

math.e

Hrvatski matematički elektronički časopis

Prijenos topline, Brownovo gibanje i matematičko modeliranje financijskih kretanja

Sebastijan Marinić

Sveučilište u Rijeci, Fakultet za matematiku
(student diplomskog studija Diskretna
matematika i primjene),
e-mail:

sebastijan.marinic@student.uniri.hr

Ivana Slamić

Ivana Slamić, Sveučilište u
Rijeci, Fakultet za
matematiku (docent),
e-mail:

islamic@math.uniri.hr

Sažetak

Opisivanje prijenosa topline provođenjem problem je koji je pokrenuo razvoj Fourierove, ali i matematičke analize općenito. Problem se opisuje parcijalnom diferencijalnom jednačbom za čije se rješenje koriste Fourierovi redovi. No, pokazat ćemo da je ta jednačba univerzalnija, odnosno da ne opisuje samo širenje topline već i procese i probleme iz drugih područja, kao što su kemija i financijska matematika. Ta je jednačba poseban slučaj difuzijske jednačbe, od fundamentalne je važnosti čak i u kvantnoj fizici te je igrala ulogu pri dokazu postojanja atoma.

1 Uvod

Pretpostavimo da metalni štap na jednom kraju zagrijavamo pomoću svijeće. Vrlo brzo moći ćemo primijetiti da se toplina širi, odnosno prenosi iz dijela štapa koji se nalazi točno iznad svijeće prema suprotnom kraju. No, kako taj proces nastaje, što je zapravo toplina, kako se razlikuje od pojma temperature i kako tu veličinu mjeriti? *Toplina* je fizikalna veličina kojom se opisuje energija koja prelazi s toplijeg tijela (tijelo s više toplinske energije) ka hladnijem (tijelo s manje toplinske energije), dok je *temperatura* fizikalna veličina koja opisuje sposobnost tijela da izmjenjuje toplinu s okolinom. Primjerice, zagrijemo li manju i veću prostoriju (manju/veću volumenom) istom količinom električne energije, manja će prostorija imati višu temperaturu od one veće, ali će toplina (količina toplinske energije) obje prostorije biti jednaka.



Slika 1: Zagrijavanjem tankog metalnog štapa toplina se prenosi iz područja više u područje niže temperature. Dokaz toga u ovom pokusu su kolotovi voska koji se postepeno tope.

Postoji nekoliko načina prijenosa topline – *provođenje* ili *kondukcija*, *strujanje* ili *konvekcija* te *zračenje* ili *radijacija*. Prvi nastaje prilikom dodira tijela s izvorom topline, drugi strujanjem fluida, dok je treći posljedica elektromagnetskog zračenja (na primjer, na ovaj način Sunce grije Zemlju). Razvoj instrumenata pomoću kojih je bilo moguće vršiti pouzdana i ponovljena mjerenja te raditi usporedbu bilo je ključno za razvoj znanosti o toplini. Među takva otkrića i izume spada usavršavanje živinog termometra za mjerenje temperature i formiranje standardizirane ljestvice (Fahrenheit¹, 1724.), otkriće latentne temperature i specifičnog toplinskog kapaciteta (Black², 1760.) te njihovo mjerenje i razvoj prvog kalorimetra (Laplace³ i Lavoisier⁴, 1783.).

Ako se vratimo na polazni primjer, jedno od prirodnih pitanja je kako opisati prijenos topline matematički, odnosno temperaturu kao funkciju prostora i vremena, a to je problem koji spada u područje *termodinamike*. Ova se grana fizike razvila u 19. stoljeću, pri čemu se kao razlog navodi potreba za povećanjem učinkovitosti ranih parnih strojeva. Prvi je princip postavio francuski fizičar Sadi Carnot⁵ 1824. godine; točnije, postavio je zakon koji se danas zove *drugi zakon termodinamike*. *Prvi zakon termodinamike* vezan je uz očuvanje energije i kaže da je promjena unutarnje energije sustava jednaka razlici topline dodane sustavu i rada koji sustav vrši. Drugim riječima, energija se ne može stvoriti ili uništiti, već se samo pretvara iz jednog oblika u drugi. Uz odsutstvo rada, promjena unutarnje energije tijela proporcionalna je promjeni temperature, ovisi o gustoći materijala te specifičnom toplinskom kapacitetu c .

