YU ISSN 0015—3206
FZKAAA 14 (3) 207 (1982)

КРУЧЕНИЕ БОЛЬШОЙ ТОЛСТОИ ПЛАСТИНКИ, ЖЕСТКОСТЬ КОТОРОЙ ИЗМЕНЯЕТСЯ В НАПРАВЛЕНИИ КООРДИНАТЫ ТОЛЩИНЫ И ВЕРХНЕЕ ОСНОВАНИЕ КОТОРОИ ЗАКРЕПЛЕНО

А. М. ЭЙШИНСКИЙ

Вечерняя школа 46, г. Днепропетровск, СССР

Received 19 April 1982

UDC 539.41

Original scientific paper

The paper deals with the torsional problem relating to a large thick plate rigidity of which varies in the direction from one face to the other, one face being assumed fixed. The investigation is extended to the case where both faces are acted upon by shearing force depending on the radial coordinate.

В работе исследуется задача кручения для толстой пластинки, жесткость которой изменяется в направлении координаты толщины и верхнее основание которой закреплено. Исследование распостраняется на случай, когда вобоих основаниях действуют сдвигающие силы, изменяющиеся в радиальном направлении.

Предыстория настоящей заметки восходит к рефератам 1—13.

Закони изменения жесткости принимаем такими:

1. $$G = G_0 (a\mathrm{e}^{-\alpha z} + b\mathrm{e}^{\alpha z})^2, \; a > 0, \; b > 0;$$

2. $$G = G_0 \left[a J_0 \left(\frac{2}{\nu} \sqrt{\beta}\, \mathrm{e}^{\frac{-\nu z}{2}} \right) + b\, Y_0 \left(\frac{2}{\nu} \sqrt{\beta}\, \mathrm{e}^{\frac{-\nu z}{2}} \right) \right]^2,$$

$$\beta > 0, \; a > 0, \; b > 0;$$

3. $$G = G_0 \left[a J_0 \left(\frac{2i}{\nu} \sqrt{-\beta}\, e^{\frac{-\nu z}{2}} \right) + b\, Y_0 \left(\frac{2i}{\nu} \sqrt{-\beta}\, e^{\frac{-\nu z}{2}} \right) \right]^2,$$

$$\beta < 0,\ a > 0,\ b > 0;$$

4. $$G = G_0 (cz + d) \left[a J_{1/3} \left(\frac{2i}{3} \sqrt{\frac{(cz+d)^3}{c^2}} \right) + b\, J_{-1/3} \left(\frac{2i}{3} \sqrt{\frac{(cz+d)^3}{c^2}} \right) \right]^2,$$

$$c > 0,\ d > 0,\ a > 0,\ b > 0,\ i = \sqrt{-1};$$

5. $$G = G_0 (cz + d) \left[a J_{1/3} \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{(cz+d)^3}{c^2}} \right) + b\, J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{(cz+d)^3}{c^2}} \right) \right]^2,$$

$$c > 0,\ d > 0,\ a > 0,\ b > 0;$$

6. $$G = G_0 (a \sin az + b \cos az)^2,\ a > 0,\ b > 0,$$

$$0 < \arcsin \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + az < \pi;$$

7. $$G = G_0 (az + b)^n,\ a > 0,\ b > 0;$$

7′. $$G = G_0 (az + b)^2,\ a > 0,\ b > 0;$$

7″. $$G = \frac{G_0}{(z + b)^{2p}},\ p \text{ — целое число}$$

8. $$G = G_0 (az + b)^{\frac{d}{a}}\, e^{\frac{c}{2a}(ax+b)^2},\ a \neq 0.$$

При $c = 0$ получаем случаи 7, 7′, 7″.

Формулировка проблемы

Определим компоненты напряжений и перемещений внутри упругого тела, жесткость которого меняется по законам 1—8, ограниченного плоскостями $z = 0$ и $z = h$.

Положительное направление оси x направлено вовнутрь тела. На границе $z = 0$ скручивающие силы действуют внутри круговой области плоскость $z = h$ остаётся фиксированной.

