

COMPLEX COORDINATES IN EXTENDED MANIFOLDS OF GENERAL RELATIVITY

VALERIJ S. GURIN and ALEXANDER P. TROFIMENKO

*Astronomical Section of Minsk Department of Astronomical-Geodesical Society of the
USSR, Minsk, USSR*

Received 14 June 1984

Revised manuscript received 6 September 1984

UDC 530.12

Original scientific paper

Investigating the most general case of the Kerr-Newman black hole space-time we show that the region between the event horizon and inner horizon can be considered as superluminal one in which space-time coordinates are changed to imaginary values. This region is unobservable from exterior. We conclude about a global dimensionality of the extended space-time manifolds and argue for introduction of higher dimensions in Relativity.

1. Введение

Идея комплексного пространства-времени (ПВ) в теории относительности не нова. Мнимое время было введено еще в работах Пуанкаре и Минковского для представления метрики специальной теории относительности (СТО) в евклидовой форме. Эйнштейн и Штраус¹⁾ в качестве варианта единой теории предлагали эрмитову теорию относительности с комплексной метрикой, что в дальнейшем развито в работах Тредера²⁾. Использование комплексного ПВ оказалось весьма плодотворным для разработки евклидовой квантовой теории гравитационного поля³⁾. Процедура комплексификации в точных решениях уравнений общей теории относительности (ОТО) используется ря-

дом авторов для получения вращательных метрик из статических^{4,5)}. В последние годы получила развитие математическая теория комплексных многообразий ОТО⁶⁾ и теория твисторов Пенроуза с применением комплексных переменных⁷⁾. Кроме того, следует отметить попытку аксиоматического построения комплексного ПВ Вселенной⁸⁾, а также комплексный вариант электродинамики⁹⁾.

Несколько иначе встает вопрос о комплексных переменных ПВ при едином рассмотрении тахионов и брадионов^{10,11)} в рамках расширенной теории относительности (РТО)¹²⁾, основанной на полной симметрии между тахионами и брадионами (принцип дуальности¹²⁾) при инверсии знака квадрата интервала ПВ при переходе от сублюминального к суперлюминальному описанию. Суперлюминальные преобразования РТО приводят к появлению мнимых величин для наблюдателей, находящихся по другую сторону от светового барьера относительно рассматриваемого явления^{13,14)}.

В завершение краткого обзора отметим использование комплексных координат в расширенных пространственно-временных многообразиях (ПВМ) ОТО, занимающих важное место в концепции «тонких миров»¹⁵⁾ для интерпретации ряда астрофизических феноменов (гамма-всплески, скрытая масса Вселенной, начальные неоднородности, «черные области», квазары)¹⁶⁾. В цикле работ Храпко¹⁷⁾ из математических соображений было введено 8-мерное комплексное ПВ для простейших гравитационных полей. Определенные физические и методологические основания для этого были предложены авторами на основании рассмотрения координат ПВ под горизонтом событий черной дыры как мнимых¹⁵⁾. Наиболее адекватным образом обосновать комплексное расширение теории относительности возможно с помощью суперлюминальных преобразований при едином рассмотрении тахионов и брадионов в многообразиях ОТО¹⁸⁾.

Данная работа посвящена дальнейшему развитию такого подхода. Будет последовательно показано, каким образом возникает необходимость в рассмотрении комплексного ПВ в теории относительности. Этот подход будет применен на основе обсуждаемого суперлюминального характера областей ПВ, отделенных горизонтами, к гравитационным полям черных дыр, расширенным ПВМ, а также и системе отсчета равноускоренного наблюдателя.

2. Комплексные величины при суперлюминальных преобразованиях

Сохранение принципа относительности для инерциальных систем отсчета при обобщении преобразований Лоренца на объекты, движущиеся быстрее света, требует изменения времениподобного интервала на пространственноподобный, или наоборот¹²⁾. Поэтому, если мы обозначим через x, y, z обычные декартовы координаты, а t — время, то между координатами в суб- и суперлюминальных системах отсчета будет иметь место соотношение (здесь и далее, кроме отдельных случаев, мы будем применять геометризованные единицы, в которых c , скорость света, и G , гравитационная постоянная, равны единице):

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 = -(dx')^2 - (dy')^2 - (dz')^2 + (dt')^2. \quad (1)$$

Если органичиться бустом вдоль оси x , то они удовлетворяются при преобразованиях¹²⁾

$$t' = \pm i(t - Vx)(1 - V^2)^{-1/2}, \quad x' = \pm i(x - Vt)(1 - V^2)^{-1/2}, \quad y' = \pm iy, \\ z' = \pm iz. \quad (2)$$

Здесь V — относительная скорость движения инерциальных систем (x, t) и (x', t') . Мнимые переменные здесь появляются с необходимостью. Более того, как показал Горини¹⁹⁾, не существует обобщений преобразований Лоренца к сверхсветовым скоростям с действительными переменными, удовлетворяющих условиям: сохранение инерциальности движения, сохранение пространственной изотропии, образования группы и инвариантности интервала с точностью до знака.

