YU ISSN 0015—3206
FZKAAA 15 (3) 311 (1983)

LETTER TO THE EDITOR

ПРИМЕРЫ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С СИНГУЛЯРНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ II

АЛЕКСАНДР М. ЭЙШИНСКИЙ

Вечерняя школа 46, 320 000 Днепропетровск, СССР

Received 5 October 1982

Revised manuscript received 3 March 1983

UDC 530.145

Original scientific paper

Two examples of one-dimensional Schrödinger equation with strongly singular potentials are considered and solutions vanishing at the origin are constructed using the well-known transcendental functions.

Пример 1

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$f'' + \frac{2m}{\hbar^2}\left[\frac{b_n}{\tau^n} + \frac{b_{n-1}}{\tau^{n-1}} + \dots + \frac{b_1}{\tau} + \varepsilon + \dots + a_p \quad \tau^p\right] f = 0. \tag{1}$$

$m, n > 0,\ p > 0,\ b_n, a_p$ -произвольные действительные числа.

Случаи $\tau \to \infty$

Подстановка

$$s^2 = \tau^{p+2} \tag{2}$$

преобразует дифференциальное уравнение (1) к виду

$$\frac{d^2 f}{ds^2} + \frac{p}{(p+2)\,s}\frac{df}{ds} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(\frac{2}{p+2}\right)^2 \cdot \left[\frac{b_n}{s^{\frac{2(p+n)}{p+2}}} + \frac{b_{n-1}}{s^{\frac{2(p+n-1)}{p+2}}} + \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{\varepsilon}{s^{\frac{2p}{p+2}}} + \ldots + a_p\right] f = 0. \qquad (3)$$

Подстановка

$$f = f_1 \cdot s^{-\frac{p}{2(p+2)}}, \qquad (4)$$

преобразует дифференциальное уравнение (3) к виду

$$\frac{d^2 f_1}{ds^2} + \left\{\frac{2m}{\hbar^2}\left(\frac{2}{p+2}\right)^2 \left[\frac{b_n}{s^{\frac{2(p+n)}{p+2}}} + \ldots + \frac{\varepsilon}{s^{\frac{2p}{p+2}}} + \ldots + ap\right] + \frac{p\,(p+4)}{4\,(p+2)^2\, s^2}\right\} f_1 = 0, \qquad (5)$$

$$f \underset{\tau\to 0}{\sim} \tau^{-\frac{p}{4}} \begin{cases} \sin\left(\frac{2}{p+2}\sqrt{\frac{2\,a_p m}{\hbar^2}} \cdot \tau^{\frac{p+2}{2}} + \psi\right), \; a_p > 0, \\ \psi \text{ -некоторое действительное число;} \\ \exp\left(-\frac{2}{p+2}\sqrt{\frac{-2m\,a_p}{\hbar^2}} \cdot \tau^{\frac{p+2}{2}}\right), \; a_p < 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Случаи $\tau \to 0$

Подстановка

$$f = \tau \cdot f_1(\xi) = \frac{1}{\tau}, \tau \to +0, \xi \to +\infty \qquad (7)$$

преобразует дифференциальное уравнение (1) к виду

$$\frac{d^2 f_1}{d\xi^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left[b_n\,\xi^{n-4} + b_{n-1}\,\xi^{n-5} + \ldots + \frac{\varepsilon}{\xi^4} + \ldots + \frac{a_p}{\xi^{p+4}}\right] f_1 = 0 \qquad (8)$$

Случаи $n > 2$

Подстановка

$$s = \xi^{\frac{n-2}{2}} \qquad (9)$$

преобразует дифференциальное уравнение (8) к виду

$$\frac{d^2 f_1}{ds^2} + \left(\frac{n-4}{n-2}\right) \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{df_1}{ds} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(\frac{2}{n-2}\right)^2 \cdot \left[b_n + \frac{b_{n-1}}{s^{\frac{2}{n-2}}} + \ldots + \frac{a_p}{s^{\frac{2(p+n)}{n-2}}}\right] f_1 = 0. \qquad (10)$$

