



ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. svibnja 2025. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 1/301.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 212.

A) Zadatci iz matematike

4015. Nađi sve troznamenkaste prirodne brojeve koji pri dijeljenju s 37 daju ostatak 2, a pri dijeljenju s 11 ostatak 5.

4016. Dokaži da za svako $x > 0$ vrijedi jednakost

$$\sqrt{x}(x+1) + x(x-4) + 1 \geq 0.$$

4017. Odredi sve realne brojeve $b > 1$ takve da je

$$[\log_b x] = [\log_b \lfloor x \rfloor]$$

za sve realne $x \geq 1$.

4018. Odredi i skiciraj skup S u kompleksnoj ravnini ako je

$$S = \left\{ z \in \Gamma : 0 < \arg \frac{z-i}{z+i} < \frac{\pi}{4} \right\}.$$

4019. Pokaži da je

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1x + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2x + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3x + b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^3) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

4020. Pravokutnik je upisan u trokut sa stranicama 10 cm, 17 cm i 21 cm, tako da dva njegova vrha leže na jednoj stranici trokuta. Odredi stranice pravokutnika ako je njegov opseg 22.5 cm.

4021. Dijagonale konveksnog četverokuta $ABCD$ sijeku se u točki O pod pravim kutom tako da je $|AO| = 8$, $|BO| = |CO| = 1$ i $|DO| = 7$. Produžeci stranica $|AB|$ i $|CD|$ sijeku se u točki M . Koliki je $\sphericalangle AMD$?

4022. Neka su a , b , c duljine stranica trokuta sa svojstvom da su za svaki prirodan broj n , a^n , b^n , c^n duljine stranica trokuta. Dokaži da je trokut jednakokrakan.

4023. Dan je paralelogram $ABCD$, E točka osnosimetrična točki B u odnosu na pravac AC i F sjecište pravaca AE i CD . Dokaži da su trokuti ADF i CEF sukladni.

4024. Neka je $x = \sin 18^\circ$. Dokaži da je $4x^2 + 2x = 1$.

4025. Za kutove trokuta vrijedi $\alpha : \beta : \gamma = 4 : 2 : 1$. Dokaži da za njihove stranice vrijedi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$.

4026. Vrh C paralelograma $ABCD$ spojen je s polovištem L stranice $\overline{AD}$. Na dužini $\overline{LC}$ izabrane su točke M i N tako da je BM paralelna s DN (točka N je između L i M). Odredi omjer površina mnogokuta $ABMND$ i trokuta CDN .

4027. Na stolu se nalazi a bijelih, b crnih i c crvenih kuglica. U jednom koraku može se izabrati dvije kuglice različitih boja i zamijeniti ih s kuglicom treće boje. Na kraju ostane samo jedna kuglica čija boja ne ovisi o toku igre. Kada se to može dogoditi?

4028. Ako je p prost broj, dokaži $(p-1)! \equiv p-1 \pmod{1+2+\dots+p-1}$.

B) Zadatci iz fizike

OŠ – 546. Staza koja od Bjelskog vodi na vrh Kleka je duga 2.9 km. Izletnici su krenuli u 9:30 i na vrh su stigli u 11:05, ali su se u planinarskom domu, prije glavnog uspona, odmarali 15 minuta. Na vrhu su proveli 10 minuta. Silazak im je bio lakši pa su se na Bjelsko vratili već u 11:45. Koliko je puta prosječna brzina silaska veća od prosječne brzine uspinjanja?

OŠ – 547. Najhladniji planet u Sunčevom sustavu nije Neptun, najdalji od Sunca, nego Uran. Prosječna udaljenost Urana od Sunca iznosi oko 2.871 milijardu kilometara, dok je Neptunova oko 4.5 milijarde kilometara. Uran je u prošlosti imao sudar s nekim velikim tijelom što ga je "prevrnulo na bok", os rotacije mu je na gnuta 98 stupnjeva u odnosu na putanju oko

Sunca. U tom je sudaru vjerojatno izgubio dio svoje topline. Koliko dulje putuje Sunčeva svjetlost do Neptuna nego do Urana? Brzina svjetlosti u vakuumu iznosi 299 792 458 m/s.

OŠ – 548. U utrci na 100 m je mjereno vrijeme ubrzavanja trkača koji kreće iz niskog starta. Izmjereno je da je on 2 s ubrzavao i nakon toga je do cilja trčao stalnom brzinom. Utrku je istrčao za 10.2 s. Koliku je brzinu postigao tijekom ubrzavanja?

OŠ – 549. Etanol na 20 °C ima gustoću 789 kg/m³. Kad ga se zagrije za 1 °C njegov se obujam poveća za $1.1 \cdot 10^{-3}$ početnog volumena. Kolika će biti gustoća pola litre etanola početne temperature 20 °C ako ju se 2 minute zagrijava grijačem snage 200 W? Specifični toplinski kapacitet etanola je 2400 J/kgK.

1861. Nuklearni fizičar mjeri aktivnost radioaktivnog uzorka u različitim trenucima. U prvom (A) rundi mjerenja mjeri je točno u 8 sati ujutro (8:00:00 h) te zatim točno u 9 sati ujutro i za omjer tih aktivnosti dobiva vrijednost 1/3. Ako drugu (B) rundu mjerenja započinje točno u 10 sati ujutro, u kojem trenutku mora ponoviti mjerenje da bi za omjer tih dviju aktivnosti dobio vrijednost 1/6? Izrazite rezultat u obliku sat:minuta:sekunda.

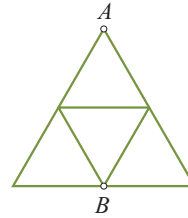
1862. Valjak polumjera 10 cm zarotiramo početnom kutnom brzinom od 10 okretaja u sekundi te ga pažljivo spustimo na horizontalnu podlogu. Čim ga postavimo na podlogu, prestanemo ga pridržavati. Zbog proklizavanja njegova oboda po podlozi dinamičko trenje će ga translacijski ubrzavati te istovremeno rotacijski usporavati sve dok obodna brzina ne postane jednaka translacijskoj brzini valjka. Uz pretpostavku da nema trenja kortljanja, valjak se nakon toga nastavlja gibati konstantnom brzinom, kontrolajući se bez proklizavanja. Izračunajte konačnu brzinu valjka ako je on:

a) šupalj, tako da je sva masa raspodijeljena duž vrlo tankoga plašta zadanog polumjera;

b) pun i homogen.

1863. Na slici je prikazan strujni krug sastavljen od otpornih žica. Sve žice imaju ista otporna svojstva (otpornost i površinu poprečnog presjeka), a svi prikazani trokuti su jednakos-tranični. Ako je otpor najkraćeg ravnog komada

žice 1 Ω, koliki je ukupan otpor kruga između točaka A i B?



Uputa. Nemojte odmah napasti problem računom. Neke od žica mogu se ukloniti iz priče pravilnim argumentom.

1864. Dva točkasta izvora svjetlosti udaljena su 1 m. Kamo, duž pravca na kojem leže izvori, treba postaviti konvergentnu leću žarišne duljine 18 cm da bi im se slike našle u istoj točki? Kolika je udaljenost obiju slika od leće? Kakva je priroda tih slika (realna, virtualna)? Gdje se može naći leća: na spojnici izvora (između njih), van njihove spojnice ili oboje? Gdje se nalazi slika? Skicirajte relativne položaje izvora, leće i slike.

1865. U otvorenoj posudi od jedne litre nalazi se pola litre vode. Vodu pri atmosferskome tlaku zagrijavamo do vrenja. U trenutku dostizanja vrelišta (100 °C) posudu hermetički zatvaramo te je nastavljamo zagrijavati. Koliki će biti tlak u posudi nakon što vodi prenesemo još 200 kJ topline? Zrak i vodenu paru smatrajte idealnim plinovima. Pretpostavite da tlak ne utječe na latentnu toplinu isparavanja. Atmosferski tlak je 10⁵ Pa. Gustoća vode je 1000 kg/m³. Latentna toplota isparavanja vode je 2260 kJ/kg. Molarna masa vode je 18 g/mol.

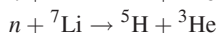
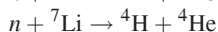
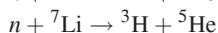
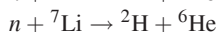
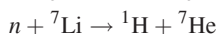
1866. Kamen mase 0.5 kg privezan je za konop duljine 50 cm i rotira u vertikalnoj ravni brzinom stalnoga iznosa. Napetost konopa u najnižoj točki kružne putanje je 45 N. Ako konop pukne u trenutku kad je brzina kamena usmjerena vertikalno uvis, do koje će se visine (mjereno od točke odvajanja od konopa) dignuti kamen? Koristi $g = 10 \text{ m/s}^2$.

(Zadatak osmislio Duje Dragan.)