Таким образом, при совместном рассмотрении суб- и суперлюминальных событий необходимо аналитически продолжить переменные ПВ на комплексные значения. Это эквивалентно повышению размерности ПВМ, так как из принципа причинности следует независимость событий брадионного «мира» от тахионного, и наоборот, что формально выражается в независимости действительной и мнимой частей координат, описывающих такие события.

Полезно рассмотреть здесь также суперлюминальный буст при $V \rightarrow \infty$, называемый трансцендентным преобразованием²⁰⁾. При этом происходит полное превращение действительных координат в мнимые, что соответствует смыслу такого предельного случая:

$$x' = \pm ix, \quad y' = \pm iy, \quad z' = \pm iz, \quad t' = \pm it. \quad (3)$$

Из условия (1) следует, что²⁰⁾ $t' = x$, $x' = t$, поэтому (3) можно представить следующим образом:

$$t' = \pm x, \quad x' = \pm t, \quad y' = \pm iy, \quad z' = \pm iz. \quad (4)$$

Тогда становится понятным значение выражения «пространство и время меняются местами», которое часто используется для интерпретации свойств тахионов и внутренних областей черных дыр (см. ниже). Хотя лучше говорить о том, что пространственные и временные координаты становятся чисто мнимыми или, другими словами, ортогональными к исходным^{15,20)}. Кроме того, в суперлюминальной области интервал можно оставить равным таковому в сублюминальной области, то есть инвариантным при подобных преобразованиях, если перейти при $V > 1$ к соответствующим мнимым координатам:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 = d(ix')^2 + d(iy')^2 + d(iz')^2 - d(ir')^2.$$

Тогда в обеих областях интервал времениподобен, и, очевидно, что такая операция эквивалентна соотношению (1).

Таким образом, в РТО при введении мнимых координат для суперлюминальных событий интервал остается инвариантом. С учетом как суб- так и суперлюминальных событий принцип инвариантности интервала теории

относительности можно сохранить в комплексном ПВМ с координатами в декартовой системе $(x_{Re}, y_{Re}, z_{Re}, t_{Re}, x_{Im}, y_{Im}, z_{Im}, t_{Im})$ или (X, Y, Z, T) где²¹⁾

$$X = x_{Re} + ix_{Im}, \quad Y = y_{Re} + iy_{Im}, \quad Z = z_{Re} + iz_{Im}, \quad T = t_{Re} + it_{Im}. \quad (5)$$

Переходя к обобщению на случай риманова ПВ, метрику можно записать

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_{Re}^\mu dx_{Re}^\nu - g_{ik} dx_{Im}^i dx_{Im}^k, \quad (6)$$

где греческие индексы соответствуют действительным частям координат: $(\mu, \nu) = (1, 2, 3, 4)$, а латинские — мнимым: $(i, k) = (5, 6, 7, 8)$. Разбивка метрики (6) на две части не случайна: первое слагаемое описывает многообразие событий, наблюдаемое некоторым локальным наблюдателем для области ПВМ, ограниченной световым барьером, то есть в той же части светового конуса; второе слагаемое соответствует событиям в суперлюминальной области. Следует сказать, что такое представление соответствует также 6-мерной интерпретации тахон-брадионного ПВМ, разрабатываемой Павшичем^{10,11)}, Зиино, Коле (см. ссылки в работе 18), при введении 3-мерного времени. Как показано в работе Маккарроне и Реками²⁰⁾, такое 6-мерное ПВМ можно рассматривать как промежуточный шаг в интерпретации суперлюминальных явлений.

3. Суперлюминальный характер внутренних областей черных дыр

Как хорошо известно, черные дыры есть гравитационно сколлапсировавшие объекты, модели которых описываются точными решениями ОТО. Они характеризуются наличием псевдосингулярных поверхностей — горизонтов событий, делящих ПВМ на существенно различные по своим свойствам части. Мы в данном разделе рассмотрим область под горизонтом событий и покажем ее суперлюминальный характер для наиболее общего случая черной дыры Керра-Ньюмена, что в более простых случаях уже не раз отмечалось^{22–24,18)}.