Na početku 19. stoljeća, kada je ova grana još bila u fazi razvitka, francuski matematičar i fizičar Joseph Fourier⁶ predstavio je svoj rad "*Sur la propagation de la chaleur*" u kojem je opisao provođenje topline. Fourier je taj opis temeljio na zakonu koji u današnjoj notaciji glasi:

$$q = -K \cdot \nabla u, \quad (1)$$

te kaže da je brzina prijenosa toplinske energije po jedinici vremena te kroz područje jedinične površine proporcionalna temperaturnom gradijentu ∇u , pri čemu K pozitivna konstanta i ovisi o materijalu od kojeg je tijelo napravljeno. Danas je ovaj zakon poznat kao *Fourierov zakon provođenja topline*. Rad je od iznimne važnosti zbog rješavanja problema prijenosa topline, ali i zbog ideje koju je koristio pri rješavanju, a to je da se svaka periodična funkcija može prikazati pomoću reda oblika

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad (2)$$

tj. korištenjem trigonometrijskih funkcija. Iako ova tvrdnja nije bila u potpunosti točna, ona ipak vrijedi za veliku i važnu klasu funkcija (te odgovor ovisi i o vrsti konvergencije), a rad na ovom pitanju potaknuo je veliki razvoj matematičke analize i drugih grana matematike. Fourierova analiza danas je izrazito važna zbog primjene u različitim područjima, a posebno obradi signala. Tvrdnje iz Fourierovog rada bile su potvrđene i eksperimentalno, no s obzirom da je rad nastao u vrijeme kada mnogi pojmovi matematičke analize vezani uz konvergenciju reda nisu bili precizno definirani ni proučavani, naišao je na kritike vodećih matematičara toga vremena, kao što su Lagrange⁷ i Laplace, te je trebalo još 15 godina da bude u potpunosti prihvaćen; rad pod nazivom "Théorie Analytique de la Chaleur" objavljen je 1822. godine.

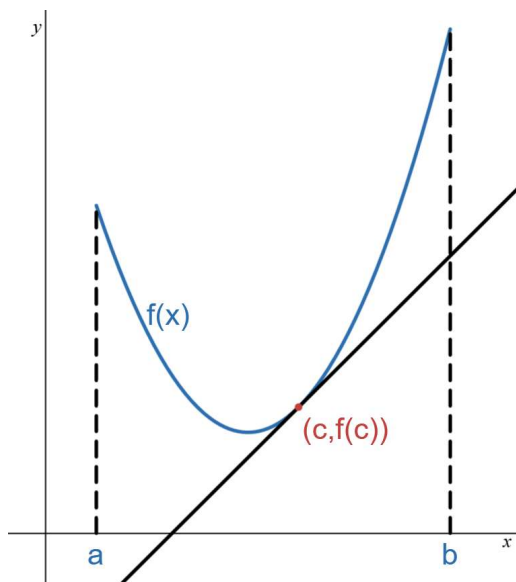
U ovom članku razmatramo aspekt Fourierovog rada vezan uz problem provođenja topline te jednadžbu koja ga opisuje, međutim, nećemo se usredotočiti na njeno rješavanje već je cilj naglasiti njenu univerzalnost. Preciznije, pokazat ćemo da ova jednadžba ne opisuje samo prijenos topline već i procese i probleme iz drugih područja, kao što su kemija i financijska matematika. Ta je jednadžba poseban slučaj jednadžbe difuzije koja opisuje temeljno svojstvo ovog prirodnog fenomena, od fundamentalne je važnosti čak i u kvantnoj fizici te je igrala ulogu pri dokazu postojanja atoma (Perrin⁸, 1908.). članak je nastao na temelju završnog rada [8].

2 Što je parcijalna diferencijalna jednadžba?

Središnji pojam ovog rada je parcijalna diferencijalna jednadžba koja opisuje prijenos topline. U ovoj cjelini navodimo osnovne pojmove i oznake, a kako bismo razumijevanje omogućili i čitateljima koji nisu upoznati s tim pojmovima, prisjetit ćemo se pojma derivacije te parcijalne derivacije. Derivacija funkcije $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ u točki c otvorenog intervala $I = \langle a, b \rangle$ definira se kao

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c},$$

ako taj limes postoji te se označava sa $f'(c)$, odnosno $\frac{df}{dx}(c)$. U tom slučaju kažemo da je f derivabilna (ili diferencijabilna) u točki c .



Slika 2: Geometrijski, derivacija funkcije f u točki c predstavlja koeficijent smjera tangente na graf funkcije u točki $(c, f(c))$. Taj pravac dan je jednažbom $y = f'(c)(x - c) + f(c)$.

Nadalje, ako je f derivabilna u svakoj točki intervala I , kažemo da je derivabilna na intervalu I . Derivaciju drugog reda f'' (ako postoji), definiramo kao derivaciju funkcije $x \mapsto f'(x)$. Analogno se definiraju derivacije višeg reda, te derivaciju m -tog reda označavamo s $f^{(m)}$.