1867. Čestica mase m_a sudara se s mirujućom česticom mase m_b , pri čemu dolazi do reakcije nakon koje područje međudjelovanja napuštaju čestice mase m_c i m_d ($m_a + m_b < m_c +$

m_d). Odredi minimalnu potrebnu energiju čestice 'a' da bi reakcija bila moguća (tj. energiju praga reakcije). Potreban je relativistički račun.

Primjenom dobivenog rješenja izračunaj energijske pragove sljedećih reakcija:



u kojoj neutron naliječe na mirujuću atomsku jezgru ${}^7\text{Li}$. Izrazi te energije u megaelektronvoltima (MeV). Nuklearne mase u jedinicama MeV/c^2 su:

$$m(n) = 939.565 \quad \text{i} \quad m({}^7\text{Li}) = 6533.833$$

te:

$$m({}^1\text{H}) = 938.272; \quad m({}^7\text{He}) = 6545.509$$

$$m({}^2\text{H}) = 1875.613; \quad m({}^6\text{He}) = 5605.534$$

$$m({}^3\text{H}) = 2808.921; \quad m({}^5\text{He}) = 4667.679$$

$$m({}^4\text{H}) = 3750.086; \quad m({}^4\text{He}) = 3727.379$$

$$m({}^5\text{H}) = 4689.852; \quad m({}^3\text{He}) = 2808.391$$

(Zadatak osmislio Duje Dragan.)

C) Rješenja iz matematike

3987. Nadi sve prirodne brojeve x i y takve da je

$$2x + y \equiv 4 \pmod{17}$$

$$5x - 5y \equiv 9 \pmod{17}.$$

Rješenje. Iz prve kongruencije imamo

$$y \equiv 4 - 2x \pmod{17}$$

i uvrštavanjem u drugu

$$5x - 5y \equiv 5x - 5(4 - 2x)$$

$$\equiv 15x - 20 \equiv 9 \pmod{17}$$

$$\implies 15x \equiv 29 \equiv 12 \pmod{17}$$

Kako je $m(17, 3) = 1$ vrijedi

$$5x \equiv 4 \pmod{17}$$

$$5x \equiv 4 - 34 \pmod{17}$$

$$5x \equiv -30 \pmod{17}.$$

Zbog $m(5, 17) = 1$, opet imamo

$$x \equiv -6 \pmod{17}$$

$$x \equiv 11 \pmod{17}.$$

Još je sad

$$y \equiv -18 \pmod{17}$$

$$y \equiv 16 \pmod{17}.$$

Provjera:

$$2x + y \equiv 2 \cdot 11 + 16 = 38 \equiv 4 \pmod{17}$$

$$5x - 5y \equiv 5 \cdot 11 - 5 \cdot 16 = 25 \equiv 9 \pmod{17}.$$

Duje Dodig (4),

Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

3988. Dokaži da za svaki prirodni broj $n > 2$ vrijedi

$$\sqrt[n]{n!} > \sqrt{n}.$$

Prvo rješenje. Dana nejednakost je ekvivalentna s $(n!)^2 > n^n$. Uočimo da za svaki k , $1 < k < n$ vrijedi $k(n+1-k) > n$ (jer kvadratna funkcija $f(k) = -k^2 + (n+1)k - n$ ima različite nultočke $k = 1$ i $k = n$, a graf joj je okrenut otvorom prema dolje).

Stoga vrijede nejednakosti:

$$1 \cdot n = n,$$

$$2(n-1) > n,$$

$$3(n-2) > n,$$

$\vdots$

$$n \cdot 1 = n$$

(među njima barem jedna strogo vrijedi za $n > 2$). Množenjem ovih nejednakosti slijedi $(n!)^2 > n^n$, a time i dana nejednakost.

Duje Dodig (4), Zagreb

Drugo rješenje. Metodom matematičke indukcije dokazat ćemo ekvivalentnu jednakost

$$(n!)^2 > n^n, \quad \text{za } n > 2.$$

Kako je $(3!)^2 = 36 > 27 = 3^3$ nejednakost vrijedi za $n = 3$.

Pretpostavimo da ona vrijedi za neko $n = k \geq 3$, tj. $(k!)^2 > k^k$ i dokažimo da vrijedi i za $n = k + 1$.

Iz pretpostavke slijedi

$$\begin{aligned}(k+1)!^2 &= (k+1)^2 \cdot k!^2 \\ &> (k+1)^2 \cdot k^k = (k+1)^2 \cdot k^{k-1} \cdot k \\ &> (k+1)^2 \cdot k^{k-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \\ &= \frac{k+1}{k} (k+1)^{k+1} > (k+1)^{k+1}.\end{aligned}$$

Druga nejednakost slijedi iz Eulerove nejednakosti

$$k \geq 3 > e > \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k.$$

Dakle, nejednakost vrijedi za $n = k + 1$.

*Franka Horvat (2),
X. gimnazija "Ivan Supek", Zagreb*

3989. Dokaži da za prirodne brojeve a , b , c vrijedi

$$\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} \geq \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Prvo rješenje. Koristit ćemo često primjenjivanu nejednakost: za pozitivne x , y , z i realne brojeve a , b , c vrijedi

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.$$

Sada je:

$$\begin{aligned}&\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} \\ &= \frac{a^4}{a(b+c)} + \frac{b^4}{b(c+a)} + \frac{c^4}{c(a+b)} \\ &\geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{ab + ac + bc + ab + ac + bc}\end{aligned}$$

(također iskoristimo poznatu nejednakost $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$)

$$\begin{aligned}&\geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2(a^2 + b^2 + c^2)} \\ &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).\end{aligned}$$

Jednakost se postiže ako i samo ako je $a = b = c$.

Duje Dodig (4), Zagreb

Drugo rješenje. Korištenjem nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za dva

pozitivna broja imamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{a(b+c)}{4} \right) &\geq \sqrt{\frac{a^2}{b+c} \cdot \frac{a(b+c)}{4}} \\ \frac{a^2}{b+c} + \frac{a(b+c)}{4} &\geq a^2.\end{aligned}$$

Analogno dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{b^2}{c+a} + \frac{b(c+a)}{4} &\geq b^2 \quad \text{i} \\ \frac{c^2}{a+b} + \frac{c(a+b)}{4} &\geq c^2.\end{aligned}$$

Zbrajanjem ove tri nejednakosti imamo

$$\begin{aligned}&\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \\ &+ \frac{a(b+c)}{4} + \frac{b(c+a)}{4} + \frac{c(a+b)}{4} \\ &\geq a^2 + b^2 + c^2 \\ &\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \\ &\geq a^2 + b^2 + c^2 - \frac{1}{2}(ab + bc + ca).\end{aligned} \quad (1)$$

Budući da vrijedi nejednakost

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0,$$

koja je ekvivalentna

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2,$$

iz (1) slijedi tvrdnja.

Ur.

3990. Dokaži da za a , b , c , $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ iz jednakosti

$$2 \cdot \log_b x = \log_a x + \log_c x$$

slijedi $c^2 = (ac)^{\log_a b}$.

Rješenje. Koristeći jednakost

$$\log_a b \cdot \log_b x = \log_a x,$$

polaznu jednakost pišemo:

$$\begin{aligned}2 \cdot \frac{\log_a x}{\log_a b} &= \log_a x + \frac{\log_a x}{\log_a c} \\ \implies 2 \cdot \log_a c &= (1 + \log_a c) \cdot \log_a b \\ &= \log_a b \cdot (\log_a a + \log_a c) \\ &= \log_a b \cdot \log_a (ac) \\ \log_a c^2 &= \log_a (ac)^{\log_a b} \\ \implies c^2 &= (ac)^{\log_a b}.\end{aligned}$$

Duje Dodig (4), Zagreb

3991. Odredi i u kompleksnoj ravlini skiciraj skup

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z-2-a}{1+2\bar{a}-z\bar{a}} \right| \leq 1, \right. \\ \left. \forall a \in \mathbb{C}, |a| \neq 1 \right\}.$$

Nadi one korijene jednađbe $z^8 = -16$ koji su u skupu S .