Метрика Керра-Ньюмена в сплюснутых квазисфероидальных координатах Бойера-Линквиста записывается в виде²⁵⁾

$$ds^2 = -(\Sigma/\Delta) dr^2 - \Sigma d\Theta^2 - \Sigma^{-1} \sin^2 \Theta [adt - (r^2 + a^2) d\varphi]^2 + (\Delta/\Sigma) (dt - a \sin^2 \Theta d\varphi)^2, \quad (7)$$

где

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2, \quad \Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \Theta,$$

M — измеренная на бесконечности масса черной дыры, a — момент вращения на единицу массы, Q — электрический заряд.

Нефизические (координатные) сингулярности на горизонтах

$$r = r_{\pm} = M \pm (M^2 - a^2 - Q^2)^{1/2} \quad (8)$$

и поверхностях бесконечного красного и голубого смещений

$$r = R_{\pm} = M \pm (M^2 - a^2 \cos^2 \Theta - Q^2)^{1/2} \quad (9)$$

устраняются при подходящем преобразовании координат²⁵⁾. Мы ради простоты ограничимся случаем оси симметрии, $\Theta = 0$, $\varphi = \text{const}$, аналогично работам 26 и 27 (в общем случае $\Theta \neq 0$ данная задача не решается в аналитическом виде), когда метрика (7) упрощается до

$$ds^2 = (\Delta/\Sigma) dt^2 - (\Sigma/\Delta) dr^2. \quad (10)$$

При выражении новых координат (u, v) через старые (t, r) следующим образом: в областях $r > r_+$ и $0 < r < r_-$

$$u = f(r) \operatorname{ch}(kt), \quad v = f(r) \operatorname{sh}(kt), \quad (11a)$$

а в областях $r_- < r < r_+$

$$u = f(r) \operatorname{sh}(kt), \quad v = f(r) \operatorname{ch}(kt) \quad (11b)$$

новая несингулярная метрика получится конформно-плоской

$$ds^2 = A(u, v) (dv^2 - du^2). \quad (12)$$

Заметим, что появление различных координатных карт в (11) в различных областях ПВ, разделенных псевдосингулярными поверхностями, является здесь необходимым, так как характер координат принципиально меняется при переходе через эти поверхности, а области, разделенные горизонтами, не являются причинно взаимосвязанными²⁵⁾.

Можно легко показать, что псевдосингулярности исключаются при следующих соотношениях для $f(r)$ и k в (11):

$$f(r) = \text{const} \cdot \exp(-kr^*), \quad (13)$$

где

$$r^* = r + k_+^{-1} \ln |r - r_+| + k_-^{-1} \ln |r - r_-|,$$

$k = k_{\pm} = (r_{\pm} - r_{\mp})(r_{\pm}^2 + a^2)^{-1}$ в окрестности $r = r_{\pm}$, соответственно. Конформный множитель $A(u, v)$ в (12) определяется через

$$A^2 = (r^2 + a^2)^{-1} k^{-2} \exp(-2kr) (r - r_+)^{(1-k/k_+)} (r - r_-)^{(1-k/k_-)}. \quad (14)$$

Таким образом, при подобной процедуре координатные карты соединяются на горизонтах, образуя расширенное ПВМ с нетривиальной топологией.

В таком многообразии геодезические, выражающие движение материальных частиц, оказываются непрерывными²⁶⁾, и его можно назвать геодезически полным. Покажем теперь, что такое ПВМ может быть представлено как набор суб- и суперломинальных областей.

Прежде всего рассмотрим характер интервала для двух событий, происходящих в одной пространственной точке и разделенных только по времени, так что $dr = 0$. Тогда, очевидно, $ds^2 = (\Delta/\Sigma) dt^2$. Воспользовавшись соотношениями, связывающими (u, v) -координаты и t

$$u/v = \text{cth}(kt), \quad u/v = \text{th}(kt),$$

которые справедливы в областях $r > r_+$ и $r_- < r < r_+$, соответственно, получим для полного ПВМ

$$ds^2 = (\Delta/\Sigma) (v du - u dv)^2 k^{-2} (v^2 - u^2)^{-2}. \quad (15)$$

Таким образом, в несингулярных координатах можно видеть, что интервал между двумя рассматриваемыми событиями становится мнимым при $r_- < r < r_+$, где $\Delta < 0$, что показывает пространственноподобный характер данной области.

