation matrix } (\rho) = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.415 & 0.694 & 0.368 \\ 0.415 & 1 & 0.656 & 0.566 \\ 0.694 & 0.656 & 1 & 0.482 \\ 0.368 & 0.566 & 0.482 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} var_1 & cov_{12} & cov_{13} & cov_{14} \\ cov_{21} & var_2 & cov_{23} & cov_{24} \\ cov_{31} & cov_{32} & var_3 & cov_{34} \\ cov_{41} & cov_{42} & cov_{43} & var_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000275 & 0.000094 & 0.000177 & 0.000080 \\ 0.000094 & 0.000187 & 0.000138 & 0.000102 \\ 0.000177 & 0.000138 & 0.000237 & 0.000097 \\ 0.000080 & 0.000102 & 0.000097 & 0.000173 \end{bmatrix}$$

Koeficijent korelacije (ρ) mjera je linearne ovisnosti slučajnih varijabli te uvijek leži u intervalu $[-1, 1]$. Varijanca (disperzija, rasipanje – σ^2) opisuje promjenu vrijednosti jedne varijable oko srednje vrijednosti, dok kovarijanca (cov) poprima pozitivan ili negativan iznos za par varijabli.

Correlation[listSP, listFTSE]	Covariance[listSP, listFTSE]
Out[5]= 0.41532	Out[10]= 0.0000943524
In[6]:= Correlation[listSP, listCAC]	In[11]:= Covariance[listSP, listCAC]
Out[6]= 0.69355	Out[11]= 0.000177406
In[7]:= Correlation[listSP, listNIKKEI]	In[12]:= Covariance[listSP, listNIKKEI]
Out[7]= 0.367651	Out[12]= 0.0000802794
In[8]:= Correlation[listFTSE, listCAC]	In[13]:= Covariance[listFTSE, listCAC]
Out[8]= 0.655771	Out[13]= 0.00013823
In[10]:= Correlation[listFTSE, listNIKKEI]	In[14]:= Covariance[listFTSE, listNIKKEI]
Out[10]= 0.565932	Out[14]= 0.000101834
In[11]:= Correlation[listCAC, listNIKKEI]	In[15]:= Covariance[listCAC, listNIKKEI]
Out[11]= 0.481892	Out[15]= 0.0000976334

Slika 2. Podatci o korelaciji i kovarijanci indeksa dionica (Izvor: obrada autora)

Jednadžba varijance portfelja $\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{cov}_{ij} \alpha_i \alpha_j = \alpha^T C \alpha$ u programu Mathematica:

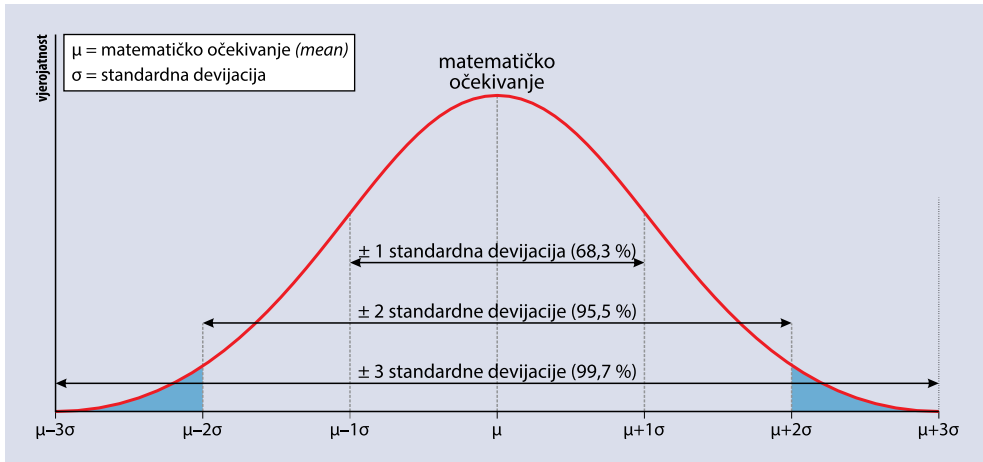
```
Round[{{4000, 3000, 1000, 2000}^T}.{{0.000275, 0.000094, 0.000177, 0.000080},
{0.000094, 0.000187, 0.000138, 0.000102}, {0.000177, 0.000138, 0.000237, 0.000097},
{0.000080, 0.000102, 0.000097, 0.000173}}. {4000, 3000, 1000, 2000}, 6]
```

```
Out[2]= {14406}
```