Za funkcije više varijabli razlikujemo pojmove *diferencijabilnosti* i *parcijalne derivacije*; ako je funkcija diferencijabilna, onda postoje parcijalne derivacije, ali obrat općenito ne vrijedi. Za $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), neka je

$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Otvorena kugla u \mathbb{R}^n sa središtem u $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i radijusom r ($r > 0$) je skup

$$K(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}.$$

Uočimo da $K(x_0, r)$ predstavlja skup svih točaka iz \mathbb{R}^n koje su od točke x_0 udaljene za manje od r te da je otvorena kugla u \mathbb{R} zapravo otvoreni interval $\langle x_0 - r, x_0 + r \rangle$. Za skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je *otvoren* ako za svaki $x \in \Omega$ postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq \Omega$. Pojmove diferencijabilnosti i parcijalne derivacije u nastavku navodimo samo za $n = 2$ (definicija je analogna za $n > 2$). Kažemo da je funkcija $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, gdje je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup, *diferencijabilna* u točki $(x_0, y_0) \in \Omega$ ako postoje $A, B \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - A(x-x_0) - B(y-y_0)}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} = 0$$

te ako je diferencijabilna u svakoj točki iz Ω , kažemo da je diferencijabilna na Ω . Kažemo da funkcija $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ u točki $(x_0, y_0) \in \Omega$ ima *parcijalnu derivaciju* po varijabli x ako postoji limes

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

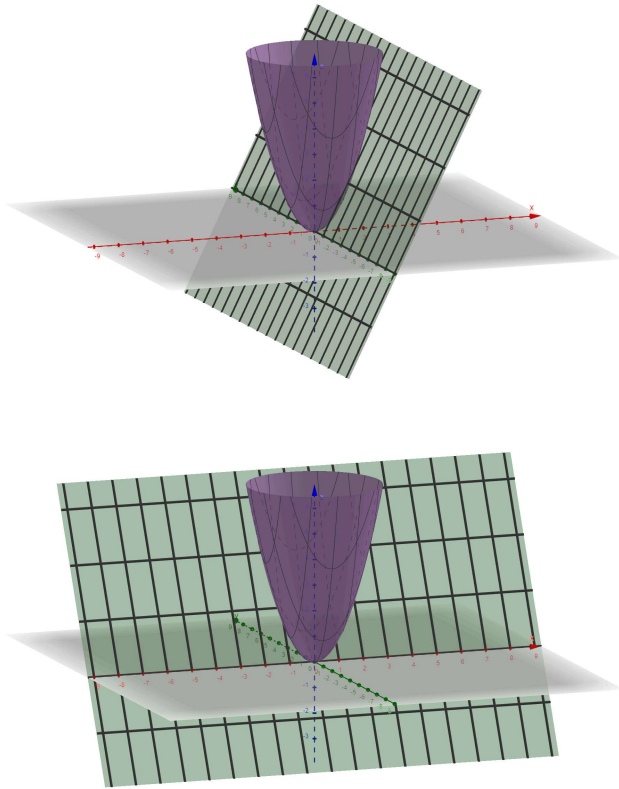
Analogno definiramo parcijalnu derivaciju po varijabli y te koristimo oznake $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\partial_x f$ ili f_x , odnosno $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\partial_y f$ ili f_y . Parcijalnu derivaciju po varijabli x možemo interpretirati kao derivaciju funkcije $x \mapsto f(x, y)$ za fiksni y , a po varijabli y kao derivaciju funkcije $y \mapsto f(x, y)$ za fiksni x i u skladu s time možemo definirati parcijalne derivacije višeg reda. Parcijalne derivacije drugog reda označavat ćemo sa $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, odnosno f_{xx} , f_{xy} , f_{yx} i f_{yy} . Tako, na primjer, za funkciju $f(x, y) = x \sin y + x^3 \cos y$ dobivamo

$$\partial_x f(x, y) = \sin y + 3x^2 \cos y, \quad \partial_y f(x, y) = x \cos y - x^3 \sin y,$$

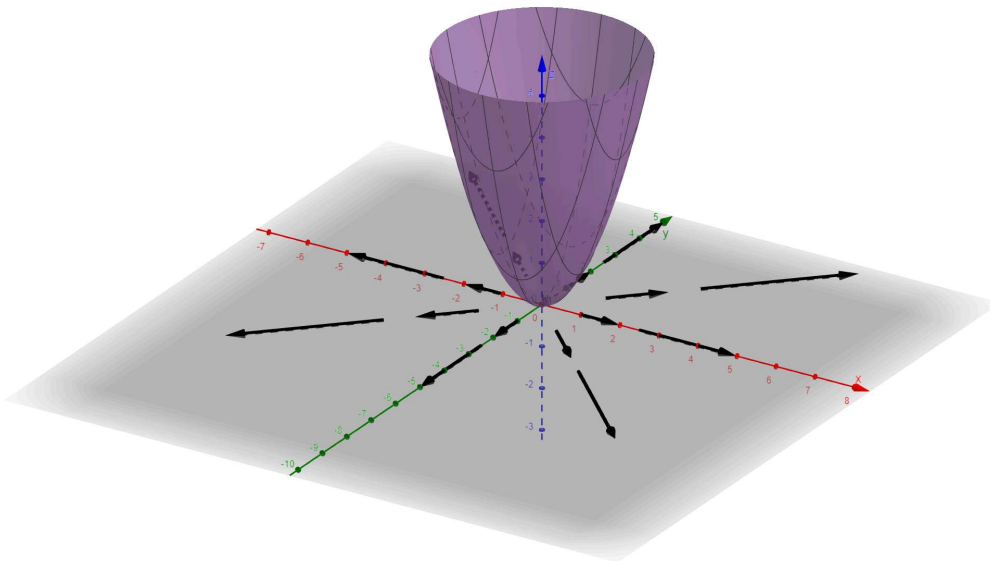
a parcijalne derivacije drugog reda glase:

$$f_{xx}(x, y) = 6x \cos y, \quad f_{xy}(x, y) = \cos y - 3x^2 \sin y = f_{yx}(x, y), \quad f_{yy}(x, y) = -x \sin y - x^3 \cos y.$$