В связи с этим представляет интерес рассмотреть поведение скорости движения пробной частицы в таком поле. Уравнения геодезических в рассматриваемом случае оси симметрии в метрике Керра-Ньюмена записываются в следующем виде²⁶⁾:

$$dr/d\lambda = \pm (r^2 + a^2)^{-1} [E^2 (r^2 + a^2)^2 - \Delta (m^2 r^2 + a^2 E^2)]^{1/2}, \quad (16a)$$

$$dt/d\lambda = (r^2 + a^2) E/\Delta, \quad (16b)$$

где λ — произвольный аффинный параметр, m — масса покоя движущейся частицы, E — ее полная энергия. Скорость частицы в поле тяготения определяется формулой²⁸⁾

$$V = \pm (-g_{rr}/g_{tt})^{1/2} dr/dt. \quad (17)$$

В нашем случае будем иметь

$$V = \pm (\Sigma/\Delta) dr/dt. \quad (18)$$

Верхний знак здесь соответствует движению, направленному от центра поля (сингулярности), нижний — к центру. Используя уравнения геодезических (16) и (17) можно легко получить

$$V = 1 - \Delta (m^2 r^2 + a^2 E^2) (r^2 + a^2)^{-2} E^{-1}. \quad (19)$$

Из этого соотношения видно, что в области между горизонтами ($\Delta < 0$) $r_- < r < r_+$ имеют место значения скорости $V > 1$, то есть сверхсветовые

в данной системе координат. Но сверхсветовая скорость в данном случае не противоречит релятивистскому принципу причинности, так как область ПВМ $r_- < r < r_+$ является ненаблюдаемой для внешнего наблюдателя, и, более того, с точки зрения последнего никакая частица не пересекает горизонт за конечное время. Как известно²⁵⁾, пересечение горизонта за конечное время возможно только в собственной системе отсчета падающего тела или коллапсирующего вещества.

Изменение характера координат между горизонтами видно уже и из самой метрики (7) или (10), которое выражается в последней в перемене знаков метрических коэффициентов перед пространственной и временной координатами. В общем это представляется при переходе между областями ПВМ с различными знаками g_{tt} и g_{rr} как инверсия знака квадрата интервала: $ds^2 \rightarrow -ds^2$, что можно назвать трансцендентным суперлюминальным преобразованием^{12, 20)}. Таким образом, суперлюминальное преобразование соответствует переходу между различными областями ПВМ, разделенными горизонтами. Так же как для расширения теории относительности за скорость света нужно использовать новые (суперлюминальные) преобразования координат, так для построения расширенного ПВМ гравитационного поля с горизонтами мы использовали покрытие полного ПВ набором координатных карт.

Следует отметить, что вывод о суперлюминальном характере области ПВМ $r_- < r < r_+$ не является формальной аналогией. Наличие сходных особенностей (световой барьер в СТО и горизонт событий в ОТО) и областей ПВМ (суперлюминальной в расширенной СТО и под горизонтом событий в расширенных многообразиях ОТО) основывается на общем для этих теорий принципе близкодействия, то есть наличия в них конечной фундаментальной скорости распространения взаимодействий. Рассмотрим эти особенности в СТО в сравнении с полем Шварцшильда (получающимся из поля Керра-Ньюмена с метрикой (7) при $a = Q = 0$), где собственные и координатные промежутки времени и расстояния имеют следующий вид для прямолинейного движения со скоростью V и поля Шварцшильда, соответственно,

$$t = t_0 (1 - V^2/c^2)^{-1/2}, \quad l = l_0 (1 - V^2/c^2)^{1/2}; \quad (20)$$

$$t = t_0 (1 - 2M/rc^2)^{1/2}, \quad l = l_0 (1 - 2M/rc^2)^{-1/2}. \quad (21)$$

Первая пара выражений при $V = c$, а вторая пара при $r = r_g = 2Mc^2$ становятся сингулярными (здесь t_0 и l_0 — собственные промежутки времени и расстояния, соответственно). При $V > c$, $r < r_g$ все величины слева становятся мнимыми. Если же мы перейдем к нерелятивистскому пределу $c \rightarrow \infty$, то все координатные сингулярности исчезают, а вместе с ними и разделение ПВМ на области: суб- и суперлюминальную, под и над горизонтом событий.

Можно легко видеть, что при $c \rightarrow \infty$ исчезают также все особые поверхности в общем случае поля Керра-Ньюмена.

Таким образом, неевклидова топология ПВМ (наличие псевдосингулярных поверхностей, более высокая размерность) как в СТО, так и в ОТО обусловлена конечностью фундаментальной скорости²⁹⁾. Благодаря ей все глобальное многообразие разбивается на причинно невязанносвязанные области, разделенные либо горизонтами, либо световым барьером.

4. Расширенные ПВМ в комплексном представлении

В начале предыдущего раздела мы показали, каким образом может быть описано полное ПВМ с помощью покрытия набором различных координатных карт. Основываясь на идее аналитического продолжения в комплексную плоскость координат ПВ¹⁷⁾ и учитывая суперлюминальный характер областей, разделенных горизонтами, мы представим ПВМ без необходимости деления пространства на координатные окрестности. Вместо введения набора координатных преобразований мы повысим размерность рассматриваемого описания ПВ.