Подстановка

$$f_1 = f_2 \cdot s^{-\frac{n-4}{2(n-2)}} \tag{11}$$

преобразует дифференциальное уравнение (10) к виду

$$\frac{d^2 f_2}{ds^2} + \left\{\frac{2m}{\hbar^2}\left(\frac{2}{-2+n}\right)^2 \cdot \left[b_n + \frac{b_{n-1}}{s^{\frac{2}{n-2}}} + \ldots + \frac{a_p}{s^{\frac{2(p+n)}{n-2}}}\right] + \frac{n(n-4)}{4(n-2)^2 \cdot s^2}\right\} f_2 = 0. \tag{12}$$

$$\underset{\tau\to 0}{f} \sim \tau^{\frac{n}{4}} \begin{cases} \exp\left(-\sqrt{\frac{-2m\, b_n}{\hbar^2}} \cdot \frac{1}{\tau^{\frac{n-2}{2}}}\right), b_n < 0; \\ \sin\left(\sqrt{\frac{2m\, b_n}{\hbar^2}} \cdot \frac{1}{\tau^{\frac{n-2}{2}}} + \psi\right), \; b_n > 0, \\ \psi \text{ -некоторое действительное число.} \end{cases} \tag{13}$$

Случаи $n = 2$

$$\underset{\tau\to 0}{f} = \begin{cases} \tau^{\frac{1+\sqrt{1-\frac{8m\,b_2}{\hbar^2}}}{2}}, b_2 < 0; \\ \tau^{\frac{1+\sqrt{1-\frac{8m\,b_2}{\hbar^2}}}{2}}, 1 - \frac{8m\,b_2}{\hbar^2} > 0, \; b_2 > 0; \\ c_1 \sqrt{\tau} + c_2 \sqrt{\tau} \cdot \ln\tau + o(1), \; 1 - \frac{8m\,b_2}{\hbar^2} = 0, b_2 > 0; \\ c_1 \sqrt{\tau} \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8m\,b_2}{\hbar^2} - 1} \cdot \ln\tau\right) + c_2 \sqrt{\tau} \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8m\,b_2}{\hbar^2} - 1} \cdot \right. \\ \left. \cdot \ln\tau\right) + o(1), \; 1 - \frac{8m\,b_2}{\hbar^2} < 0, \; b_2 > 0. \end{cases} \tag{14}$$

Заметим, что на стр. 168 реф. 1 в последнем случае имеется опечатка: вместо τ под знаком тригонометрических функций должно быть $\ln\tau$; всюду в реф. должно быть o (1).

Случаи $0 < n < 2$

Используя решения уравнения (11) из реф. 1 стр. 164 (где под знаком Бесселевой функции должно быть β), получаем

$$\underset{\tau\to 0}{f} \sim \begin{cases} \sqrt{\tau}\, J_{\frac{1}{2-n}}\left(\frac{2i}{2-n}\sqrt{\frac{2m(-b_n)}{\hbar}} \cdot \tau^{-\frac{(2-n)}{2}}\right), b_n < 0; \\ \sqrt{\tau}\, J_{\frac{1}{2-n}}\left(\frac{2}{2-n}\sqrt{\frac{2m\,b_n}{\hbar^2}} \cdot \tau^{-\frac{2-n}{2}}\right), b_n > 0. \end{cases} \tag{15}$$

Формулы (15) не удобны в приложениях; будет показано, что в этом случае будет

$$f = c_1\,\tau + c_2 + o(1). \tag{16}$$

Случаи $\tau \to \tau_1 \neq 0, \infty$

Подстановка

$$f = (\tau - \tau_1) f_1(\xi),\ \xi = \frac{1}{\tau - \tau_1},\ \tau \to \tau_1,\ \xi \to +\infty, \tag{17}$$