Za funkciju $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, gdje je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ i $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \Omega$, vektor parcijalnih derivacija $(\partial_{x_1} f(x^0), \partial_{x_2} f(x^0), \dots, \partial_{x_n} f(x^0))$ naziva se *gradijent funkcije* f u točki x_0 i označava s $\nabla f(x^0)$.



Slika 3: Graf funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2$ te ravnine $z = 2x$ i $z = 2y$ koje predstavljaju grafove funkcija $\partial_x f$ i $\partial_y f$.



Slika 4: Vektori $\nabla f(x, y)$, za $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Kako bismo opisali pojam parcijalne diferencijalne jednačbe, opišimo ukratko osnovnu ideju diferencijalnih jednačbi. Jednačba

$$\frac{df}{dx} = 6x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

primjer je obične diferencijalne jednačbe, u kojoj tražimo sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ za koje je (3) ispunjeno. Lako se vidi da svaka funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + C$, gdje je $C \in \mathbb{R}$, zadovoljava jednačbu (3) te da su funkcije zadane ovom familijom jedina rješenja. Uvrstimo li određeni realni broj umjesto općeg parametra C , dobivamo jedno *partikularno rješenje*.

Obična diferencijalna jednačba m -tog reda je jednačba oblika

$$F(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(m)}(x)) = 0, \quad (4)$$

pri čemu je f funkcija jedne varijable x . Ako se umjesto funkcije jedne javlja funkcija više varijabli te njene parcijalne derivacije, onda govorimo o *parcijalnoj diferencijalnoj jednadžbi*.

3 Prijenos topline provođenjem

U ovoj cjelini opisat ćemo izvod jednodimenzionalne jednadžbe provođenja topline kroz štap. Prijenos topline nastaje kao posljedica temperaturne razlike dvaju tijela; što je veća razlika, brži je prijenos. Uvodimo sljedeće oznake:

- m, V, ρ – masa, volumen i gustoća, respektivno
- c – specifični toplinski kapacitet
- K – koeficijent toplinske vodljivosti
- Q – količina topline
- u – temperatura

Prijenos energije vrši se iz područja više temperature u područje niže temperature u skladu sa sljedećim zakonima:

- (1) promjena vrijednosti topline u tijelu rezultira promjenom njegove temperature;
- (2) Fourierov zakon provođenja topline, koji u integralnom obliku možemo zapisati kao (prisjetimo se također i (1)):

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -K \oint_S \nabla u \cdot dS, \quad (5)$$

gdje t predstavlja vrijeme, a S površinu kroz koju toplina protječe;

- (3) zakon očuvanja energije.

Specifični toplinski kapacitet c predstavlja količinu energije koja je potrebna da se temperatura dijela tijela jedinične mase uveća za jednu jedinicu. U tablici 1 prikazane su vrijednosti od c za neke materijale te vrijednosti koeficijenta toplinske vodljivosti K , spomenuto u uvodu.

Materijal	c ($J/kg \cdot K$)	K ($W/(m \cdot K)$)
srebro	236	429
bakar	387	401
željezo	452	72-80.4
aluminij	900	237
voda	4186	0.6

Tablica 1: Vrijednosti specifičnog toplinskog kapaciteta i koeficijenta toplinske vodljivosti.

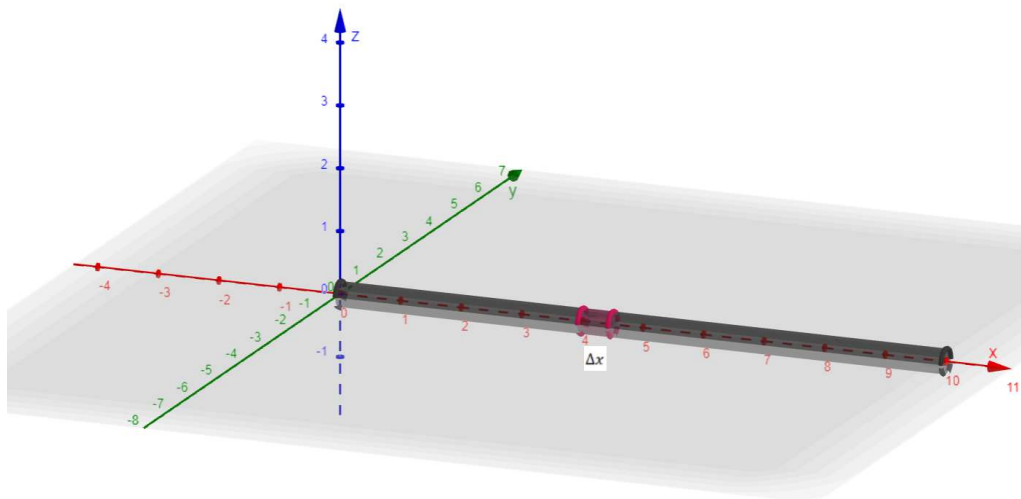
Pretpostavimo da je promatrani štap neke duljine L te da su veličine ρ, c i K konstante, kao i površina poprečnog presjeka A . Pretpostavimo da su stranice tijela izolirane i samo rubovi mogu biti neizolirani te pretpostavimo da nema unutarnjeg izvora topline. Promatrani štap poistovjetit ćemo sa segmentom $[0, L]$, a temperatura tijela opisana je funkcijom