Основываясь на результатах предыдущей части данной работы, можно считать, по крайней мере формально, метрику для расширенного многообразия с горизонтом (например, черной дыры) комплексной:

$$ds^2 = g_{AB} dx^A dx^B, \quad (A, B) = (1, 2, \dots, 8). \quad (22)$$

Согласно такому представлению любое событие в глобальном ПВ определяется восемью координатами

$$E_{\text{glob}} = (X, Y, Z, T) = (x_{\text{Re}}, y_{\text{Re}}, z_{\text{Re}}, t_{\text{Re}}, x_{\text{Im}}, y_{\text{Im}}, z_{\text{Im}}, t_{\text{Im}}),$$

причем в действительном и мнимом подпространствах, соответственно,

$$E_{\text{Re}} = (x_{\text{Re}}, y_{\text{Re}}, z_{\text{Re}}, t_{\text{Re}}); \quad E_{\text{Im}} = (x_{\text{Im}}, y_{\text{Im}}, z_{\text{Im}}, t_{\text{Im}}).$$

Следует однако иметь в виду, что некоторыми конкретными наблюдателями (суб- и суперлюминальными, находящимися либо над горизонтом либо под ним) наблюдаются только какие-либо четыре координаты. Другими словами, наблюдаемая размерность для фиксируемых событий в различных областях ПВМ, а также для тахионов и брадионов локально остается равной четырем. Размерность равную восьми можно приписывать ПВ в глобальном смысле¹⁸⁾; ее требует принцип инвариантности событий теории относительности при учете всего многообразия явлений, происходящих с тахионами и брадионами в различных областях ПВМ, разделенных горизонтами.

Геометрически глобальное ПВ может быть представлено как произведение римановых 4-мерных пространств

$$R_8 = R_4^{\text{Re}} \otimes R_4^{\text{Im}}. \quad (23)$$

Тогда R_4^{Re} , например, есть лишь некоторая гиперповерхность в объемлющем 8-мерном многообразии, что аналогично выводам, следующим из теории расширенной относительности^{10,11)}.

Теперь рассмотрим ПВМ гравитационного поля Шварцшильда в комплексном представлении. Метрика в области $r < r_g$ может быть получена из обычной шварцшильдовской при трансцендентном суперлюминальном пре-

образовании, что эквивалентно в данном случае заменам $r \rightarrow iq$, $t \rightarrow it$, учитывая также мнимый характер суперлюминальной массы после такого преобразования¹⁸⁾. В общем случае нетрансцендентных преобразований получится нестационарная метрика, соответствующая движущейся черной дыре. Проведя указанные замены, получим

$$ds^2 = -(1 - 2M/r)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + \\ + (1 - 2M/r) dt^2 + (1 - 2M/q)^{-1} dq^2 - q^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - \\ - (1 - 2M/q) dt^2. \quad (24)$$

Комплексное 8-мерное представление глобального ПВМ шварцшильдовского поля можно получить в декартовых координатах, где

$$r_{\text{Re}}^2 = x_{\text{Re}}^2 + y_{\text{Re}}^2 + z_{\text{Re}}^2, \quad r_{\text{Im}}^2 = x_{\text{Im}}^2 + y_{\text{Im}}^2 + z_{\text{Im}}^2.$$

Такая метрика имеет вид

$$ds^2 = dr_{\text{Re}}^2 - dx_{\text{Re}}^2 - dy_{\text{Re}}^2 - dz_{\text{Re}}^2 - 2Mr_{\text{Re}}^{-3} (x_{\text{Re}} dx_{\text{Re}} + y_{\text{Re}} dy_{\text{Re}} + \\ + z_{\text{Re}} dz_{\text{Re}} + r_{\text{Re}} dt_{\text{Re}})^2 - dr_{\text{Im}}^2 + dx_{\text{Im}}^2 + dy_{\text{Im}}^2 + dz_{\text{Im}}^2 + \\ + 2Mr_{\text{Im}}^{-3} (x_{\text{Im}} dx_{\text{Im}} + y_{\text{Im}} dy_{\text{Im}} + z_{\text{Im}} dz_{\text{Im}} + r_{\text{Im}} dt_{\text{Im}})^2. \quad (25)$$

Следует иметь в виду, что минимальная размерность глобального ПВ должна определяться классом вложения рассматриваемого многообразия. Для ПВМ Шварцшильда она равна шести³¹⁾. В такое 6-мерное объемлющее многообразие может быть вложена шварцшильдовская метрика как в брадионном так и в тахионном вариантах¹⁸⁾. Учитывая псевдоевклидовость метрики объемлющего пространства, можно предположить, что в таком представлении ОТО возможно решение известной проблемы сохранения для тензора энергии-импульса³¹⁾, которая требует для своего решения введение высших размерностей в теорию²⁹⁾.