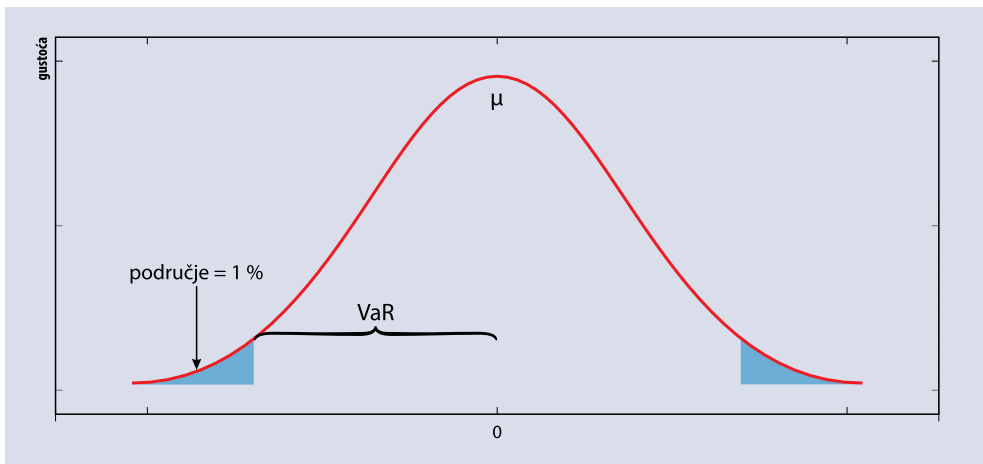
Standardna devijacija ili odstupanje (engl. standard deviation – σ_p) portfelja kvadratni je korijen varijance portfelja ($\sqrt{\sigma_p^2}$), a u ovom slučaju iznosi 120,03. Dnevna vrijednost pri riziku/očekivani gubitak (VaR/ES) u tisućama dolara iznosi ($2,326 \cdot 120,03 = 279,19$) i ($2,667 \cdot 120,03 = 320,12$). Očekivani gubitak ($\mu - 2,67\sigma$) po iznosu je veći od vrijednosti pri riziku ($\mu - 2,33\sigma$). Zaključno, kada je matematičko očekivanje (engl. mean or expectancy – μ) nula, očekivani gubitak, kao i vrijednost pri riziku, proporcionalan je standardnom odstupanju (σ).

U primjeni se često upotrebljavaju simetrični intervali tolerancije oblika ($\mu - \varepsilon\sigma$, $\mu + \varepsilon\sigma$) gdje se za ε odabiru neke karakteristične vrijednosti (Slika 3). Za vrijednost pri riziku (1 %) ε iznosi 2,326 (Slika 4). Povrati u praksi ne slijede normalnu distribuciju vjerojatnosti, već koeficijent spljoštenosti (engl. kurtosis) pokazuje tzv. deblje repove

(engl. heavier tails), pa se za očekivani gubitak upotrebljava i sinonim (engl. Expected Tail Loss).



Slika 3. Matematičko očekivanje i standardno odstupanje (Izvor: obrada autora)