$$(x, t) \mapsto u(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0,$$

pri čemu varijabla x predstavlja poziciju, a t vrijeme. Iz Fourierovog zakona provođenja topline ((1), odnosno (5)) slijedi:

$$\frac{\text{brzina prijenosa topline}}{A} = -K \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (6)$$

Negativni predznak indicira da se toplina širi iz dijelova tijela s višom temperaturom u dijelove tijela s nižom temperaturom.



Slika 5: Homogeni štap duljine L poistovjetit ćemo sa segmentom $[0, L]$.

Izvedimo sada jednadžbu provođenja topline. Promotrimo podsegment $[x, x + \Delta x]$ duljine Δx i pretpostavimo da je taj podsegment dovoljno male duljine da je njegova temperatura upravo $u(x, t)$. Količina topline podsegmenta $[x, x + \Delta x]$ proporcionalna je njegovoj masi ($m = V \cdot \rho$) i temperaturi, a ovisi i o materijalu (odnosno njegovom specifičnom toplinskom kapacitetu) te vrijedi:

$$Q_{[x, x + \Delta x]} = c \cdot \rho \cdot A \cdot \Delta x \cdot u(x, t).$$

Prema zakonu očuvanja energije, jedino se preko krajnjih točaka može vršiti prijenos topline (jer su stranice izolirane) pa vrijedi da je promjena toplinske energije u $[x, x + \Delta x]$ u vremenu Δt jednaka razlici toplinske energije koja je pridodana podsegmentu kroz lijevi rub i toplinske energije koja je oduzeta podsegmentu kroz desni rub te iz (6) slijedi:

$$\begin{aligned} c\rho A \cdot \Delta x \cdot u(x, t + \Delta t) - c\rho A \cdot \Delta x \cdot u(x, t) &= \\ = \Delta t \cdot A \left(-K \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) - \Delta t \cdot A \left(-K \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) \right). \end{aligned}$$

Podijelimo li gornji izraz sa $c\rho A \cdot \Delta x \cdot \Delta t$, dobivamo:

$$\frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} = \frac{K}{c\rho} \left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)}{\Delta x} \right).$$

Pustimo li sada da $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, po definiciji parcijalne derivacije funkcije slijedi da je jednadžba provođenja topline dana s:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (7)$$

gdje je $\kappa = K/(c \cdot \rho)$. Konstanta κ je nenegativan broj i predstavlja *toplinsku difuzivnost tijela* (ova konstanta također ovisi o materijalu tijela te bolji vodiči imaju veći koeficijent) pa ga možemo označiti sa $\alpha^2 = \kappa$.

Kako bismo pri rješavanju jednadžbe (7) dobili jedinstveno rješenje, potrebno je zadati:

1. *Početni uvjet*, kojeg ćemo opisati funkcijom $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$. Funkcija f predstavlja početnu distribuciju temperature (tj. u trenutku $t = 0$).
2. *Rubne uvjete*, koji opisuju ponašanje temperature na rubovima danog tijela jer su rubovi neizolirani pa se na njima može događati gubitak toplinske energije.

Jedan dobro zadani problem provođenja topline glasi:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad (8)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L, \quad (9)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0, \quad (10)$$

gdje je (8) jednadžba provođenja topline (7) primijenjena na segment $[0, L]$, (9) početna distribucija temperature 1-D tijela te su (10) rubni uvjeti. Fizikalno bismo

interpretirali rubne uvjete (10) kao održavanje tih rubova na 0 stupnjeva. Fourier je dao rješenje ovog problema koje glasi:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x/L) e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2}, \quad (11)$$

gdje su koeficijenti B_n dani sa:

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (12)$$

Postupak rješavanja problema zadanog s (8), (9) i (10) nipošto nije trivijalan, a kamoli početkom 19. stoljeća. Osim Fouriera, ideja prikaza funkcije pomoću trigonometrijskih bila je razmatrana i ranije. Jedan od matematičara koji je razmatrao takvo pitanje bio je Daniel Bernoulli⁹ koji je proučavao, na prvi pogled nepovezani, problem titranja žice (više o tom pitanju moguće je pročitati u [10]).