Очевидно, что рассуждения, представленные в данном разделе для ПВМ Шварцшильда могут быть применены и к общему решению для черной дыры Керра-Ньюмена. Однако подобный подход осложняется необходимостью интерпретации вращающейся суперлюминальной системы отсчета в гравитационном поле и более сложной структурой псевдосингулярных поверхностей, разделяющих области изменения действительных и мнимых координат:

$$r_{\text{Re}}:]r_+; +\infty[\cup]0; r_-[, \quad r_{\text{Im}}:]r_-; r_+[, \\ t_{\text{Re}}:]R_+; +\infty[\cup]0; R_-[, \quad t_{\text{Im}}:]R_-; R_+[. \quad (26)$$

Поэтому, если полное ПВМ Шварцшильда мы могли представить в 8-мерном многообразии как произведение двух 4-мерных римановых пространств (23), то в случае поля Керра-Ньюмена необходимо рассмотреть более сложную топологическую структуру

$$R_8 = R_4^{j=1} \otimes R_4^{j=2} \otimes \dots \otimes R_4^{j=n}, \quad (27)$$

где j — номер подпространства. В таком случае предложенный подход будет развит авторами в последующих работах.

5. Пространство-время ускоренного наблюдателя: возможность тахион-брадионного перехода

В оставшейся части статьи мы применим выводы о суперлюминальном характере определенных областей в расширенных ПВМ и развиваемое представление о комплексном ПВ к системе отсчета равномерно ускоренного наблюдателя и покажем принципиальную возможность перехода в рамках ОТО к сверхсветовым скоростям.

В рамках РТО¹²⁾ сверхсветовые скорости рассматриваются равноправным образом с досветовыми, но переход через световой барьер запрещен. Однако в ОТО хорошо известны возможности расширения ПВМ через горизонты²⁵⁾. По-существу, расширение через световой барьер уже и было произведено в первых работах по продолжению поля Шварцшильда за горизонт событий. Мы рассмотрим здесь этот вопрос вне зависимости от существования черных дыр в равноускоренной системе.

Рассмотрим некоторый объект с точки зрения его собственной системы отсчета, который движется с постоянным ускорением A , равным, скажем, ускорению свободного падения в поле Земли g . Такой объект может двигаться неограниченно долго без каких-либо принципиальных ограничений (в собственной системе!). Исходя из элементарных соображений можно определить время и расстояние, на которых достигается при постоянном ускорении величина скорости света:

$$t = c/g, \quad r = gt^2/2 = c^2/2g. \quad (28)$$

Численно $t = 3 \cdot 10^7$ с ≈ 1 год, $r = 0,5 \cdot 10^{18}$ см $\approx 0,5$ световых года.

В рамках ОТО это можно показать и более строго. Рассмотрим геометрию системы отсчета равноускоренного наблюдателя в сферических координатах³²⁾:

$$ds^2 = (1 + Ar \cos \Theta)^{-2} [(1 - A^2 r^2) dt^2 - (1 - A^2 r^2)^{-1} dr^2 - r^2 (d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\varphi^2)], \quad (29)$$

где A — постоянное ускорение, r — расстояние от наблюдателя, с которым связывается начало системы координат, до ускоряющегося объекта. Данная метрика во многом подобна хорошо известной метрике де-Ситтера и переходит в последнюю при выделении только экваториальной плоскости, $\Theta = \pi/2$, и при переобозначении постоянных параметров: $A^2 = 1/3$, где 1 — космологическая постоянная. В данном ПВМ поверхность $r = A$ является горизонтом.

Обычными методами можно показать, что объект по отношению к наблюдателю будет постепенно исчезать из вида, асимптотически приближаясь к $r = A$, но никогда не пересекая этой поверхности. Мы имеем определенную аналогию с поведением объектов в поле шварцшильдовской черной дыры. В системе отсчета удаленного покоящегося наблюдателя (по координатному времени) геодезические должны быть неполны и сингулярны при $r = A$.

В самом деле, они имеют вид геодезических в ПВ де-Ситтера³³⁾ с указанными заменами:

$$dr/dt = \pm E^{-1} (1 - A^2 r^2) (E^2 - 1 + A^2 r^2 - L^2 r^{-2} + L^2 A^2)^{1/2}, \quad (30a)$$

$$d\varphi/dt = E^{-1} r^{-2} L (1 - A^2 r^2). \quad (30b)$$

где E и L — энергия (на единицу массы) и момент импульса движущейся частицы, соответственно. Видно, что радиальная и угловая скорости обращаются в нуль на горизонте $r = A$. Геодезические по собственному времени определяются тогда следующими уравнениями:

$$dr/ds = \pm (E^2 - 1 + A^2 r^2 - L^2 r^{-2} + L^2 A^2)^{1/2}, \quad (31a)$$

$$d\varphi/ds = L r^{-2}. \quad (31b)$$

Эти уравнения не обнаруживают особенности на поверхности $r = A$, что показывает возможность движения через горизонт по отсчету собственного времени.