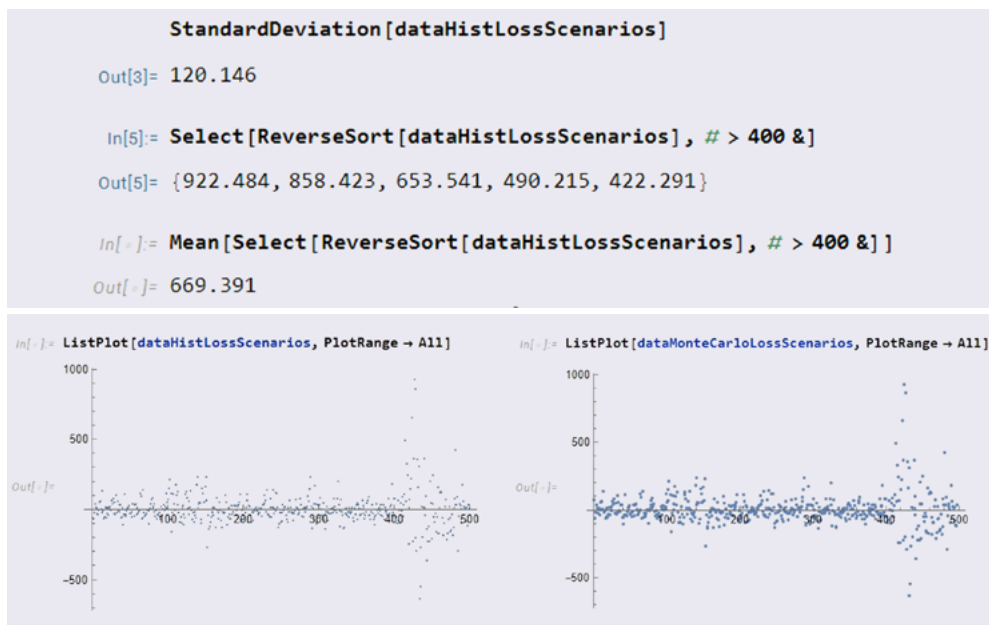


Slika 4. Vrijednost pri riziku ($\mu - 2,326\sigma$) (Izvor: obrada autora)

4.2. Povijesna metoda

Pri izračunavanju VaR-a i ES-a povijesni pristup uključuje stvaranje baze podataka koja se sastoji od dnevnih kretanja tržišnih varijabli tijekom određenog vremenskog razdoblja. Promjena vrijednosti portfelja, tj. vrijednost pri riziku, predstavlja odgovarajući postotak (engl. percentile) distribucije vjerojatnosti dok je očekivani gubitak prosjek opažanja u repu distribucije. Scenarij i pretpostavlja vrijednost indeksa dionica prema obrascu $\left(V_i = v_n \frac{v_i}{v_{i-1}}; 1 \leq i \leq 500 \right)$. Dnevno kretanje portfelja (gubitak/

prinos) prikazan je grafom (Slika 5a). Vremenski horizont (1 dan), razina pouzdanosti (99 %) i (500) scenarija daje VaR kao peti najveći gubitak (ES je srednja vrijednost prvih pet najvećih gubitaka) u programu Mathematica:



Slika 5a i 5b. Grafikoni dnevnih gubitaka / prirasta metodom:
a) povijesnom i b) Monte Carlo (Izvor: obrada autora)

4.3. Monte Carlo simulacija

Monte Carlo simulacija učinkovitija je od drugih postupaka za tri ili više stohastičkih varijabli. Vrijeme potrebno za Monte Carlo simulaciju raste približno linearno s brojem varijabli, dok se vrijeme potrebno za većinu drugih postupaka eksponencijalno povećava s brojem varijabli. Očekivana vrijednost (engl. drift) plus stohastička komponenta povrata sadržane su u formuli: $S_T = S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma \phi \sqrt{dt} \right]$ s ishodima u Tablici 1 (i Slici 5b).

Tablica 1. Podatci za izračun Monte Carlo metodom (Izvor: obrada autora)

	S&P 500	FTSE 100	CAC40	Nikkei 225
AVERAGE DAILY RETURN (S_T/S_0)	0,000409684	0,000392968	0,000168957	0,000118117
VARIANCE (σ^2)	0,000279398	0,000190859	0,000242250	0,000171972
DRIFT	0,000269985	-0,000488397	-0,000290082	0,000032130
STANDARD DEVIATION (σ)	0,016715190	0,013815166	0,015564366	0,013113827
RANDOM VALUE (ϕ)	-0,01169996	0,002961208	-0,013357475	-0,012688983

```
StandardDeviation[dataMonteCarloLossScenarios]
```

```
Out[2]= 120.393
```

```
Select[ReverseSort[dataMonteCarloLossScenarios], # > 400 &]
```

```
Out[3]= {922.484, 858.423, 653.541, 490.215, 422.291}
```

```
In[4]:= Mean[Select[ReverseSort[dataMonteCarloLossScenarios], # > 400 &]]
```

```
Out[4]= 669.391
```