Prethodni primjer najjednostavniji je primjer problema ovog tipa, s obzirom da se prijenos topline vrši samo u jednom smjeru. Ako pri prijenosu ulogu imaju sve tri prostorne komponente, x , y i z , tada je temperatura funkcija jedne vremenske varijable t i prostorne varijable (x, y, z) . Parcijalna diferencijalna jednadžba koja modelira provođenje topline glasi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \nabla^2 u, \quad (13)$$

gdje je $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ Laplaceov operator (osim ∇^2 , koristi se i oznaka Δ).

4 Brownovo gibanje

Godine 1827. škotski botaničar Robert Brown¹⁰ promatrajući mikroskopom čestice peluda suspendirane u vodi primijetio je da se one gibaju nasumično i vrlo nepravilno kreću u svim smjerovima. U to vrijeme je mislio da je pelud živi organizam pa bi to donekle objasnilo njegovo kretanje. Nakon Browna mnogi drugi znanstvenici replicirali su eksperiment te potvrdili Brownova zapažanja, i to ne samo s peludom u vodi već s bilo kojim dovoljno sitnim česticama suspendiranim u fluidu. Ovaj fenomen je nazvan *Brownovim gibanjem*¹¹. Eksperimentalno je potvrđeno da su sitnije čestice u istom fluidu aktivnije od krupnijih te da su iste čestice manje aktivne u viskoznijem fluidu. Također, veća aktivnost čestica je postignuta dodavanjem topline u sustav.

Iako je eksperiment mnogo puta ponovljen i zapažanja su prihvaćena te su pronađena neka njegova svojstva, još uvijek nije bilo jasno odakle proizlazi to nasumično kretanje te postoji li fizikalni zakon pa time i matematički model koji ga opisuje. Godine 1905. Albert Einstein¹² prvi opisuje, koristeći vjerojatnosni model, Brownovo gibanje. Einsteinovo objašnjenje je da ono proizlazi iz neprestanog sudaranja čestica fluida sa sitnim česticama koje su u njemu suspendirane. Do nasumičnog kretanja dolazi zbog neprestanog zadavanja udaraca suspendiranim česticama od strane molekula fluida sa svih strana te zbog tog neprestanog sudaranja suspendirane čestice imaju istu prosječnu kinetičku energiju kao i molekule fluida. Ova zapažanja bila su od nezanemarive važnosti pri dokazivanju postojanja atoma i određivanja njihove veličine, pošto u to vrijeme ideja da je sva materija sačinjena od atoma nije bila univerzalno prihvaćena.

Kako bismo uočili poveznicu između Brownovog gibanja i jednadžbe provođenja topline, opišimo Einsteinov argument iz 1905. godine. Pretpostavimo da promatramo K čestica suspendiranih u fluidu te da se u (proizvoljno kratkom) vremenskom intervalu T x -koordinata proizvoljne čestice uveća za ε ; naglašavamo da ovdje ε može biti i pozitivan i negativan realan broj, koji može biti različit za različite čestice (slika 6). U vremenskom intervalu T se broj čestica dK koje se pomaknu za neku udaljenost od ε do $\varepsilon + d\varepsilon$ može izraziti kao:

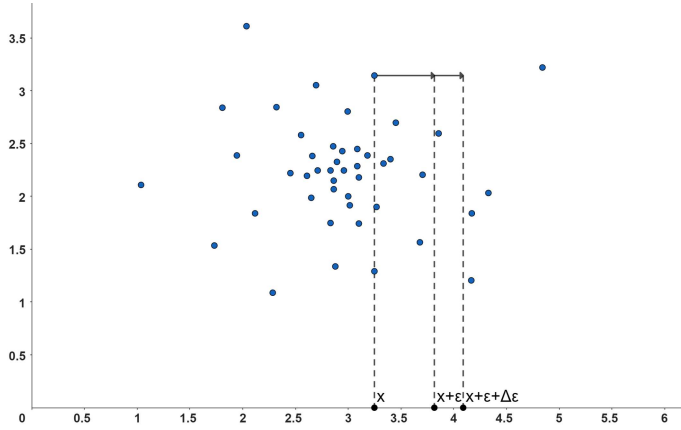
$$dK = K\varphi(\varepsilon)d\varepsilon, \quad (14)$$

gdje je φ funkcija koja je različita od 0 samo za male vrijednosti od ε i koja ima sljedeća svojstva:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon)d\varepsilon = 1, \quad (15)$$

$$\varphi(-\varepsilon) = \varphi(\varepsilon). \quad (16)$$

Uvjet (15) u kombinaciji s nenegativnošću od φ zapravo znači da je φ gustoća neke neprekidne slučajne varijable, a uvjet (16) da je φ parna funkcija.