Введём цилиндрические координаты (r, Θ, z), тогда

$$\begin{cases} \tau_{\Theta z} = G(z) \dfrac{\partial v}{\partial z}, \\ \tau_{r\Theta} = G(z) \left(\dfrac{\partial v}{\partial r} - \dfrac{v}{r} \right). \end{cases} \tag{1}$$

Граничные условия:

$$\begin{cases} z = 0, \ r \leq a, \ \tau_{\Theta z} = F(r) = kr, \\ z = 0, \ r > 0, \ \tau_{\Theta z} = F(r) = 0, \\ z = h, \ v = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Два уравнения равновесия удовлетворяются тождественно, третье уравнение

$$\frac{\partial \tau_{\Theta r}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\Theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\Theta}}{r} = 0 \tag{3}$$

с учётом (1) даёт следующее дифференциальное уравнение относительно v

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{G'(z)}{G(z)}\frac{\partial v}{\partial z} = 0. \tag{4}$$

Пусть

$$v(r, z) = R(r)\, Z(z), \tag{5}$$

тогда уравнение (4) преобразуется к виду

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d} r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d} R}{\mathrm{d} r} + \left(\lambda^2 - \frac{1}{r^2}\right) R = 0, \tag{4'}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d} z^2} + \frac{G'(z)}{G(z)}\frac{\mathrm{d} Z}{\mathrm{d} z} - \lambda^2 Z = 0. \tag{4''}$$

Решение (4) имеет вид

$$\mathrm{R} = J_1(\lambda r), \tag{4'''}$$

$$v = \int_0^\infty J_1(\lambda r)\, [A_\lambda Z_1(\lambda, z) + B_\lambda Z_2(\lambda, z)]\, \mathrm{d}\lambda. \tag{5'}$$

Исползуя (2) получаем

$$A_\lambda Z_1(\lambda, h) + B_\lambda Z_2(\lambda, h) = 0, \tag{6}$$

$$\tau_{\Theta z} = G(z) \int_0^\infty J_1(\lambda r) \left[A_\lambda \frac{\partial}{\partial z} Z_1(\lambda, z) + B_\lambda \frac{\partial}{\partial z} Z_2(\lambda, z)\right] \mathrm{d}\lambda, \tag{6'}$$

$$\tau_{r\Theta} = G(z) \int_0^\infty (-\lambda J_2(\lambda r))\, [A_\lambda Z_1(\lambda, z) + B_\lambda Z_2(\lambda, z)]\, \mathrm{d}\lambda. \tag{6''}$$

При $z = 0$ получаем

$$v\,|_{z=0} = \int_0^\infty J_1(\lambda r)\,[A_\lambda Z_1(\lambda, 0) + B_\lambda Z_2(\lambda, 0)]\,\mathrm{d}\,\lambda, \qquad (5'')$$

$$\tau_{r\Theta}\Big|_{z=0} = G(0)\int_0^\infty J_1(\lambda r)\left[A_\lambda \frac{\partial}{\partial z}(Z_1(\lambda, z))_{z=0} + B_\lambda \frac{\partial}{\partial z}(Z_2(\lambda, z))_{z=0}\right]\mathrm{d}\lambda, \qquad (6''')$$

$$\tau_{r\Theta}\Big|_{z=0} = -G(0)\int_0^\infty \lambda J_2(\lambda r)\,[A_\lambda Z_1(\lambda, 0) + B_\lambda Z_2(\lambda, 0)]\,\mathrm{d}\,\lambda, \qquad (6'''')$$

из (2) получаем

$$\tau_{\Theta z}\,|_{z=0} = F(r), \qquad (7)$$

используя

$$F(r) = \int_0^\infty \lambda J_1(\lambda r)\,\mathrm{d}\,\lambda \int_0^\infty y\,F(y)\,J_1(\lambda y)\,\mathrm{d}\,y, \qquad (8)$$

получаем

$$A_\lambda \frac{\partial}{\partial z}(Z_1(\lambda, z))_{z=0} + B_\lambda \frac{\partial}{\partial z}(Z_2(\lambda, z))_{z=0} = \frac{k^2 a^2 \cdot J_2(\lambda a)}{G(0)\cdot\lambda} \qquad (9)$$

Из (9) и (6) A_λ и B_λ могут быть определены, после чего компоненты перемешения v и напряжений $\tau_{\Theta z}$, $\tau_{r\Theta}$ однозначно определяются.

Если в 7 $\gamma = n = 1$, получаем результат Реф. 5;
если $\gamma = n = -1$, то получаем результат Реф. 7;
если $\gamma = n \neq 2$, то получаем результат Реф. 9.

Заметим, что случай 7. есть частный случай 8 при $c = 0$, $d = a$, $n = a\gamma$.