В данном ПВ, подобно ПВМ черных дыр может быть построено расширенное многообразие, перекрывающее области, разделенные горизонтами. Это позволяет сделать вывод, что в равноускоренной системе отсчета частица может пересечь горизонт $r = A$ за конечное время и выйти в суперлюминальную область, где $r > A$. В самом деле, метрику (29) в двумерном случае $\theta = \pi/2$, $\varphi = \text{const.}$ можно превратить в плоскую $ds^2 = dt^2 - dz^2$ посредством преобразований³²⁾

$$t = A^{-1} \text{sh}(Aw) + r \cdot \text{ch}(Aw), \quad z = A^{-1} \text{ch}(Aw) + r \cdot \text{sh}(Aw), \quad (32)$$

где введено $w = t + \int (1 - A^2 r^2)^{-1} dr$.

Теперь легко найти форму преобразований Лоренца в ускоренной системе отсчета в координатах (w, r) которые запишутся:

$$\begin{aligned} A^{-1} \text{sh}(Aw') + r' \text{ch}(Aw') &= \\ &= \frac{A^{-1} \text{sh}(Aw) + r \text{ch}(Aw) - \bar{V} [A^{-1} \text{ch}(Aw) + r \text{sh}(Aw)]}{(1 - \bar{V}^2)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (33a)$$

$$\begin{aligned} A^{-1} \text{ch}(Aw') + r' \text{sh}(Aw') &= \\ &= \frac{A^{-1} \text{ch}(Aw) + r \text{sh}(Aw) - \bar{V} [A^{-1} \text{sh}(Aw) + r \text{ch}(Aw)]}{(1 - \bar{V}^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (33b)$$

Для рассмотрения поведения сингулярного множителя $(1 - \bar{V}^2)^{1/2}$ вычислим скорость $\bar{V} = dz/dt$ и ее квадрат:

$$\bar{V}^2 = \frac{(VA + 1)^2 \text{sh}^2(Aw) + A^2 r^2 \text{ch}^2(Aw) + 2Ar(VA + 1) \text{ch}(Aw) \text{sh}(Aw)}{(VA + 1)^2 \text{ch}^2(Aw) + A^2 r^2 \text{sh}^2(Aw) + 2Ar(VA + 1) \text{sh}(Aw) \text{ch}(Aw)} \quad (34)$$

Можно видеть, что при скорости, вычисленной в собственной системе отсчета $V = dr/dt = 1$ сингулярность в рассматриваемом множителе отсутствует. Следовательно, в этой системе отсчета будет отсутствовать сингулярность в различных релятивистских формулах (для массы, энергии и др.), которыми обычно обосновывают невозможность достижения и преодоления светового барьера материальными телами. Видно, что устранение этой сингулярности в данном случае обусловлено множителями, содержащими ускорение A .

Следует напомнить, что полученное заключение не противоречит обычному выводу о недостижимости скорости света в СТО. Относительно инерциальной сублюминальной системы отсчета этого никогда не происходит. Так же как возможно пересечение горизонта событий черной дыры в падающей системе, ненаблюдаемое, однако, извне; так в собственной равноускоренной системе возможно пересечение светового барьера без нарушения принципов относительности.

В заключение заметим, что ПВМ равноускоренного наблюдателя может быть представлено в комплексной форме и в пространстве более высокой размерности, если принять во внимание результаты раздела 4, что является предметом отдельной работы.

6. Выводы

Основываясь на результатах РТО мы в данной работе рассмотрели применение комплексного ПВ к расширенным многообразиям ОТО. Получены следующие основные выводы.

1. При аналитическом продолжении координат к комплексным значениям интервал в теории относительности остается инвариантом.
2. Показано для метрики Керра-Ньюмена, что определенные области ПВМ, отделенные горизонтами, являются суперлюминальными.
3. Осуществлено построение расширенного ПВМ в комплексном представлении.
4. Показано, что при едином рассмотрении всего многообразия событий в полном ПВМ, связанных с брадионами и тахионами и происходящих в различных его областях, глобальная размерность равна восьми.
5. Неевклидова топология ПВМ (координатные сингулярности, высшие размерности) как в ОТО, так и в СТО обусловлены конечностью фундаментальной скорости.
6. Определена возможность брадион-тахионных переходов в равномерно ускоренной (собственной) системе отсчета.