Slika 6: Pomak za ε čestice na poziciji čija je prva koordinata jednaka x . Uočimo da iz pretpostavke (16) odmah slijedi da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = 0;$$

prisjetimo se, naime, da je podintegralna funkcija neparna, a integral neparne funkcije nad simetričnim segmentom jednak je 0. Neka sada funkcija $(x, t) \mapsto f(x, t)$ pridružuje poziciji x i trenutku t broj čestica po jedinici volumena fluida na poziciji x u trenutku t tako da ukupan broj čestica uvijek bude očuvan, tj. da vrijedi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx = K.$$

Definirajmo α^2 kao:

$$\alpha^2 := \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Sljedeći cilj je opisati distribuciju čestica nakon vremenskog intervala T . Uočimo da iz definicije funkcije φ slijedi

$$f(x, t + T) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + \varepsilon, t) \varphi(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (17)$$

Za mali T i ε , koristeći razvoj u Taylorov red, $f(x, t + T)$ možemo aproksimirati s

$$f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial t} T,$$

a $f(x + \varepsilon, t)$ s

$$f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial x} \varepsilon + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \varepsilon^2.$$

Uvrštavanjem u (17) sada dobijemo

$$\begin{aligned} f(x, t + T) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial x} \varepsilon + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \varepsilon^2 \right) \varphi(\varepsilon) d\varepsilon \\ &= f(x, t) + \alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} T. \end{aligned}$$

Iz toga dobijemo jednadžbu:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \quad (18)$$

uočimo da je to zapravo jednadžba provođenja topline. Rješenje ovog problema za K promatranih čestica dano je sa:

$$f(x, t) = \frac{K}{\alpha\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4\alpha^2 t}. \quad (19)$$

Uočimo da je za fiksni t , $x \mapsto f(x, t)$ funkcija gustoće $N(0, 2\alpha^2 t)$ -razdiobe pomnožena s K (slika 7). U nastavku ćemo na drugi način interpretirati zašto se ovdje pojavila ta razdioba.

Opišimo još ukratko poveznicu rješenja (19) i (11). Iako se radi o parcijalnoj diferencijalnoj jednačini istog tipa, drukčiji početni i rubni uvjeti imaju utjecaj na rješenja. Prisjetimo se da je s (11) opisano rješenje jednačine provođenja topline kroz štap duljine L te uz odgovarajuće početne i rubne uvjete, (9) i (10). Nadalje, B_n u (12) su zapravo Fourierovi koeficijenti proširenja funkcije iz (9) do neparne funkcije na $[-L, L]$ (pritom se pretpostavlja da funkcija zadovoljava dodatna svojstva vezana uz konvergenciju pripadnog Fourierovog reda). U problemu iz ove cjeline f je funkcija varijable x i t , pri čemu je $-\infty < x < \infty$ (za razliku od problema iz treće cjeline, gdje je $0 \leq x \leq L$) te problem odgovara problemu provođenja topline kroz štap beskonačne duljine, kojeg možemo identificirati s realnim pravcem. Taj problem modeliran je ponovno parcijalnom diferencijalnom jednačinom $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, uz početni uvjet $u(x, 0) = g(x)$, $-\infty < x < +\infty$.

Rješenje ovog problema (korištenjem svojstava Fourierove transformacije; detalje je moguće pogledati npr. u [12], 5.) dano je s

$$u(x, t) = (g * H_t)(x), \quad (20)$$

gdje je $H_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4\alpha^2 t^2}$, a $*$ predstavlja operaciju konvolucije¹³, tj.

$$u(x, t) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha^2 t}} d\xi. \quad (21)$$

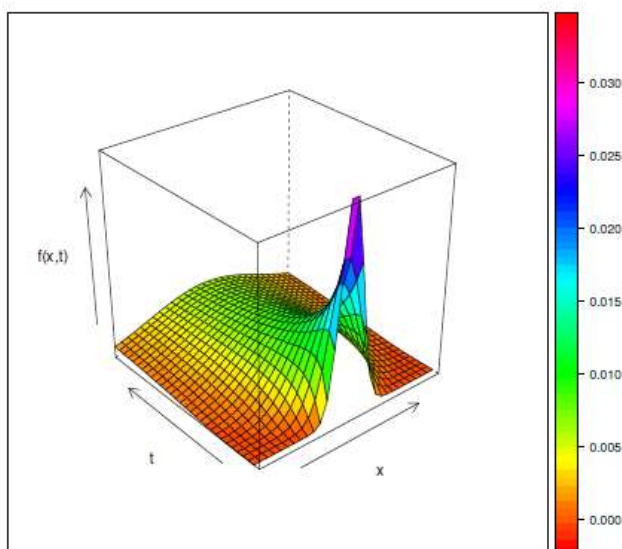
Za Brownovo gibanje, početni uvjeti

$$f(x, 0) = 0, \text{ za } x \neq 0 \quad \text{i} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x, 0) dx = K$$

opisuju koncentraciju čestica u trenutku $t = 0$, što nadalje možemo opisati pomoću distribucije δ koja se naziva i Diracova delta "funkcija" te za koju vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi) h(\xi) d\xi = h(0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi) d\xi = 1. \quad (22)$$

Sada iz (22) slijedi da je $f(x, t) = \frac{K}{2\alpha\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}}$.



Slika 7: Graf funkcije gustoće $N(0, 2\alpha^2 t)$ razdiobe za $\alpha = 2$.