Rješenje. Najprije ćemo po de Moivreovoj formuli riješiti jednađbu $z = \sqrt[8]{-16}$. Dobijemo rješenja

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right), \\ z_2 &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right), \\ z_3 &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8} \right), \\ z_4 &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{8} + i \sin \frac{7\pi}{8} \right), \\ z_5 &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8} \right), \\ z_6 &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{8} + i \sin \frac{11\pi}{8} \right), \\ z_7 &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{13\pi}{8} + i \sin \frac{13\pi}{8} \right), \\ z_8 &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{15\pi}{8} + i \sin \frac{15\pi}{8} \right). \end{aligned}$$

Sada iz uvjeta zadatka

$$\begin{aligned} \left| \frac{z-2-a}{1+2\bar{a}-z\bar{a}} \right| &\leq 1 \\ \Rightarrow \left| \frac{z-2-a}{1-(z-2)\bar{a}} \right| &\leq 1, \end{aligned}$$

uvedimo supstituciju $u = z - 2$. Imamo

$$\begin{aligned} |u-a| &\leq |1-\bar{a}u| \\ |u-a|^2 &\leq |1-\bar{a}u|^2 \\ (u-a) \cdot (\bar{u}-\bar{a}) &\leq (1-\bar{a}u)(1-a\bar{u}) \\ |u|^2 - a\bar{u} - \bar{a}u + |a|^2 &\leq 1 - a\bar{u} - \bar{a}u + |a|^2 |u|^2 \\ |u|^2 - |a|^2 |u|^2 &\leq 1 - |a|^2 \end{aligned}$$

$$(1 - |a|^2)|u|^2 \leq 1 - |a|^2. \quad (1)$$

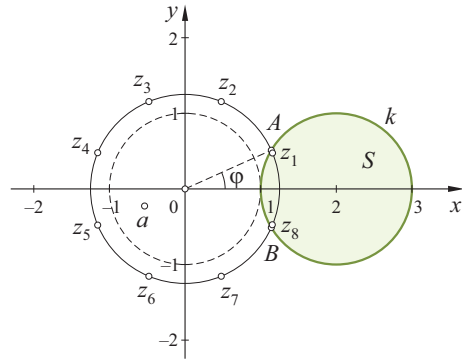
Razlikujemo dva moguća slučaja.

1° $|a| < 1$

Tada iz (1) imamo $|u|^2 \leq 1$, tj. $S = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| \leq 1\}$, što predstavlja nutrinu zatvorenog kruga polumjera 1 i središtem u točki (2,0). Uočimo da je zadovoljen i uvjet

$$1 - u\bar{a} \neq 0 \Rightarrow u \neq \frac{1}{\bar{a}}$$

jer je $|u| \leq 1$, a $\left| \frac{1}{\bar{a}} \right| = \frac{1}{|a|} = \frac{1}{|a|} > 1$. Znači, sve točke unutar kružnice k elementi su skupa S .



Presjek kružnica $(x-2)^2 + y^2 = 1$ i $x^2 + y^2 = 2$ su točke $A\left(\frac{5}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ i $B\left(\frac{5}{4}, -\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$.

Kako je

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{7}}{5} \\ \Rightarrow \varphi &= 27^\circ 53' 8'' > \frac{\pi}{8} = 22^\circ 30', \end{aligned}$$

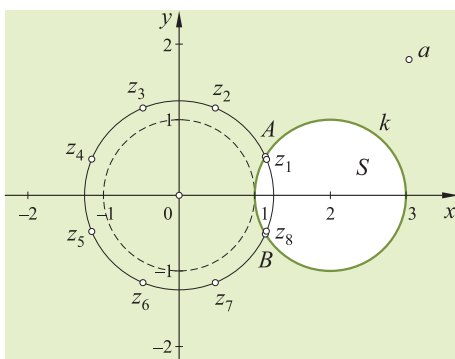
vidimo da su u ovom slučaju z_1 i z_8 iz skupa S . U ovom slučaju izabrani kompleksni broj $a \notin S$.

2° $|a| > 1$

Tada je opet iz (1) $|u|^2 \geq 1$, što predstavlja vanjštinu zatvorenog kruga polumjera 1 i središtem u točki (2,0). onovno vrijedi uvjet

$$1 - u\bar{a} \neq 0 \Rightarrow u \neq \frac{1}{\bar{a}}$$

jer je $|u| \geq 1$, a $\left| \frac{1}{\bar{a}} \right| = \frac{1}{|a|} = \frac{1}{|a|} < 1$.



U ovom slučaju su $z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7 \in S$, a $a \in S$ ili $a \in S$ (ako je izabran unutar kružnice k).

Duje Dodig (4), Zagreb

3992. Dokaži da u pravilnom mnogokutu $A_0A_1A_2 \dots A_{3n-1}$ vrijedi jednakost

$$|A_0A_{n+1}| - |A_0A_{n-1}| = |A_0A_1|.$$

Rješenje. Kako je

$$|A_0A_1| = 2R \sin \alpha$$

$$|A_0A_{n+1}| = 2R \sin(n+1)\alpha \quad \text{i}$$

$$|A_0A_{n-1}| = 2R \sin(n-1)\alpha,$$

(2α – središnji kut, R – polumjer opisane kružnice) dana jednakost ekvivalentna je s

$$\sin(n+1)\alpha - \sin(n-1)\alpha = \sin \alpha. \quad (1)$$

U pravilnom poligonu s $3n$ stranica je $3n\alpha = \pi$, pa je

$$\cos n\alpha = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Primjenom adicijske formule za razliku sinusa dobivamo

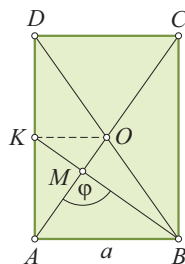
$$\begin{aligned} \sin(n+1)\alpha - \sin(n-1)\alpha &= \sin n\alpha \cdot \cos \alpha + \cos n\alpha \cdot \sin \alpha \\ &\quad - (\sin n\alpha \cdot \cos \alpha - \cos n\alpha \cdot \sin \alpha) \\ &= 2 \cos n\alpha \cdot \sin \alpha \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha = \sin \alpha, \end{aligned}$$

tj. (1) vrijedi.

Duje Dodig (4), Zagreb

3993. Točka K je polovište stranice $\overline{AD}$ pravokutnika $ABCD$. Odredi kut između dužine $\overline{BK}$ i dijagonale $\overline{AC}$ ako je $|AD| : |AB| = \sqrt{2}$.

Rješenje. Stavimo li $|AB| = a$, $|AD| = a\sqrt{2}$.



Iz sličnosti $\triangle ABM$ i $\triangle OKM$ ($KO \parallel AB$) imamo:

$$|KO| : |AB| = |KM| : |MB|$$

$$1 : 2 = |KM| : |MB|$$

$$|KM| = \frac{1}{2}|MB|$$

$$|KM| + |MB| = |BK|$$

$$|MB| = \frac{2}{3}|BK|$$

$$|KO| : |AB| = |OM| : |AM|$$

$$1 : 2 = |OM| : |AM|$$

$$|AM| = 2 \cdot |OM|$$

$$|AM| + |MO| = |AO|$$

$$|AM| = \frac{2}{3}|AO|.$$

Prema Pitagorinu poučku je:

$$|BK| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}a \quad \text{i}$$

$$|AO| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Sada je

$$|AM| = \frac{\sqrt{3}}{3}a \quad \text{i} \quad |BM| = \frac{\sqrt{6}}{3}a.$$

Na koncu iz kosinusovog poučka za trokut ABM je:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{|AM|^2 + |BM|^2 - a^2}{2|AM| \cdot |BM|} \\ &= \frac{\frac{1}{3}a^2 + \frac{2}{3}a^2 - a^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}a \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}a} = 0 \implies \varphi = 90^\circ. \end{aligned}$$

Duje Dodig (4), Zagreb

3994. Dan je trokut ABC . Na produženju stranica $\overline{AB}$, $\overline{CB}$ i težišnice $\overline{MB}$ preko točke B dane su točke K , L , N tako da je $|BK| : |AB| = 3$, $|BL| : |CB| = 5$ i $|BN| : |MB| = 4$. Koliki je omjer površina trokuta ABC i KLM ?

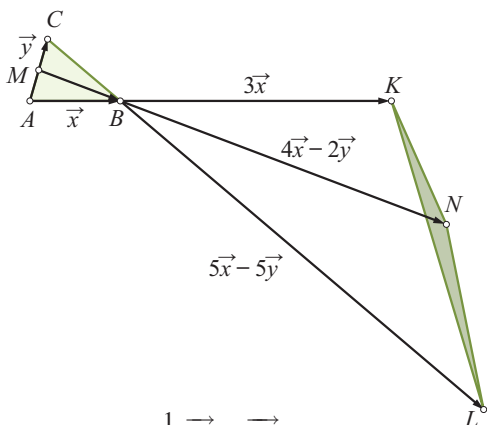
Prvo rješenje. $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{y} = \overrightarrow{AC}$. Neka je

$$\vec{x} = a\vec{i} + b\vec{j},$$

$$\vec{y} = c\vec{i} + d\vec{j}$$

Tada je

$$\begin{aligned} P_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} |\vec{x} \times \vec{y}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} |ad - bc|, \end{aligned}$$



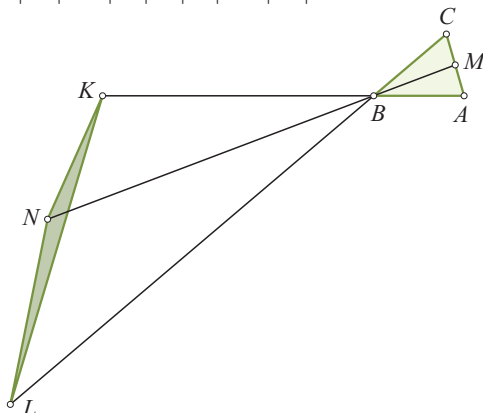
$$\begin{aligned} P_{\triangle KLM} &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{KL} \times \overrightarrow{KN}| \\ &= \frac{1}{2} |(2\vec{x} - 5\vec{y}) \times (\vec{x} - 2\vec{y})| \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2a - 5c & 2b - 5d & 0 \\ a - 2c & b - 2d & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} |(2a - 5c)(b - 2d) - (a - 2c)(2b - 5d)| \\ &= \frac{1}{2} |ad - bc|. \end{aligned}$$

Dakle, $P_{\triangle ABC} : P_{\triangle KLM} = 1 : 1$.