В заключение авторы глубоко благодарят проф. Павшича М. (Pavšić M.) и проф. Реками Э. (Resami E.) за высылку оттисков и препринтов своих работ, за интерес к работе и замечания, а также проф. Новикова И. Д. и Старобинского А. А. за дискуссию.

Литература

- 1) A. Einstein and E. Straus, *Ann. Math.* **47** (1946) 731; **46** (1945) 578;
- 2) H.-J. Treder, *Ann. Phys. (DDR)* **B40** (1983) 81;
- 3) S. W. Hawking, in *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*, Cambridge, 1979, p. 746;
- 4) E. T. Newman, *J. Math. Phys.* **14** (1973) 744;
- 5) M. M. Schiffer, R. J. Adler, and J. Mark, *J. Math. Phys.* **14** (1973) 52;
- 6) E. J. Flaherty, in *General Relativity and Gravitation*, Ed. A. Held, New York—London, 1980, ch. 5;
- 7) R. Penrose, in *Quantum Gravity: An Oxford Symposium*, Clarendon Press, 1975, ch. 6;
- 8) E. H. Brown, *J. Math. Phys.* **7** (1966) 417;
- 9) D. Weingarten, *Ann. Phys. (USA)* **76** (1973) 510;
- 10) M. Pavšić, *Lett. Nuovo Cim.* **30** (1981) 111;
- 11) M. Pavšić, *J. Phys.* **A14** (1981) 3217;
- 12) E. Recami and R. Mignani, *Riv. Nuovo Cim.* **4** (1974) 209;
- 13) H. C. Corben, *Nuovo Cim.* **A29** (1975) 415;
- 14) E. Recami and G. D. Maccarrone, *Lett. Nuovo Cim.* **28** (1980) 151;
- 15) А. П. Трофименко, *Отоны и пространство-время*. Депонированно в ИНИОН АН СССР № 12431 (1982);
- 16) А. П. Трофименко, *Принцип развития в астрофизике*. Депонированно в ИНИОН АН СССР № 2027 (1978); *Вселенная и развитие*, Минск, Наука и техника, 1981;
- 17) Р. И. Храпко, *Доклады АН СССР* **176** (1967) 56; *ЖЭТФ* **50** (1966) 1636;
- 18) V. S. Gurin, *Fizika* **16** (1984) 87;
- 19) V. Gorini, *Comm. Math. Phys.* **21** (1971) 150;
- 20) G. D. Maccarrone and E. Recami, Preprint INFN/AE-82/12;
- 21) C. Ramon and E. A. Rauscher, *Found. Phys.* **10** (1980) 661;
- 22) B. A. Унт, *Труды института физики и астрономии АН ЭССР*, № 16 (1961);
- 23) R. Goldoni, *Acta Phys. Austr.* **41** (1975) 133; *Lett. Nuovo Cim.* **21** (1978) 333;
- 24) V. De Sabbata, M. Pavšić, and E. Recami, *Lett. Nuovo Cim.* **19** (1977) 341;
- 25) S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, 1973, ch. 5;
- 26) B. Carter, *Phys. Rev.* **141** (1966) 1242; **174** (1968) 1559;
- 27) R. Gautreau, *Nuovo Cim.* **A50** (1967) 120;
- 28) Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Москва, Наука, 1973; гл. 10;
- 29) А. П. Трофименко, *Диалектика и проблемы теории отонов*. Депонированно в ИНИОН АН СССР № 2668 (1978);
- 30) W. Rindler, *Amer. J. Phys.* **34** (1966) 1174;
- 31) Б. И. Петров и др., *Проблемы управления релятивистскими и квантовыми динамическими системами*, Москва, Наука, 1982, с. 198;
- 32) W. Kinnersley and M. Walker, *Phys. Rev.* **D2** (1970) 1359;
- 33) Р. Толмен, *Относительность, термодинамика и космология*, Москва, Наука, 1974, § 144.

KOMPLEKSNE KOORDINATE U PROŠIRENIM VIŠESTRUKOSTIMA OPĆE TEORIJE RELATIVNOSTI

VALERIJ S. GURIN i ALEKSANDER P. TROFIMENKO

Astronomska sekcija Odjela astronomsko-geofizičkog društva SSSR u Minsku, Minsk, SSSR

UDK 530.12

Originalni znanstveni rad

U istraživanju najopćenitijeg slučaja Kerr-Newmannove crne rupe vremena-prostora je pokazano da se oblast između horizonta događaja i unutrašnjeg horizonta može smatrati superluminalnom u kojoj koordinate prostora-vremena postaju imaginarne. Tu oblast se ne može opaziti izvana. Na temelju toga izvodimo zaključak o globalnoj dimenzionalnosti proširenih višestrukosti prostora-vremena i tvrdimo da postoji potreba da se uvede više dimenzija u relativnost.