применённая к дифференциальному уравнению (1), даёт

$$f_{\tau - \tau_1} = c_1 + c_2 (\tau - \tau_1) + o(1). \tag{18}$$

Частным случаем примера 1 является задача $r \to 0$ (см. реф. 2)

$$\frac{d^2 f_2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df^2}{dr} + \left[\ldots - \frac{j(j+1)\,a}{E \cdot r^3}\right] f_2 = 0. \tag{19}$$

Подстановка

$$f_2 = r^{-1} \cdot f_3 \tag{20}$$

преобразует дифференциальное уравнение (19) к виду

$$\frac{d^2 f_3}{dr^2} + \left[\ldots - \frac{j(j+1)a}{E \cdot r^3}\right] f_3 = 0, \tag{21}$$

с помощью (13) получаем

$$(f_2)_{r \to 0} \sim r^{-1/4} \cdot \exp\left(-2\sqrt{\frac{a \cdot j(j+1)}{E \cdot r}}\right) \tag{22}$$

после чего энергия в реф. 2 легко определяется.

Примеры 1, 2, 3 и 6 из реф. 1 ($r \to 0$) являются частными случаями приведенных выше результатов; в случае $\tau \to 0$ при $a_p = \ldots = \varepsilon = b_1 = 0$ результат другим способом был получен в реф. 3; асимптотика из реф. 4 является частным случаем формулы (6) при $\tau \to 0$; частным случаем примера 1 ($\tau \to \infty$) является асимптотика решений однородного дифференциального уравнения (6.8) из реф. 5, только в формулах (6.9) и (6.10) из реф. 5 a должно равняться $\frac{1}{2}$. Частным случаем примера 1 является задача из реф. 6: найти стремящееся к нулю решение дифференциального уравнения при $u \to \infty$

$$\frac{d^2 f^{(0)}}{du^2} + \left(\frac{r+2}{u} - \frac{1}{u+u_1} + \frac{12\,m}{M} \cdot \frac{K-1}{K} \cdot \frac{u+u_1}{u_2^2}\right)\frac{df^{(0)}}{du} -$$

$$- \frac{6}{u_2^4} \cdot \frac{u+u_1}{u}\left[1 - 2(r+2) \cdot \frac{m}{M} \cdot (K-1)\right] f^{(0)} = 0. \tag{23}$$

Подстановка

$$f^{(0)} = \sqrt{\frac{u+u_1}{u^{r+2}}} \cdot \exp\left(-\frac{3m}{M}\left(\frac{K-1}{K \cdot u_2^2}\right) \cdot (u+u_1)^2\right) \cdot f_1 \tag{24}$$

преобразует дифференциальное уравнение (23) к виду

$$f_1'' + \left\{-\frac{36\, m^2}{M^2 \cdot u_2^4} \cdot \left(\frac{K-1}{K}\right)^2 \cdot (u+u_1)^2 - \frac{r\,(r+2)}{4u^2} - \right. \tag{25}$$

$$-\frac{3}{4\,(u+u_1)^2} - \frac{6}{K \cdot u_2^2}\left(1-(r+2)\cdot\frac{m}{M}\cdot(K-1)\right)\cdot\left(\frac{u+u_1}{u}\right) +$$

$$\left. + \frac{r+2}{u(u+u_1)^2}\right\} f_1 = 0.$$

Подстановка

$$s = (u+u_1)^2, u \to +\infty, \quad s \to +\infty \tag{26}$$

преобразует дифференциальное уравнение (25) к виду

$$\frac{d^2 f_1}{ds^2} + \frac{1}{2s}\cdot\frac{df_1}{ds} + \left\{-\frac{9m^2}{M^2 \cdot u_2^4}\left(\frac{K-1}{K}\right)^2 - \frac{r\,(r+2)}{16\, s\,(\sqrt{s}-u_1)^2} - \right.$$

$$\left. -\frac{3}{16s^2} - \frac{3\,[1-(r+2)\dfrac{m}{M}(K-1)]^2}{2K \cdot u_2^2 \cdot \sqrt{s}\,(\sqrt{s}-u_1)} + \frac{r+2}{16(\sqrt{s}-u_1)\, s^2}\right\} f_1 = 0. \tag{27}$$