Duje Dodig (4), Zagreb

Drugo rješenje. Neka je P površina $\triangle ABC$. Kako je $\overline{MB}$ težišnica $\triangle ABC$ vrijedi $P_{ABM} = P_{MBC} = \frac{1}{2}P$. U trokutima BLK i ABC su jed-

naki kutovi uz vrh B i prema uvjetu zadatka je $|BK| = 3|AB|$ i $|BL| = 5|CB|$.



Kako je površina trokuta jednaka umnošku dvi-ju stranica i kuta među njima to je

$$P_{BLK} = 15P_{ABC} = 15P.$$

Analogno je

$$P_{BLN} = 10P \quad \text{i} \quad P_{BNK} = 6P,$$

Kako je

$$P_{BLN} + P_{BNK} > P_{BLK},$$

točka N je izvan trokuta BLK . Dakle,

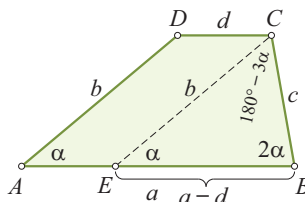
$$P_{KLN} = P_{BLN} + P_{BNK} - P_{BLK} = P, \quad \text{tj.}$$

$$P_{ABC} : P_{KLN} = 1 : 1.$$

Ur.

3995. Duljina veće baze trapeza jednaka je a , bočne stranice su mu b i c ($b > c$) i kutovi uz veću bazu odnose se kao $2 : 1$. Odredi manju bazu.

Prvo rješenje. Označimo elemente trapeza kao na slici.



Poučak o sinusima za $\triangle EBC$ daje:

$$\frac{b}{\sin 2\alpha} = \frac{c}{\sin \alpha}$$

$$\frac{b}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{c}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{b}{2c}.$$

Kosinusov poučak za taj isti trokut glasi:

$$\begin{aligned}(a-d)^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(180^\circ - 3\alpha) \\ &= b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos 3\alpha \\ &= b^2 + c^2 + 2bc \cdot (4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha) \\ &= b^2 + c^2 + 2bc \cdot \left(\frac{b^3}{2c^3} - \frac{3b}{2c} \right) \\ &= \frac{b^4}{c^2} - 2b^2 + c^2 \\ &= \left(\frac{b^2}{c} - c \right)^2 \quad \sqrt{} \\ a-d &= \frac{b^2}{c} - c = \frac{b^2 - c^2}{c}\end{aligned}$$

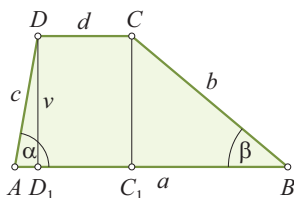
(jer su i $a > d$ i $b > c$).

$$\text{Dakle, } d = \frac{c^2 + ac - b^2}{c}.$$

Helena Rukavina (4),
Gimnazija "Isidora Sekulić", Novi Sad

Drugo rješenje.

$$\begin{aligned}d &= a - |AD_1| - |BC_1| \\ &= a - c \cos \alpha - b \cos \beta \\ &= a - c \cos 2\beta - b \cos \beta \\ &= a - c(2\cos^2 \beta - 1) - b \cos \beta.\end{aligned}$$



Nadalje,

$$\begin{aligned}v &= c \sin \alpha = b \sin \beta \\ 2c \sin \beta \cos \beta &= b \sin \beta\end{aligned}$$

$$b = 2c \cos \beta \quad \text{tj.} \quad \cos \beta = \frac{b}{2c}.$$

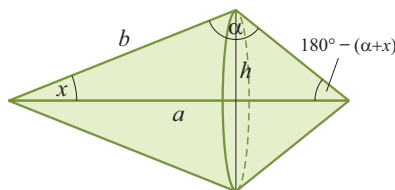
Dobivamo

$$\begin{aligned}d &= a - c \left(2 \cdot \left(\frac{b}{2c} \right)^2 - 1 \right) - b \cdot \frac{b}{2c} \\ &= a - \frac{b^2}{c} + c = \frac{ac + c^2 - b^2}{c}.\end{aligned}$$

Ur.

3996. U trokutu je zadana stranica a i nasuprotni kut α . Koliki moraju biti druga dva kuta da tijelo koje nastaje rotacijom trokuta oko polazne stranice bude maksimalnog volumena.

Rješenje. Ako je drugi kut x , treći je $180^\circ - (\alpha + x)$.



Volumen tijela je $V = \frac{1}{3}h^2\pi a$, gdje je h visina trokuta na a .

$$h = b \sin \alpha,$$

$$a : b = \sin \alpha : \sin(180^\circ - (\alpha + x)),$$

$$b = \frac{a \sin(\alpha + x)}{\sin \alpha}$$

$$b = \frac{a \sin x \sin(\alpha + x)}{\sin \alpha}$$

$$V = \frac{a^3 \pi}{3 \sin^2 \alpha} \sin^2 x \sin^2(\alpha + x).$$

Treba odrediti kut x za koji će $\sin^2 x \sin^2(\alpha + x)$ biti maksimalan. Imamo

$$\sin^2 x \sin^2(\alpha + x)$$

$$= \frac{1}{4}(\cos \alpha - \cos(\alpha + 2x))^2.$$

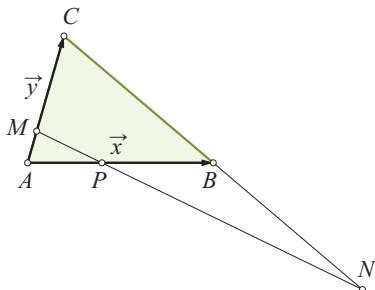
Da bi ovaj izraz bio maksimalan mora $\cos(\alpha + 2x)$ biti maksimalan, a to je za $\alpha + 2x = 180^\circ$, odakle je $x = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Trokut je jednakokrčan.

Ur.

3997. U trokutu je zadana stranica a i nasuprotni kut α . Koliki moraju biti druga dva kuta da tijelo koje nastaje rotacijom trokuta oko polazne stranice bude maksimalnog volumena.

Rješenje. Neka je $\vec{AB} = \vec{x}$ i $\vec{AC} = \vec{y}$. Sada je

$$\begin{aligned}\vec{CB} &= \vec{BN} = \vec{x} - \vec{y}, \quad \text{te} \\ \vec{AP} &= \lambda \vec{AB} = \lambda \vec{x} \\ \vec{MP} &= \mu \vec{MN}.\end{aligned}\quad (1)$$



Imamo:

$$\begin{aligned}\vec{MN} &= \vec{MC} + \vec{CN} = \frac{2}{3}\vec{y} + 2(\vec{x} - \vec{y}) \\ &= 2\vec{x} - \frac{4}{3}\vec{y} \\ \vec{AP} &= \vec{AM} + \vec{MP} = \frac{1}{3}\vec{y} + \mu \vec{MN} \\ &= \frac{1}{3}\vec{y} + \mu \left(2\vec{x} - \frac{4}{3}\vec{y} \right) \\ &= 2\mu \vec{x} \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}\mu \right) \vec{y}.\end{aligned}\quad (2)$$

Iz jednakosti vektora i (1) i (2) imamo sustav:

$$\left. \begin{aligned}\lambda &= 2\mu \\ -\frac{4}{3}\mu + \frac{1}{3} &= 0\end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}, \quad \mu = \frac{1}{4}.$$

Znači, traženi omjeri su:

$$|AP| : |PB| = 1 : 1 \quad \text{i} \quad |MP| : |PN| = 1 : 3.$$

Duže Dodig (4), Zagreb

3998. Nadi površinu trokuta s kutovima α , β , γ ako su udaljenosti točke M , unutar trokuta, do njegovih stranica redom jednake m , n , k .