Уточним один результат из Реф. 12. Если

$$\varphi(z) = \frac{a^2 \gamma (2-\gamma)}{4(az+b)^2},\ a > 0,\ b > 0,\ \gamma \neq 0,\ \gamma \neq 2,$$

$$G = G_0 (az+b)^\gamma$$

$$Z = \frac{\sqrt{az+b}\left\{A_\lambda J_{\frac{|\gamma-1|}{2}}\left[\frac{\mathrm{i}\,\lambda}{a}(az+b)\right] + B_\lambda J_{-\frac{|\gamma-1|}{2}}\left[\frac{\mathrm{i}\,\lambda}{a}(az+b)\right]\right\}}{c_1 (az+b)^{\frac{\gamma}{2}} + c_2 (az+b)^{1-\frac{\gamma}{2}}};$$

$$\gamma = -2p,\ a = 1,$$

$$Z = \frac{A_\lambda J_{p+\frac{1}{2}}[\mathrm{i}\lambda (z+b)) + B_\lambda J_{-p-\frac{1}{2}}(\mathrm{i}\lambda (z+b))]}{c_1 (z+b)^{-p-\frac{1}{2}} + c_2 (z+b)^{p+\frac{1}{2}}},$$

при $c_2 = 0$ получаем формулу $(4+7)$ Реф. 12 стр. 639, в которой имеется очевидная опечатка.

Пользуясь обозначениями Реф. 12 для 8 получаем:

$$g(z) = [\ln G(z)]',$$

$$Z = V(\lambda, z) \exp\left(-\frac{1}{2}\int g(z)\,\mathrm{d}z\right),$$

$$V'' + \left(-\lambda^2 - \frac{1}{2}g'(z) - \frac{1}{4}g^2(z)\right) V = 0,$$

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2}g'(z) - \frac{1}{4}g^2(z),$$

$$R_1'' + \varphi(z) R_1 = 0,$$

$$Z = \frac{V(\lambda, z)}{R_1(z)}.$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}z^2} + \left[-\frac{2\lambda^2 + ca + cd}{2} + \frac{2ad - d^2}{4(az+b)^2} - \frac{c^2(az+b)^2}{4}\right] V = 0. \quad (10)$$

Подстановка

$$az + b = z_1 \quad (11)$$

преобразует дифференциальное уравнение (10) к виду

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}z_1^2} + \left(-\frac{2\lambda^2 + ca + cd}{2} + \frac{2ad - d^2}{4a^2 z_1^2} - \frac{c^2 z_1^2}{4a^2}\right) V = 0. \quad (12)$$

Подстановка

$$4s = z_1^2 \quad (13)$$

преобразует дифференциальное уравнение (12) к виду

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}s^2} + \frac{1}{2s}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}s} + \left(-\frac{2\lambda^2 + ca + cd}{2a^2 s} + \frac{2ad - d^2}{16a^2 s^2} - \frac{c^2}{a^2}\right) V = 0. \quad (14)$$

Подстановка

$$V = s^{-1/4} \cdot V_1 \quad (15)$$

преобразует дифференциальное уравнение (14) к виду

$$\frac{d^2 V_1}{ds^2} + \left(-\frac{c^2}{a^2} - \frac{2\lambda^2 + ca + cd}{2a^2 s} + \frac{2ad - d^2}{16a^2 s^2}\right) V_1 = 0. \tag{16}$$

Подстановка

$$s_1 = 2s \cdot \frac{c}{a}. \tag{17}$$

преобразует дифференциальное уравнение (16) к виду

$$\frac{d^2 V_1}{ds_1^2} + \left(-\frac{1}{4} - \frac{2\lambda^2 + ac + cd}{4ac \cdot s_1} + \frac{2ad - d^2 + 3a^2}{16\, a^2 s_1^2}\right) V_1 = 0. \tag{18}$$

Уравнение (18) есть уравнение Уиттекера-Ватсона (см. Реф. 14 стр. 317), его обшее решение есть

$$V_1 = C_1\, e^{-\frac{s_1}{2}} \cdot s_1^{\mu + \frac{1}{2}}\, \Phi\left(\mu - \varkappa + \frac{1}{2}, 2\mu + 1; s_1\right) +$$

$$+ C_2\, e^{-\frac{s_1}{2}} \cdot s_1^{\mu + \frac{1}{2}}\, \Psi\left(\mu - \varkappa + \frac{1}{2} \cdot 2\mu + 1; s_1\right), \tag{19}$$

C_1, C_2 — произвольные постоянные интегрирования, Φ, Ψ — конфлюэнтные гипергеометрические функции (см. Реф. 14 стр. 317.)

$$2\mu = \pm \frac{|a - d|}{2a}, \quad \varkappa = -\frac{2\lambda^2 + ca + cd}{4ac}. \tag{20}$$

Для 8 окончательно получаем

$$Z = K_1\, e^{-\frac{3c}{4a}(az+b)^2} \cdot (az + b)^{2\mu + \frac{a-d}{2a}}\, \Phi\left[\mu - \varkappa + \frac{1}{2}, 2\mu + 1; \frac{c\,(az + b)^2}{2a}\right] +$$

$$+ K_2\, e^{-\frac{3c}{4a}(az+b)^2} (az + b)^{2\mu + \frac{a-d}{2a}}\, \Psi\left[\mu - \varkappa + \frac{1}{2}, 2\mu + 1; \frac{c\,(az + b)^2}{2a}\right]. \tag{21}$$

Результаты рефератов 8, 9, 10 являются частными случаями (21).