Подстановка

$$f_1 = f_2 \cdot s^{-1/4} \tag{28}$$

преобразует дифференциальное уравнение (27) к виду из которого легко получаем, что

$$\tag{29}$$

Частным случаем примера 1 является задача из реф. 6: найти стремящееся к нулю решение дифференциального уравнения $u \to \infty$

$$\frac{d}{du}\left(\frac{u^{r+2}}{u+u_1}\cdot\frac{df^{(0)}}{du}\right) = \frac{6}{K \cdot u_2^2}\, u^{r+1} \cdot f^{(0)} \tag{30}$$

$$f^{(0)} \sim u^{-\frac{1}{2}\left(r+1+u_1 u_2\sqrt{\frac{K}{6}}\right)} \cdot \exp\left(-\frac{1}{u_2}\sqrt{\frac{6}{K}}\, u\right). \tag{31}$$

Остаётся сравнить (31) с асимптотикой из реф. 6.

Уравнение (36) из реф. 6

$$\frac{d^2 f^{(0)}}{dx^2} + \left(\frac{r+2}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\frac{df^{(0)}}{dx} - \left(1 + \frac{1}{x}\right) q^2 \cdot f^{(0)} = 0 \tag{32}$$

имеет решение

$$f^{(0)}_{x\to\infty} \sim x^{-\frac{r+q+1}{2}} \cdot e^{-xq}. \tag{33}$$

Остаётся сравнить формулу (33) с соответствующей асимптотикой из реф. 6.

Частным случаем примера $1(\tau\to\infty)$ является задача (см. реф. 7): найти стремяшееся к нулю при $x \to \infty$ решение уравнения

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + (ax^2 + bx^4 + cx^6 - E)\psi = 0 \tag{34}$$

$a > 0, b, c > 0$ -действительные числа.

Подстановка $s = x^4$ преобразует дифференциальное уравнение (34) к виду

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} + \frac{3}{4s}\frac{d\psi}{ds} + \left[-\frac{c}{16} - \frac{b}{16\sqrt{s}} - \frac{a}{16\,s} + \frac{E}{16s\sqrt{s}}\right]\psi = 0. \tag{35}$$

Подстановка $\psi = s^{-\frac{3}{8}}\psi_1$ окончательно дает

$$\psi \sim x^{\frac{a-12}{8}} \exp\left(\frac{-\sqrt{c}}{4}x^4\right).$$

Остаётся сравнить полученный результат с соответствующим результатом реф. 7.

Рассмотрим дифференциальное уравнение (см. реф. 8)

$$f'' - \left(\frac{A^2}{\tau^4} + \frac{B}{\tau^3} + \frac{C}{\tau^2}\right) f = 0. \tag{36}$$

Подстановка (7), применённая к (36), даёт

$$f_1'' + \left(-A^2 - \frac{B}{\xi} - \frac{C}{\xi^2}\right) f_1 = 0.$$

Случаи $1+4C>0$ $\xi_1 = 2\cdot A\cdot \xi$.

$$f_1 = c_1\,\mathrm{e}^{-\frac{A}{\tau}}\cdot \tau^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4c}}\cdot \Phi\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+4C}+\frac{B}{A}+1\right),\sqrt{1+4C}+1;\frac{2A}{\tau}\right)+$$

$$+\,c_2\,\mathrm{e}^{-\frac{A}{\tau}}\cdot \tau^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4c}}\cdot \Psi_k\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+4C}+\frac{B}{A}+1\right),\sqrt{1+4C}+1;\frac{2A}{\tau}\right).$$

Случаи $1+4C<0$, $A\neq 0$

$$f_1 = c_1\,\mathrm{e}^{-\frac{A}{\tau}}\cdot \tau^{\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{1}\sqrt{-1-4c}}\cdot \Phi\left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{i}\sqrt{-1-4C}+\frac{B}{A}+1\right),\mathrm{i}\sqrt{-4C-1}+\right.$$

$$\left.+1;\frac{2A}{\tau}\right)+c_2\,\mathrm{e}^{-\frac{A}{\tau}}\cdot \tau^{\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{-1-4c}}\cdot \Psi_k\left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{i}\sqrt{-1-4C}+\frac{B}{A}+1\right),\right.$$

$$\left.\mathrm{i}\sqrt{-4C-1}+1;\frac{2A}{\tau}\right)$$

Φ, Ψ_k -конфлюэнтные гипергеометрические функции (см. реф. 9).