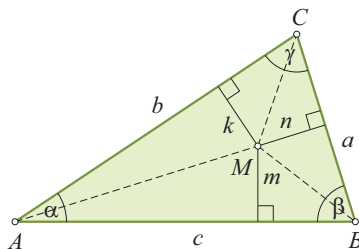
Rješenje.

$$P = \frac{1}{2} |AC| \cdot |BC| \cdot \sin \gamma$$

Koristeći sinusov poučak je:

$$|AC| = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} |AB|, \quad |BC| = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} |AB|$$

$$\Rightarrow P = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{2 \sin \gamma} |AB|^2. \quad (1)$$



Nadalje, još je:

$$\begin{aligned}P &= P_{AMB} + P_{BMC} + P_{AMC} \\ &= \frac{1}{2} |AB| \cdot m + \frac{1}{2} |BC| \cdot b + \frac{1}{2} |AC| \cdot k \\ &= \frac{m \cdot \sin \gamma + n \cdot \sin \alpha + k \cdot \sin \beta}{2 \sin \gamma} |AB|.\end{aligned}\quad (2)$$

Iz (1) i (2) slijedi

$$|AB| = \frac{m \cdot \sin \gamma + n \cdot \sin \alpha + k \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \sin \beta},$$

pa je iz (1)

$$P = \frac{(n \cdot \sin \alpha + k \cdot \sin \beta + m \cdot \sin \gamma)^2}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}.$$

Duže Dodig (4), Zagreb

3999. Riješi nejednadžbu

$$\frac{\sin \frac{5x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} + \frac{\cos \frac{5x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \geq 2.$$

Rješenje. Uz pomoć adicijskih formula imamo:

$$\begin{aligned}\frac{\sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \cos \frac{5x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} &\geq 1 \\ \frac{\sin \left(\frac{5x}{2} + \frac{x}{2} \right)}{\sin x} &\geq 1 \\ \frac{\sin 3x}{\sin x} - 1 &\geq 0 \\ \frac{\sin 3x - \sin x}{\sin x} &\geq 0 \\ \frac{2 \cos 2x \sin x}{\sin x} &\geq 0.\end{aligned}$$

Ova nejednadžba ekvivalentna je s:

$$\cos 2x \geq 0 \quad \text{i} \quad \sin x \neq 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad x \neq k\pi$$

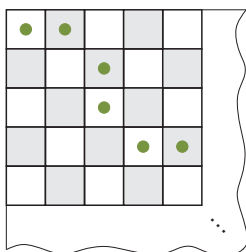
$$\Rightarrow -\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad x \neq k\pi,$$

gdje je k bilo koji cijeli broj.

Duje Dodig (4), Zagreb

4000. Koliki je maksimalni broj topova koji se mogu smjestiti na šahovsku ploču $3n \times 3n$ tako da svaki od njih napada najviše jednog od preostalih.

Rješenje. Budući da neki top napada drugoga ako i samo ako drugi napada prvoga, vidimo da se topovi smješteni na traženi način mogu podijeliti u parove. Svaki od tih parova se nalazi u nekoj liniji ili nekom redu.



Neka je tako raspoređeno $2x$ topova koji se u parovima napadaju i y topova koji se ne napadaju niti s jednim drugim topom na ploči. Dva topa koja se međusobno napadaju nalaze se na 3 linije ili reda, a top koji se ni s kime ne napada je na 1 liniji i 1 redu (red je vodoravan, a linija uspravna). Tako je napadnuto $3x+2y$ linija i redova. Kako je ukupan broj linija i redova $6n$, vrijedi $3x+2y \leq 6n$. Broj smještenih topova je $2x+y$ i vrijedi nejednakost

$$\begin{aligned} 2x+y &\leq \frac{2}{3}(3x+2y) \\ &\leq \frac{2}{3} \cdot 6n = 4n. \end{aligned}$$

S druge strane, $4n$ topova možemo rasporediti na ploči $3n \times 3n$ na traženi način kako je prikazano na slici. Dakle, najviše možemo postaviti $4n$ topova koji zadovoljavaju tražene uvjete.

Duje Dodig (4), Zagreb

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 538. Luka je istraživao silu trenja u vodi pomoću drvene kugle mase 300 g. Kad bi kuglu gurnuo u vodu na dubinu pola metra i pustio, ona bi iskočila iz vode do visine 20 cm. Kolika je prosječna sila trenja na kuglu dok se gibala kroz vodu? Gustoća drva od kojeg je napravljena iznosi 600 kg/m^3 , a gustoća vode je 1000 kg/m^3 . Akceleracija sile teže je približno 10 m/s^2 .

Rješenje.

$$m = 300 \text{ g} = 0.3 \text{ kg}$$

$$h_1 = 0.5 \text{ m}$$

$$h_2 = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}$$

$$\rho_{\text{kugla}} = 600 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_{\text{voda}} = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$F_{\text{tr}} = ?$$

$$E_{\text{gp}} = mgh_2$$

$$E_{\text{gp}} = 0.3 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 0.2 \text{ m}$$

$$E_{\text{gp}} = 0.6 \text{ J} = E_{\text{kinetička}}$$

$$E_{\text{kinetička}} = F_{\text{rezultantna}} \cdot h_1$$

$$F_{\text{rezultantna}} = \frac{E_{\text{kinetička}}}{h_1} = \frac{0.6 \text{ J}}{0.5 \text{ m}} = 1.2 \text{ N}$$

$$G = mg = 0.3 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 3 \text{ N}$$

$$F_{\text{uzgon}} = \rho_{\text{voda}} g V$$

$$V = \frac{m}{\rho_{\text{kugle}}} = \frac{0.3 \text{ kg}}{600 \text{ kg/m}^3} = 0.0005 \text{ m}^3$$

$$F_{\text{uzgon}} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 0.0005 \text{ m}^3 = 5 \text{ N}$$

$$F_{\text{rezultantna}} = F_{\text{uzgon}} - G - F_{\text{tr}}$$

$$F_{\text{tr}} = F_{\text{uzgon}} - G - F_{\text{rezultantna}}$$

$$= 5 \text{ N} - 3 \text{ N} - 1.2 \text{ N} = 0.8 \text{ N}.$$

Leon Hudoletnjak (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 539. Olimpijske su medalje kroz godine mijenjale i oblik i sastav. Međunarodni je olimpijski odbor naložio da zlatne medalje moraju sadržavati 6 g zlata. Cijena grama zlata

najveće čistoće je oko 70 EUR, dok je srebro puno jeftinije, gram je oko 0.9 eura. Zlatne medalje imaju oko pola kg i vrijednost im je po sadašnjim cijenama zlata i srebra oko 864.6 EUR. Kolika im je gustoća?

Gustoća zlata iznosi $19\,320\text{ kg/m}^3$, a srebra $10\,500\text{ kg/m}^3$.

Rješenje.

$$m = 0.5\text{ kg} = 500\text{ g}$$

$$m_{\text{zlata}} = 6\text{ g}$$

$$\rho_{\text{zlata}} = 19\,320\text{ kg/m}^3$$

$$\rho_{\text{srebra}} = 10\,500\text{ kg/m}^3$$

$$\rho_{\text{medalje}} = ?$$

$$m_{\text{srebra}} = m - m_{\text{zlata}}$$

$$m_{\text{srebra}} = 494\text{ g}$$

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$V_{\text{zlata}} = \frac{6\text{ g}}{19.32\text{ g/cm}^3} = 0.31\text{ cm}^3$$

$$V_{\text{srebra}} = \frac{494\text{ g}}{10.5\text{ g/cm}^3} = 47.048\text{ cm}^3$$

$$V_{\text{ukupni}} = V_{\text{zlata}} + V_{\text{srebra}} = 47.358\text{ cm}^3$$

$$\rho_{\text{medalje}} = \frac{500\text{ g}}{47.358\text{ cm}^3} = 10.558\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 10\,558\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Nika Valešić (8),

OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 540. Kad se na oprugu objesi čokolada mase 100 g njena je duljina 18 cm, a ako se na istu oprugu objesi jabuka mase 250 g duljina je te opruge 21 cm. Koliko će opruga biti dugačka ako se pomoću nje vuče drveni kvadar mase 800 g ako faktor trenja iznosi 0.