Случай кручения обеих граничних плоскостей

В этом случае:

$$\tau_{\Theta z}|_{z=h} = F(r), r \leq a;$$

$$\tau_{\Theta z}|_{z=-h} = F_1(r), r \leq a.$$

$$\tau_{\Theta z}|_{z=h} = F(r) = \int_0^\infty \lambda J_1(\lambda r)\, \mathrm{d}\lambda \int_0^\infty y \cdot F(y) J_1(\lambda y)\, \mathrm{d}y$$

$$\tau_{\Theta z}|_{z=-h} = F_1(r) = \int_0^\infty \lambda J_1(\lambda r)\, \mathrm{d}\lambda \int_0^\infty y \cdot F_1(y) J_1(\lambda y)\, \mathrm{d}y.$$

Задача эффективно решается также и в случае задания различных комбинаций модулей 1—8 от срединной поверхности (см. Реф. 13).

$$\begin{cases} \tau_{\Theta z} = G(z) \dfrac{\partial v}{\partial z}, \\ \tau_{r\Theta} = G(z) \left(\dfrac{\partial v}{\partial r} - \dfrac{v}{r}\right), \end{cases} \quad \begin{cases} \tau'_{\Theta z} = G'(z) \dfrac{\partial v'}{\partial z}, \\ \tau'_{r\Theta} = G'(z) \left(\dfrac{\partial v'}{\partial r} - \dfrac{v'}{r}\right). \end{cases}$$

Граничные условия и условия непрерывности (см. Реф. 13) имеют вид:

$$\begin{cases} [\tau_{\Theta z}]_{z=h} = F(r), \\ [\tau_{\Theta z}]_{z=-h} = F_1(r), \end{cases}$$

$$\begin{cases} [v]_{z=0} = [v']_{z=0}, \\ [\tau_{\Theta z}]_{z=0} = [\tau'_{\Theta z}]_{z=0}. \end{cases}$$

Особенно компактными результаты получаются в случае, если

$$F(r) = F_1(r) = \begin{cases} \tilde{K} \cdot r^n, \ \tilde{K} = \mathrm{const}; n = 0, 1, 2, \ldots, & 0 \leq r \leq a, \\ 0 & r > a. \end{cases}$$

Если в 1 $a = 0, a = \dfrac{K}{2}$, $b = \sqrt{\mu_0}$ получаем результат Реф. 13.

Литература

1) E. Reissner, M. F. Sagoci, Journ. Appl. Phys. **15** (1944) 652;
2) J. N. Sneddon, Journ. Appl. Phys. **18** (1947) 130;
3) Yi-Yuan Yu. Quart, Journ. of Mech. Appl. Math. **7** (1954) 287;

4) S. B. Dutt, Journ. Assoc. Appl. Phys. **5** (1958) 16;
5) S. B. Dutt, ZAMM, H 7/8 **39** (1959) 290;
6) T. Ghosh, Indian Journ. of Theor. Phys. **10** (1962) 13;
7) T. Ghosh., Arch. Mech. Stosow. **1, 14** (1962) 15;
8) R. N. Chatterjee, Indian Journ. of Theor. Phys. **11** (1963) 57;
9) M. Bufler, ZAMM **43** (1963) 389;
10) M. Bufler, ZAMM **43** (1963) 545;
11) P. R. Ghosh, Bull. Calcutta Math. Soc. **59** (1967) 147;
12) A. M. Eishinskii, Rev. Roum. Sci. Techn. — Mecanique Appliquee **21, 4** (1976) 635;
13) A. Mukhopadhyay, J. Mukhopadhyay, Rev. Roum. Sci. Techn. — Mecanique Appliquee **25, 6** (1980) 871;
14) Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш, *Специальные функции*, Издательство »Наука«, Москва, 1968.

IZVIJANJE VELIKE DEBELE PLOČE PROMJENLJIVE KRUTOSTI

A. M. EIŠINSKIJ

Večernja škola 46, Dnjepropetrovsk, SSSR

UDK 539.41

Originalni znanstveni rad

Razmotren je problem torzije velike debele ploče čija je krutost promjenljiva u smjeru okomitom na površinu, pri čemu je jedna površina učvršćena.