Случаи $A=0$, $B>0$, $4C+1>0$

$$f_1 = \sqrt{\tau}\left(c_1 J_{\sqrt{4c+1}}\left(2\mathrm{i}\sqrt{\frac{B}{\tau}}\right)+c_2 J_{-\sqrt{4c+1}}\left(2\mathrm{i}\sqrt{\frac{B}{\tau}}\right)\right);$$

$$f_1 = \sqrt{\tau}\left(c_1 J_{\mathrm{i}\sqrt{-4c-1}}\left(2\mathrm{i}\sqrt{\frac{B}{\tau}}\right)+c_2 J_{-\mathrm{i}\sqrt{-4c-1}}\left(2\mathrm{i}\sqrt{\frac{B}{\tau}}\right)\right),\ \mathrm{B}>0{,}4C+1<0;$$

$$f_1 = \sqrt{\tau}\left(c_1 J_{\sqrt{4c+1}}\left(2\sqrt{\frac{-B}{\tau}}\right)+c_2 J_{-\sqrt{4c+1}}\left(2\sqrt{\frac{-B}{\tau}}\right)\right),\ \mathrm{B}<0,\ 4C+1>0;$$

$$f_1 = \sqrt{\tau}\left(c_1 J_{\mathrm{i}\sqrt{-4a-1}}\left(2\sqrt{\frac{-B}{\tau}}\right)+c_2 J_{-\mathrm{i}\sqrt{-4c-1}}\left(2\sqrt{\frac{-B}{\tau}}\right)\right),\ B<0,\ 4C+1<0.$$

Уравнение (36) является частным случаем примера 1 при $\tau\to 0$.

Частным случаем примера 1 является задача $\tau\to 0$ (см. реф. 10): Найти решение дифференциального уравнения

$$f''+\left[\frac{1}{4}-\frac{s}{\tau}+\frac{1-\mu^2}{4\tau^2}\right]f=0 \tag{37}$$

$$\lim_{\tau\to 0} f\cdot\tau^{\frac{-1-\mu}{2}}=1.$$

Подстановка (7), применённая к уравнению (37), приводит его к виду, из которого следует, что

$$f = c_1 \tau^{\frac{1-\mu}{2}} + c_2 \tau^{\frac{1+\mu}{2}} + o(1).$$

Остаётся положить $c_1 + 0$, $c_2 = 1$.

Пример 2

Дадим новый способ решения задачи (см. реф. 11), причём, в нашем рассмотрении $n > 0$ -произвольное действительное число.

Дано

$$(1 - a_0)^2 - 4b_0 < 0 \tag{38}$$

требуется найти асимптотическое представление решений уравнения

$$\tau^2 f'' + \tau (a_0 + a_1 \tau^n) f' + (b_0 + b_1 \tau^n) f = 0 \tag{39}$$

при $\tau \to 0$; пример 2 является частным случаем примера 1.

Подстановка

$$f = f_1 \cdot \tau^{-\frac{a_0}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{a_1 \cdot \tau^n}{2n}\right) \tag{40}$$

преобразует дифференциальное уравнение (39) к виду

$$\tau^2 \frac{d^2 f_1}{d\tau^2} + \left[\left(b_0 + \frac{a_0}{2} - \frac{a_0^2}{4}\right) + \tau^n \left(b_1 - \frac{a_1 (n-1)}{2} - \frac{a_0 a_1}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{a_1^2}{4} \tau^{2n}\right] f_1 = 0. \tag{41}$$