Rješenje.

$$m_1 = 100\text{ g} = 0.1\text{ kg}$$

$$l_1 = 18\text{ cm}$$

$$m_2 = 250\text{ g} = 0.25\text{ kg}$$

$$l_2 = 21\text{ cm}$$

$$m_3 = 800\text{ g} = 0.8\text{ kg}$$

$$\mu = 0.4$$

$$l_3 = ?$$

$$G = mg = 0.1\text{ kg} \cdot 10\frac{\text{N}}{\text{kg}} = 1\text{ N}$$

$$G_2 = 2.5\text{ N}$$

$$G_3 = 8\text{ N}$$

$$l = l_0 + \Delta l$$

$$l_1 = l_0 + \frac{F_1}{k}$$

$$l_2 = l_0 + \frac{F_2}{k}$$

$$18\text{ cm} = l_0 + \frac{1\text{ N}}{k} \quad (1)$$

$$21\text{ cm} = l_0 + \frac{2.5\text{ N}}{k}. \quad (2)$$

Ako oduzmemo od (2) (1) dobit ćemo:

$$3\text{ cm} = \frac{1.5\text{ N}}{k}$$

$$k = 0.5\frac{\text{N}}{\text{cm}}$$

$$\Delta l_1 = 2\text{ cm}$$

$$l_0 = l_1 - \Delta l_1 = 16\text{ cm}$$

$$F_{\text{tr}} = \mu G_3 = 0.4 \cdot 8\text{ N} = 3.2\text{ N}$$

$$\Delta l_3 = \frac{F_3}{k} = \frac{3.2\text{ N}}{0.5\text{ N/cm}} = 6.4\text{ cm}$$

$$l_3 = l_0 + \Delta l_3 = 16\text{ cm} + 6.4\text{ cm} = 22.4\text{ cm}.$$

Erika Lasović (8),

OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 541. Drveni stol ima gornju plohu kojoj je duljina 1.5 m, širina 80 cm, a debljina 4 cm. Baze njegovih nogu su kvadrati kojima je stranica 5 cm, a visoke su 80 cm. Stol je napravljen od hrastovog drva kojem je gustoća 700 kg/m^3 . Koliki je tlak pod nogama stola?

Rješenje.

$$a = 1.5\text{ m}$$

$$b = 80\text{ cm} = 0.8\text{ m}$$

$$c = 4\text{ cm} = 0.04\text{ m}$$

$$a_1 = 5\text{ cm} = 0.05\text{ m}$$

$$h = 80\text{ cm} = 0.8\text{ m}$$

$$n = 4$$

$$\rho = 700\text{ kg/m}^3$$

$p = ?$

$$V = abc + 4a_1a_1h$$

$$= 1.5 \text{ m} \cdot 0.8 \text{ m} \cdot 0.04 \text{ m}$$

$$+ 4 \cdot 0.05 \text{ m} \cdot 0.05 \text{ m} \cdot 0.8 \text{ m}$$

$$= 0.048 \text{ m}^3 + 0.008 \text{ m}^3 = 0.056 \text{ m}^3$$

$$m = V\rho = 0.056 \text{ m}^3 \cdot 700 \text{ kg/m}^3 = 39.2 \text{ kg}$$

$$G = mg = 39.2 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$G_1 = 392 \text{ N} = F$$

$$A = 4 \cdot a_1 \cdot a_1$$

$$= 4 \cdot 0.05 \text{ m} \cdot 0.05 \text{ m} = 0.01 \text{ m}^2$$

$$p = \frac{F}{A} = \frac{392 \text{ N}}{0.01 \text{ m}^2} = 39\,200 \text{ Pa.}$$

*Ema Stanešić (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb*

1847. Prvi kilometar puta automobil vozi brzinom 90 km/h, drugi brzinom 70 km/h, a treći brzinom 50 km/h. Kolika je prosječna brzina tijekom čitavog puta?

Rješenje. Vrijeme putovanja duž pojedinačnog dijela puta jednako je $t_i = s_i/v_i$ ($i = 1, 2, 3$), stoga je prosječna brzina duž čitavoga puta

$$\bar{v} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} + \frac{s_3}{v_3}},$$

što daje

$$\bar{v} \approx 66 \text{ km/h.}$$

*Franka Horvat (2),
X. gimnazija "Ivan Supek", Zagreb*

1848. Planet kruži oko zvijezde po kružnoj putanji polumjera 10 svjetlosnih minuta. Površinska temperatura zvijezde iznosi 6000 K, dok je prosječna temperatura na površini planeta 0°C. Odredi polumjer zvijezde. Zvijezda i planet su savršena crna tijela te je temperatura planeta jednaka duž čitave njegove površine. (Također planet je "goli kamen" bez ikakvih atmosferskih efekata koji bi utjecali na tok toplinske energije.) Polumjer planeta je neusporedivo manji od njegove udaljenosti od zvijezde.

Rješenje. Prema Stefan-Boltzmannovom zakonu intenzitet toplinskoga zračenja savršenog

crnog tijela temperature T jednak je $I = \sigma T^4$, pri čemu intenzitet odgovara snazi zračenja po jedinici površine tijela. Za tijelo koje zrači jednoliko čitavom površinom ukupnu snagu zračenja dobivamo kao $P = IA$, uz A kao površinu tijela. Stoga je ukupna snaga toplinskoga zračenja koje odašilje zvijezda jednaka

$$P_z = 4\pi\sigma R_z^2 T_z^4,$$

uz R_z kao polumjer, a T_z kao temperaturu zvijezde. Uz r kao udaljenost planeta od zvijezde i R_p kao polumjer planeta (te korištenje $R_p \ll r$), ukupna snaga $P_{z \rightarrow p}$ koja upada na površinu planeta (i koju planet kao savršeno crno tijelo potpuno upija) određena je omjerom površine $R_p^2\pi$ njegova presjeka kojim zahvaća zračenje i ukupne površine $4\pi r^2$ po kojoj se raspodjeljuje snaga zračenja zvijezde

$$P_{z \rightarrow p} = \frac{R_p^2\pi}{4\pi r^2} P_z = \frac{R_p^2 R_z^2}{r^2} \pi \sigma T_z^4.$$

S druge strane, kako je i površina planeta na konačnoj temperaturi T_p , on sam toplinski zrači snagom

$$P_p = 4\pi\sigma R_p^2 T_p^4.$$

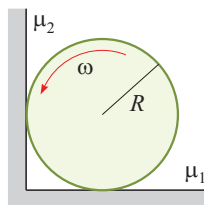
Uvjet temperaturne stabilnosti planeta jednakost je ulazne i izlazne snage zračenja ($P_{z \rightarrow p} = P_p$) jer tada nema ukupnoga toka energije na planet ili s njega, stoga se on niti grije niti hladi. Izjednačavanjem prethodnih izraza nalazimo

$$R_z = 2r \frac{T_p^2}{T_z^2},$$

što uvrštavanjem brojeva (uz $T_p = 273 \text{ K}$ i $r = 1.8 \cdot 10^7 \text{ km}$) daje $R_z = 745\,290 \text{ km.}$

Ur.

1849. Valjak polumjera 10 cm zavrtili smo početnom kutnom brzinom od 10 okretaja u sekundi te ga pažljivo postavili uz rub zida tako da se okrećući tare i o zid i o tlo. Koeficijent trenja s tlom jednak je $\mu_1 = 4/3$, a sa zidom $\mu_2 = 3/4$.



Nakon koliko vremena će se valjak zaustaviti ako je:

a) šupalj, tako da je sva masa raspodijeljena duž vrlo tankoga plašta zadanog polumjera;

b) pun i homogen?

Oprez: iznos sile trenja s tlom nije $\mu_1 mg$!

Rješenje. Raspisujemo sve sile koje djeluju na valjak u horizontalnom i vertikalnom smjeru. Neka su N_1 i N_2 reakcije podloge na valjak zbog tla i zida, a T_1 i T_2 sile trenja s tlom i sa zidom. Trenja su određena pripadnim reakcijama podloge kao

$$T_1 = \mu_1 N_1 \quad \text{ i } \quad T_2 = \mu_2 N_2.$$

Kako centar mase valjka translacijski miruje, ukupna sila koja djeluje na njega iščezava. U horizontalnome smjeru stoga imamo

$$N_2 = T_1 \implies N_2 = \mu_1 N_1,$$

a u vertikalnome

$$mg = N_1 + T_2 \implies mg = N_1 + \mu_2 N_2,$$

što uvrštavanjem izraza za N_2 daje

$$mg = (1 + \mu_1 \mu_2) N_1.$$

Odavde izravno nalazimo N_1 , što povratkom u ostale jednadžbe za sile trenja daje:

$$T_1 = \frac{\mu_1}{1 + \mu_1 \mu_2} mg,$$

$$T_2 = \frac{\mu_1 \mu_2}{1 + \mu_1 \mu_2} mg.$$

Ukupan moment sile koji djeluje na valjak (računajući s osi oko koje se valjak okreće) jednak je

$$M = (T_1 + T_2)R = \frac{\mu_1(1 + \mu_2)}{1 + \mu_1 \mu_2} mgR$$

te on uzrokuje njegovo kutno usporenje α prema

$$M = I\alpha,$$

uz I kao moment inercije valjka, koji ovisi o njegovoj raspodjeli mase. Kako je moment sile konstantan, kutno usporenje bit će također konstantno i jednako

$$\alpha = \frac{\mu_1(1 + \mu_2)}{1 + \mu_1 \mu_2} \frac{mgR}{I}$$

pa će vremenska ovisnost kutne brzine (do zaustavljanja valjka) biti

$$\omega(t) = \omega_0 - \alpha t,$$

uz ω_0 kao zadanu početnu vrijednost ($\omega_0 = 2\pi \cdot 10$ rad/s). Vrijeme potrebno za zaustavljanje

nje nalazimo iz uvjeta $\omega(t) = 0$, što daje

$$t = \frac{\omega_0}{\alpha} = \frac{1 + \mu_1 \mu_2}{\mu_1(1 + \mu_2)} \frac{I\omega_0}{mgR}.$$

Moment inercije cilindričnog plašta $I_a = mR^2$, a moment inercije punog homogenog valjka je $I_b = mR^2/2$. Stoga je traženo vrijeme do zaustavljanja za šuplji valjak (uz $g = 10$ m/s²)

$$t_a = \frac{1 + \mu_1 \mu_2}{\mu_1(1 + \mu_2)} \frac{R\omega_0}{g} = 0.54 \text{ s},$$

a za puni i homogeni

$$t_b = \frac{t_a}{2} = 0.27 \text{ s}.$$

Ur.

