YU ISSN 0015—3206
FZKAAA 12 (4) 325 (1980)

LETTERS TO THE EDITOR

Новые точные решения уравнений Зйнштейна

А. М. ЗЙШИНСКИЙ

Вечерняя школа 46, Днепропетровск, СССР

Received 18 March 1980

UDC 530.12

Original scientific paper

The note presents a family of solutions of Einstein's field equations of general relativity for a static spherically symmetric distribution of charged fluid spheres. The note is a generalization of the results of T. Singh and R. B. S. Yadav.

1 В. статьях 1—3. авторы получили новые точные решения уравнений Зйнштейна, если заряд представлен в виде

$$Q = A\tau, \tag{1.1}$$

A-константа и выполняется условие

$$\tau^2 y'' - \tau y' - 2A^2 \tau^{2n-2} y = 0. \tag{1.2}$$

2. Наша цель решить поставленуы задачу, если заряд предсıавлен в виде

$$Q = A\,\tau^n, \; -1 < n < +\infty. \tag{2.1}$$

Введём условие

$$\tau^2 y'' - \tau y' + (-1 + C - 2A^2\, C\tau^{2n-2}) y = 0. \tag{2.2}$$

C-произвольная постоянная. Заметим, что если $C = 0$, то получаем »беззарядовый« случай Куховича[4], в случае если $C = 1$, получаем результат 1—3).

Если выполняется условие (1.2), то в обозначениях[1] получаем

$$T = \frac{1}{C} + \frac{\hat{C}_1}{C} \exp \left\{ 2C \int \frac{y\,(1 - 2\,A^2 \tau^{2n-2})\,\mathrm{d}\tau}{\tau\,(y + \tau y')} \right\}, \tag{2.3}$$

C_1-произвольная постоянная интегрирования. В правую часть (2.2) необходимо подставить решение уравнения (1.2).

Подстановка

$$\tau = \mathrm{e}^t \tag{2.4}$$

преобразует уравнение (2.2) в уравнение

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\,t^2} - 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\,t} + (-1 + C - 2A^2\,C\,\mathrm{e}^{2t(n-1)})\,y = 0. \tag{2.5}$$

Подстановка

$$y = \mathrm{e}^t \cdot y_1 \tag{2.6}$$

преобразует уравнение (2.5) в уравнение

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}\,t^2} + (-2 + C - 2A^2\,C\,\mathrm{e}^{2t(n-1)})\,y_1 = 0. \tag{2.7}$$

Подстановка

$$t\,(n - 1) = t_1, n \neq 1 \tag{2.8}$$

преобразует уравнение (2.7) в уравнение

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}t_1^2} + \left(- \frac{2 - C}{(n-1)^2} - \frac{2A^2\,C\,\mathrm{e}^{2t_1}}{(n-1)^2} \right) y_1 = 0. \tag{2.9}$$

Общее решение (2.9)[5] имеет вид:

$$y_1 = \begin{cases} C_1 \mathcal{J}_{\frac{\sqrt{2-C}}{|n-1|}}\left(+ \sqrt{-2C} \left| \frac{A}{n-1} \right| \mathrm{e}^{t_1} \right) + C_2 \mathcal{J}_{-\frac{\sqrt{2-C}}{|n-1|}}\left(\sqrt{-2C} \left| \frac{A}{n-1} \right| \mathrm{e}^{t_1} \right), & C < 0; \\ C_1 \mathcal{J}_{\frac{\sqrt{2-C}}{|n-1|}}\left(\mathrm{i}\sqrt{2C} \left| \frac{A}{n-1} \right| \mathrm{e}^{t_1} \right) + C_2 \mathcal{J}_{-\frac{\sqrt{2-C}}{|n-1|}}\left(\mathrm{i}\sqrt{2C} \left| \frac{A}{n-1} \right| \mathrm{e}^{t_1} \right), & 0 < C < 2; \end{cases} \tag{2.10}$$

$$y_1 = \begin{cases} C_1 J_0\left(2\mathrm{i}\left|\frac{A}{n-1}\right|\mathrm{e}^{t_1}\right) + C_2 Y_0\left(2\mathrm{i}\left|\frac{A}{n-1}\right|\mathrm{e}^{t_1}\right), \ \mathrm{i}=\sqrt{-1},\ C=2; \\ C_1 J_{\frac{\mathrm{i}\sqrt{C-2}}{|n-1|}}\left(\mathrm{i}\sqrt{2C}\left|\frac{A}{n-1}\right|\mathrm{e}^{t_1}\right) + C_2 J_{-\frac{\mathrm{i}\sqrt{C-2}}{|n-1|}}\left(\mathrm{i}\sqrt{2C}\left|\frac{A}{n-1}\right|\mathrm{e}^{t_1}\right),\ C>2. \end{cases} \tag{2.10}$$

C_1, C_2-произвольные интегрирования, J, Y — Бесселевы функции.

При $n = 1$ общее решение уравнения (2.5) имеет вид:

$$y = \begin{cases} C_1 \tau^{1+\sqrt{2A^2+2-C}} + C_2 \tau^{1-\sqrt{2A^2+2-C}},\ C < 2A^2+2; \\ C_1 \tau + C_2 \tau \ln \tau, \qquad C = 2A^2+2; \\ C_1 \tau \cos\left[\sqrt{C-(2A^2+2)}\ln\tau\right] + C_2 \tau \sin\left[\sqrt{C-(2A^2+2)}\ln\tau\right], \\ \qquad C > 2A^2+2. \end{cases} \tag{2.11}$$

Как видно физический смысл имеют решения при $C < 0$.

В этом случае общее решение уравнения (2.2) имеет вид:

$$y = \tau\left[C_1 J_{\frac{\sqrt{2-C}}{|n-1|}}\left(\sqrt{-2C}\left|\frac{A}{n-1}\right|\tau^{n-1}\right) + C_2 J_{-\frac{\sqrt{2-C}}{|n-1|}}\left(+\sqrt{-2C}\left|\frac{A}{n-1}\right|\tau^{n-1}\right)\right]. \tag{2.12}$$

Остаётся удовлетворить условям, что $\mathrm{e}^{-\lambda}$, e^{ν}, $\mathrm{e}^{\nu}\nu'$ должны сыить непрерывны на границе $\tau = \tau_0$.

Литература

1) T. Singh, R. B. S. Yadav, Acta Phys. Polon. B9, (1978), 475;
2) T. Singh, R. B. S. Yadav, Acta Phys. Polon. B9, (1978), 831;
3) T. Singh, R. B. S. Yadav, Acta Phys. Polon. B9, (1978) 838;
4) B. Kuchowicz, Acta Phys. Polon. Fasc. 4, **39**, (1968), 561;
5) A. M. Зишинский. Revue Roumaine Sci. Techn. — *Mecanique Appliquee*, **22**, (1977), 323.

NEKA EGZAKTNA RJEŠENJA EINSTEINOVIH JEDNADŽBI

A. M. EIŠINSKIJ

Večernja škola 46, Dnepropetrovsk, SSSR

UDK 530.12

Originalni znanstveni rad

U radu su dana rješenja Einsteinovih jednadžbi polja u općoj teoriji relativnosti za statičku sferno-simetričnu raspodjelu nabijenih kugala. Rad predstavlja generalizaciju rezultata koje su objavili T. Singh i R. B. S. Yadav.