Подстановка (7) преобразует дифференциальное уравнение (41) к виду

$$\xi^2 \frac{d^2 f_2}{d\xi^2} + \left[b_0 + \frac{a_0}{2} - \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{\xi^n} \left(b_1 - \frac{a_1 (n-1)}{2} - \frac{a_0 a_1}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{a_1^2}{4\xi^{2n}}\right] f_2 = 0. \tag{42}$$

Подстановка

$$\xi = e^t, \tau \to +0, \ \xi \to +\infty, \ t \to +\infty \tag{43}$$

преобразует дифференциальное уравнение (42) к виду

$$\frac{d^2 f_2}{dt^2} - \frac{df_2}{dt} + \left[b_0 + \frac{a_0}{2} - \frac{a_0^2}{4} + e^{-nt}\left(b_1 - \frac{a_1(n-1)}{2} - \frac{a_0 a_1}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{a_1^2}{4} e^{-2nt}\right] f_2 = 0. \tag{44}$$

Подстановка

$$f_2 = f_0 \cdot e^{\frac{t}{2}} \tag{45}$$

преобразует дифференциальное уравнение (44) к виду

$$\frac{d^2 f_3}{dt^2} + \left[\frac{4b_0 - (1-a_0)^2}{4} + e^{-nt}\left(b_1 - \frac{a_1(n-1)}{2} - \frac{a_0 \cdot a_1}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{a_1^2}{4} e^{-2nt}\right] f_3 = 0. \tag{46}$$

Из дифференциального уравнения (46) следует

$$\underset{\tau \to 0}{f} = \tau^{\frac{1-a_0}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{a_1 \tau^n}{2n}\right) \cdot \left(c_1 \sin\left(\sqrt{4b_0 - (1-a_0)^2} \ln \tau\right) + \right.$$

$$\left. + c_2 \cos\left(\sqrt{4b_0 - (1-a_0)^2} \ln \tau\right) + o(1)\right).$$

Рассмотрим, пример из реф. 11:

$$\tau^2 f'' - \tau f' + (\tau + 2) f = 0,$$

$$\underset{\tau \to 0}{f} = c_1 \sin\left(\frac{\ln \tau}{\sqrt{2}}\right) + c_2 \tau \cos\left(\frac{\ln \tau}{\sqrt{2}}\right) + o(1).$$

Литература

1) A. M. Эйшинский, Fizika **13** (1981) 163;
2) W. Krolikowski, Acta Phys. Polon. **B12** (1981) 891;
3) N. Limić, Nuovo Cimento **26** (1962) 581;
4) J. J. Loeffel, A. Martin, B. Simon and A. S. Wightman, Phys. Letters **30B** (1969) 656;
5) M. Gusswein and E. Streeruwitz, Acta Phys. Austriaca **41** (1975) 41;
6) H. Margenau, Phys. Rev. **73** (1948) 297;
7) K. Datta and A. Rampal, Phys. Rev. D **23** (1981) 2875;
8) E. Predazzi and T. Regge, Nuovo Cimento **24** (1962) 581;
9) Е. Янке, Ф. Эмде and Ф. Лёш, *Специальные функции*. Наука, Москва, 1968;
10) С. П. Коутсоянис, К. Карамчети and Д. К. Галант, Ракетная техника и космонавтика **18** (1980) 48; AIAA Journ. **18** (1980) 1446;
11) J. L. Neuringer, Int. Journ. Math. Educ. Sci. Technol. **9** (1978) 71.

PRIMJERI SCHRÖDINGEROVE JEDNADŽBE SA SINGULARNIM POTENCIJALOM II

ALEKSANDR M. EISHINSKII

Večernjaja škola 46, 320 000 Dnjepropetrovsk, SSSR

UDK 530.145

Originalni znanstveni rad

Razmatrani su primjeri jednodimenzionalne Schrödingerove jednadžbe sa jako singularnim potencijalom. Pomoću dobro poznatih transcendentnih funkcija konstruirana su rješenja koja iščezavaju u ishodištu.

Printed by the Grafički zavod Hrvatske, Zagreb