Izvor: obrada autora

Kada portfelj nije linearno povezan s postotkom promjene tržišnih varijabli, povijesna i Monte Carlo simulacija mogu se upotrebljavati za procjenu vrijednosti pri riziku i očekivanog gubitka. Parametarska metoda pretpostavlja linearnost, tj. postotne promjene u tržišnim varijablama slijede normalnu razdiobu, pa se VaR i ES računaju iz svojstava te iste razdiobe. Tablica 2 zorno pokazuje navedene sličnosti i razlike.

Tablica 2. Prikaz značajnih vrijednosti – obilježja (u tisućama US\$)

	standardno odstupanje	vrijednost pri riziku	očekivani gubitak
parametarska	120,03	279,19	320,12
povijesna	120,15	422,29	669,39
Monte Carlo	120,39	422,29	669,39

Izvor: obrada autora

5. Zaključak

Vrijednost pri riziku (engl. Value at Risk) postao je standardna referenca za mjerenje financijskih rizika. Upotrebljava se za procjenu ukupnog rizika financijskog portfelja s određenom razinom povjerenja tijekom određenog vremenskog razdoblja. VaR se upotrebljava u financijskim institucijama, trgovačkim tvrtkama i regulatornim agencijama za određivanje kapitala koji treba zadržati da bi se pokrili rizici. Osim tržišnog rizika (engl. market risk) VaR metodologija upotrebljava se i za druge oblike rizika, tj. kreditni rizik (engl. credit risk), operativni rizik (engl. operational risk) i rizik likvidnosti (engl. liquidity risk). Činjenica da se VaR izračunava statističkom metodom, predstavlja ipak samo procjenu. U ovom radu prikazana je praktična primjena VaR metode uz korištenje računalnog programa Mathematica. Demonstriran je postupak izračuna vrijednosti pri riziku, kao i očekivani gubitak, na

primjeru portfelja koji se sastoji od četiri indeksa dionica (engl. stock indices). Mathematica računalni program omogućava učinkovito i precizno izračunavanje ovih mjera rizika čime pomaže u donošenju informiranih odluka o upravljanju financijskim rizicima.

Literatura

1. Carol, A. (2009). *Market Risk Analysis – Vol IV – Value-at-Risk Models*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd.
2. Holton, G. A. (2013). *Value-at-Risk: Theory and Practice*. <https://www.value-at-risk.net>
3. Hull, J. C. (2022). *Options, Futures and Other Derivatives*. Toronto: Pearson.
4. Jorion, Ph. (1995). *Big Bets Gone Bad*. San Diego: Academic Press.
5. Jorion, Ph. (2007). *Value at Risk – The New Benchmark for Managing Financial Risk*. New York: McGraw-Hill.
6. Mun, J. (2006). *Modeling Risk*. New Jersey: John Wiley & Sons.
7. Parkinson, D. i Noble, J. (2008). *Oxford Business English Dictionary*. Oxford: Oxford University Press.
8. Pearson, N. D. (2002). *Risk Budgeting – Portfolio Problem Solving with Value-at-Risk*. New York: John Wiley & Sons.
9. Wolfram, S. (2003). *The Mathematica Book*. Wolfram Media Inc.
10. Wong, C. Y. M. (2013). *Bubble Value at Risk*, Singapore, John Wiley & Sons.



Hands-On Value-at-Risk with *Mathematica*

Abstract

The history of finance is intertwined with financial losses that have led to the *Value-at-Risk* as a universal benchmark for managing financial risk. *VaR* is a statistical measure of possible portfolio losses due to market risk i.e. losses greater than the *VaR* are suffered only with a specified small probability. *VaR* has developed into an active risk management tool. With *VaR* on hand one can decide how to trade off risk. *Mathematica* software can be used to calculate *VaR*.

Key words: *Risk Metrics, Value-at-Risk, Expected Loss, Mathematica*