1850. Pretpostavimo pojednostavnjen model izotermne Zemljine atmosfere, čija je temperatura svugdje jednaka 15°C . U takvome modelu tlak p i gustoća ρ zraka na visini h iznad Zemljine površine opisani su tzv. barometarskom formulom:

$$p(h) = p_0 e^{-\rho_0 g h / p_0} \quad \text{ i } \quad \rho(h) = \rho_0 e^{-\rho_0 g h / p_0}$$

pri čemu su p_0 , ρ_0 i g redom tlak, gustoća zraka i gravitacijsko ubrzanje na Zemljinoj površini. U takvoj okolini balon je ispunjen čistim helijem ukupne mase 10 g pa je pušten da poleti uvis. Opna balona je vrlo tanka i rastezljiva te čini zanemariv dio mase balona, a svojom naponošću zanemarivo doprinosi održavanju tlaka unutar balona (tj. služi samo kao granica između nutrine balona i njegove okoline). Ako opna balona puca kad balon dosegne volumen od 1 m³, hoće li on prije puknuti ili se prestati uzdizati, i na kojoj visini će se to dogoditi? Koristite sljedeće vrijednosti: $p_0 = 10^5$ Pa, $\rho_0 = 1.2$ kg/m³, $g = 10$ m/s² te molarnu masu helija $M = 4$ g/mol. Tlak zraka mijenja se s visinom dovoljno sporo da, ovisno o potrebama toga što se u danom koraku računa, može ga se smatrati konstantnim (ili ga aproksimirati kakvom drugom primjerenom ovisnošću) u neposrednoj blizini balona.

Rješenje. Balon će se uzdizati sve dok uzgon nadmašuje njegovu težinu. Stoga moramo odrediti njegov početni volumen kako bismo mogli dalje odrediti ovisnost uzgona o visini nad tlom. To ćemo učiniti na temelju njegovih termodinamičkih parametara pri tlu (temperature $T =$

288 K i tlaka p_0 atmosfere s kojom je u termodinamičkoj ravnoteži) koristeći jednadžbu idealnog plina $pV = nRT$. Pri tome je molarna količina helija dana kao $n = m/M$, gdje je m njegova masa. Oдавде za početni volumen balona slijedi

$$V_0 = \frac{RTm}{p_0M} = 60 \text{ dm}^3,$$

odnosno 60 litara.

Iz pretpostavke izotermne atmosfere te iz stalne količine helija unutar balona, a pod uvjetom termodinamičke ravnoteže balona i okolne atmosfere, iz $p(h)V(h) = nRT$ nalazimo ovisnost njegova volumena o visini

$$V(h) = \frac{nRT}{p(h)} = \frac{nRT}{p_0} e^{\rho_0 gh/p_0} = V_0 e^{\rho_0 gh/p_0}.$$

Time smo odredili i iznos sile uzgona na balon, koja ovisi o njegovome volumenu i gustoći okolnoga zraka koja je dana barometarskom formulom

$$F_u(h) = \rho(h)gV(h) = \rho_0 gV_0.$$

Unutar ovakvoga modela (i atmosfere i opne balone) sila uzgona ne mijenja se s visinom jer je smanjenje tlaka zraka savršeno kompenzirano povećanjem volumena balona. Dakle balon se neće prestati uzdizati jer uzgon sve vrijeme nastavlja nadmašivati težinu, što znači da će puknuti kad dosegne najveći volumen $V_{\max}$ koji može izdržati. Izjednačavanjem te vrijednosti s visinskom ovisnošću volumena: $V_{\max} = V_0 e^{\frac{\rho_0 gh}{p_0}}$ nalazimo da će balon puknuti na visini

$$h = \frac{p_0}{\rho_0 g} \ln \frac{V_{\max}}{V_0} = 23.445 \text{ km}.$$

Napomena. Valja primijetiti da smo tretirali visinsku ovisnost tlaka zraka na tri različita načina, od kojih dva čine *numerički opravdane* aproksimacije; opravdane trenutnim potrebama računa. Prva ovisnost svela se na tretiranje tlaka kao *konstantnog* u neposrednoj okolini balona, za potrebe određivanja njegova volumena. Drugi je bila *eksponencijalna* ovisnost iz barometarske formule, za potrebe određivanja varijacije termodinamičkih parametara s toliko velikom promjenom visine da tu ovisnost više ne možemo ignorirati. Treća ovisnost implicitno se “skriva” unutar *oblika* izraza za silu uzgona kakav smo koristili: $F_u = \rho gh$. Iako smo u taj izraz uvrštavali eksponencijalnu ovisnost gustoće

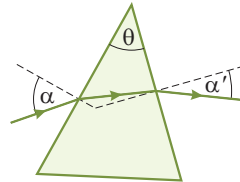
i volumena, sam oblik tog izraza slijedi iz pretpostavke *linearne* ovisnosti hidrostatskoga tlaka (atmofere) s visinom kao da je

$$p(h) = p_0 - \rho_0 gh.$$

U to se možete uvjeriti provjerom izvoda sile uzgona kakav ste radili u školi. Pri tome je navedena linearna ovisnost upravo ono što bismo dobili formalnom aproksimacijom eksponencijalne ovisnosti $p_0 e^{-\rho_0 gh/p_0}$ za dovoljno male vrijednosti h . Prva, konstanta ovisnost $p(h) = p_0$ koju smo koristili očito ostaje nakon dodatne aproksimacije u kojoj zanemarujemo i linearni član $\rho_0 gh$, unutar dovoljno malog raspona h da vrijedi $\rho_0 gh \ll p_0$ (raspona koji odgovara očekivanim dimenzijama balona).

Ur.

1851. Dana je trostrana staklena prizma kutnog otvora $\theta = 45^\circ$ i indeksa loma 1.5. Zraka svjetlosti upada (iz zraka) na jednu pobočku prizme pod kutom α s obzirom na njezinu okomicu te izlazi kroz drugu pobočku pod kutom α' . Koliki mora biti upadni kut α da bi bio jednak izlaznome? Za koje kutove otvora prizme je to moguće?



Rješenje. Iz Snellova zakona je

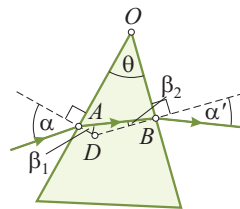
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta_1} = \frac{n_{\text{prizme}}}{n_{\text{zraka}}} = \frac{3}{2}.$$

Četverokut $OABD$ je tetivni pa je $\angle ADB = 180^\circ - \theta = 135^\circ$. Iz $\triangle ABD$ slijedi

$$\beta_1 + \beta_2 = 185^\circ - 135^\circ = 45^\circ.$$

Opet je

$$\frac{\sin \beta_2}{\sin \alpha'} = \frac{n_{\text{zraka}}}{n_{\text{prizme}}} = \frac{2}{3}.$$



Dobili smo

$$\sin \alpha = \frac{3}{2} \sin \beta_1 \quad \text{ i } \quad \sin \alpha' = \frac{3}{2} \sin \beta_2.$$

Iz uvjeta $\alpha = \alpha'$ slijedi

$$\sin \alpha = \sin \alpha' \implies \sin \beta_1 = \sin \beta_2,$$

što u kombinaciji s $\beta_1 + \beta_2 = 45^\circ$ daje $\beta_1 = \beta_2 = 22^\circ 30'$, odakle je

$$\alpha \approx 35^\circ 2'.$$

Da bi ovakav scenarij bio moguć, iz

$$\sin \beta_1 = \sin \beta_2 = \frac{2}{3} \sin \alpha$$

i $\sin \alpha \leq 1$ slijedi

$$\sin \beta_{1,2} \leq \frac{2}{3},$$

odnosno $\beta_{1,2} \leq 41^\circ 48' 37''$. Zbog $\theta = \beta_1 + \beta_2$ mora biti

$$0 \leq \theta \leq 83^\circ 37' 14''.$$

Duje Dodig (4),

Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

1852. Relativistički neutron početne kinetičke energije 4 puta veće od energije mirovanja nalijeće na drugi, koji ispočetka miruje. Ako se nakon elastičnog raspršenja oba neutrona raspršuju simetrično (pod jednakim kutovima) s obzirom na početni smjer gibanja upadnog neutrona, koliki kut zatvaraju njihovi konačni smjerovi gibanja?

Rješenje. Zakon očuvanja količine gibanja daje

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2.$$

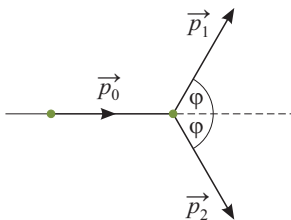
Projekcijom na pravac gibanja upadne čestice te okomito na njega imamo dvije skalarne jednačbe:

$$p_0 = p_1 \cos \varphi + p_2 \cos \varphi,$$

$$0 = p_1 \sin \varphi - p_2 \sin \varphi.$$

Iz druge jednačbe je $p_1 = p_2$, što u kombinaciji s prvom daje

$$p_0 = 2p_1 \cos \varphi.$$



Kako je sudar elastičan, mase čestica nakon sudara jednake su masama prije sudara. Posredstvom relacije $E_i^2 = p_i^2 c^2 + m_i^2 c^4$ koja vrijedi za ukupnu relativističku energiju E_i svake pojedine čestice ($i = 1, 2$), iz $m_1 = m_2 = m$ (gdje je m masa neutrona) i $p_1 = p_2$ imamo $E_1 = E_2$ nakon raspršenja.

Zakon očuvanja energije nalaže

$$E_0 = E_1 + E_2,$$

stoga je $E_1 = E_2 = E_0/2$, gdje je E_0 ukupna energija u sustavu, jednaka prije i poslije raspršenja. Određujemo je iz podataka prije raspršenja

$$E_0 = \sqrt{p_0^2 c^2 + m^2 c^4} + mc^2.$$

Prvi član odgovara energiji upadnog neutrona, a drugi energiji ispočetka mirujućeg neutrona. Kinetička energija E_{kin} upadnog neutrona jednaka je razlici njegove ukupne energije i energije mirovanja, a prema uvjetu zadatka jednaka je

$$E_{\text{kin}} = \sqrt{p_0^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2 = 4mc^2.$$

Oдавde je $p_0 = \sqrt{24}mc$. Uvrštavanjem izraza za E_0 u $E_1 = E_2 = E_0/2$, za jednu od čestica nakon raspršenja nalazimo

$$E_1^2 = p_1^2 c^2 + m^2 c^4 = \left(\frac{E_0}{2} \right)^2.$$

Nakon raspisa E_0 :

$$\begin{aligned} p_1^2 c^2 + m^2 c^4 &= \frac{p_0^2 c^2 + 2mc^2 \sqrt{p_0^2 c^2 + m^2 c^4} + 2m^2 c^4}{4} \end{aligned}$$

dobivamo

$$p_1^2 = \frac{p_0^2 + 2m \sqrt{p_0^2 c^2 + m^2 c^4} - 2m^2 c^2}{4}.$$

Korištenjem ranijeg $p_0 = \sqrt{24}mc$ nalazimo

$$p_1 = \sqrt{8}mc = \frac{p_0}{\sqrt{3}}.$$

Konačno

$$\cos \varphi = \frac{p_0}{2p_1} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

odakle $\varphi = 30^\circ$, što znači da je kut između smjerova dviju raspršenih čestica

$$\angle(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 2\varphi = 60^\circ.$$

Duje Dodig (4), Zagreb

1853. Izotop radija ^{226}Ra najzastupljeniji je radioaktivni izotop radija na Zemlji, a vrijeme poluživota mu iznosi 1600 godina. Iako je Zemlja stara 4.543 milijarde godina, radija još uvijek ima na njoj zato jer se obnavlja kroz radioaktivne raspade drugih tvari. Razmotrite alternativnu hipotezu: da je trenutna količina ^{226}Ra na Zemlji samo ostatak neke početne količine s početka Zemljine povijesti te da se tijekom povijesti samo raspadao, bez obnavljanja iz drugih izvora. Uz pretpostavku da na čitavoj Zemlji danas postoji samo jedan kilogram ^{226}Ra , kolika bi morala biti njegova početna masa u trenutku formiranja Zemlje? Usporedite tu masu s ukupnom masom Zemlje, koja iznosi $6 \cdot 10^{24}$ kg. Kolika bi morala biti početna masa ^{226}Ra da bi danas na Zemlji ostao samo jedan jedini njegov atom? Molarna masa ^{226}Ra je 226 g/mol. Za potrebe zadatka pretpostavite da su zadani brojevi savršeno precizni.

Napomena. Da bi savršeno precizno izračunali brojčane vrijednosti koje se traže, vjerojatno će vam biti potrebne neke dosjetke, tj. malo "ručnog" dovođenja izraza u kalkulatorom izračunljiv oblik.

Rješenje. Zakon radioaktivnog raspada $N(t) = N_0 2^{-t/T}$, uz T kao vrijeme poluživota, opisuje broj preživjelih atomskih jezgara nakon vremena t ako ih je u početnome trenutku bilo N_0 . Kako je masa čistog uzorka (ovdje ^{226}Ra) proporcionalna njegovome broju atoma, zaključujemo da se ista ovisnost odnosi i na masu radioaktivne tvari

$$m(t) = m_0 2^{-t/T}.$$

Za $t = 4.543 \cdot 10^9$ god. kao starost Zemlje, $T = 1600$ god. kao vrijeme poluživota ^{226}Ra i $m(t) = 1$ kg kao trenutnu količinu ^{226}Ra , rješenje za početnu traženu masu radija svodi se na

$$m_0 = m(t) 2^{t/T}.$$

Izravnim uvrštavanjem $t/T \approx 2.84 \cdot 10^6$ računalo ili kalkulator vrlo vjerojatno neće uspjeti izračunati traženu vrijednost. To je zato što su brojevi u računalima reprezentirani konačnim brojem bitova (nula i jedinica) pa imaju ograničen raspon vrijednosti s kojima je moguće računati. U današnjim računalima najviša vrijednost tipično je reda veličine 10^{308} (što u programskome jeziku C++ odgovara granici brojevnoga

tipa double), dok je naš traženi rezultat premašuje. Stoga nam treba malo ručnih manipulacija kako bismo je izračunali. U tu svrhu problematičan član $2^{t/T}$ izrazit ćemo preko baze 10:

$$2^{t/T} = 10^{(t/T) \log_{10} 2}$$

da bismo zatim eksponent nad bazom 10 rastavili na cjelobroji dio n i necjelobrojni ostatak f takav da je $0 < f < 1$

$$10^{(t/T) \log_{10} 2} = 10^{f+n} = 10^f 10^n.$$

Koristimo bazu 10 jer ćemo 10^n znati iščitati kao red veličine rezultata. Preostali član 10^f bit će vrlo lako izračunati te će se njegova vrijednost po konstrukciji naći na intervalu $1 < 10^f < 10$ pa ćemo u njemu prepoznati vodeće znamenke rezultata. Sada imamo

$$(t/T) \log_{10} 2 \approx 854\,737.04394,$$

tj. $n = 854\,737$ i $f = 0.04394$. Oдавде

$$2^{t/T} \approx 10^{0.04394} 10^{854\,737} \approx 1.1 \cdot 10^{854\,737}.$$

Za ukupnu pretpostavljenu masu ^{226}Ra od $m(t) = 1$ kg u današnje vrijeme, dobivamo da bi njegova početna masa u doba formiranja Zemlje trebala biti

$$m_0 = 1.1 \cdot 10^{854\,737} \text{ kg},$$

tj. $m_0 / (6 \cdot 10^{24} \text{ kg}) \approx 1.8 \cdot 10^{854\,712}$ masa Zemlje! Taj omjer je broj koji ima 854 713 znamenaka prije decimalne točke!

Kad bismo pretpostavili da danas na čitavoj Zemlji postoji samo jedan atom ^{226}Ra , ukupna bi masa prisutnoga izotopa odgovarala masi jednog atoma koju određujemo prema relaciji

$$\frac{m(t)}{M} = \frac{N(t)}{N_A},$$

odakle

$$m(t) = \frac{M}{N_A} = 3.753 \cdot 10^{-25} \text{ kg},$$

gdje je $N(t) = 1$ trenutni broj atoma, N_A Avogadrova konstanta, a M molarna masa ^{226}Ra . Koristeći rješenje ranijeg postupka sada dolazimo do početne mase od:

$$m_0 = 3.753 \cdot 10^{0.04394} 10^{854\,737-25} \text{ kg},$$

to jest:

$$m_0 = 4.15 \cdot 10^{854\,712} \text{ kg},$$

što još uvijek čini nezamisliv omjer od $7 \cdot 10^{854\,687}$ masa Zemlje.

Ur.