5 Od slučajne šetnje do jednadžbe difuzije

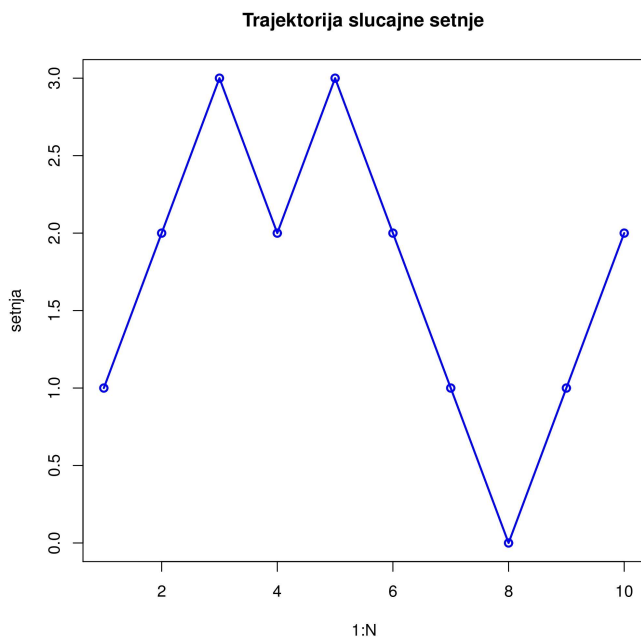
Pretpostavimo da je neka čestica podložna nezavisnim udarima u jednakim vremenskim intervalima, tj. u trenucima $\tau, 2\tau, 3\tau$ itd., tako da se uslijed svakog udara može pomaknuti udesno (pozitivni smjer) za udaljenost $h > 0$ s vjerojatnošću p ili ulijevo (negativni smjer) za udaljenost h s vjerojatnošću $q = 1 - p$. Ovakvo gibanje možemo intepretirati kao gibanje na pravcu i pomak u vremenskom trenutku $n\tau$ (za neki $n \in \mathbb{N}$) predstaviti kao realizaciju slučajne varijable koja ima distribuciju kao X , gdje je

$$X \sim \begin{pmatrix} -h & h \\ q & p \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Za niz nezavisnih slučajnih varijabli (X_n) s prethodno opisanom distribucijom, slučajni proces (S_n) gdje je slučajna varijabla S_n definirana s

$$S_n := \sum_{k=1}^n X_k$$

naziva se *jednostavna slučajna šetnja* (simetrična ako je $p = q$). Jednu realizaciju takvog procesa možemo vidjeti na slici 8 (na x -osi se nalaze vremenski trenuci $k\tau$, $k = 1 \dots, n$, a na y osi realizacija od S_n , pri čemu je $h = 1$, $\tau = 1$ i $n = 10$). Na slici 10 također su prikazane trajektorije slučajne šetnje, ali ovaj put za veći n ($n = 1000$).



Slika 8: Jedna trajektorija ($n \mapsto s_n$) simetrične slučajne šetnje, $h = 1$, $\tau = 1$.

Neka $f(x, t)$ označava vjerojatnost da je čestica, krenuvši iz točke $x = 0$ u trenutku $t = 0$, nakon N udara (tj. u trenutku $t = N\tau$) postigla poziciju x . Kako se u točki x u trenutku $t + \tau$ čestica može naći jedino ako je u prethodnom trenutku t bila u točki $x - h$ ili točki $x + h$, vrijedi:

$$f(x, t + \tau) = pf(x - h, t) + qf(x + h, t). \quad (24)$$

Uočimo da je opisani proces sličan procesu nasumičnog sudaranja čestica u Brownovom gibanju. To donekle potkrijepljuje i slika 11 koja predstavlja simulaciju slučajne šetnje u dvije dimenzije, pri čemu se čini da odabirom sve većeg n , gibanje sve više nalikuje kaotičnom gibanju koje je pod mikroskopom opazio Brown.

Fokusirajmo se sada na simetričnu šetnju u tri dimenzije. Neka je P čestica na poziciji točke $r = (x_1, x_2, x_3)$ prostora \mathbb{R}^3 . Nadalje, neka je $p = 1/6$ vjerojatnost da se čestica P u bilo kojem trenutku $k\tau \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, pomakne na poziciju jedne od svojih šest najbližih susjednih točaka: $(x_1 \pm h, x_2, x_3)$, $(x_1, x_2 \pm h, x_3)$, $(x_1, x_2, x_3 \pm h)$, gdje je sa $h > 0$ zadan pomak (ove mogućnosti prikazane su na slici 9). Označimo sa $f(r, t)$ vjerojatnost da je

čestica, krenuvši iz točke $r = (0, 0, 0)$ (u trenutku $t = 0$), nakon N pomaka (tj. u vremenu $t = N\tau$) postigla poziciju $r = (N_1h, N_2h, N_3h)$. Tada, uz interpretaciju kao u (24), vrijedi:

$$f(r, t + \tau) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 [f(r - he_i, t) + f(r + he_i, t)], \quad (25)$$

gdje su $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ i $e_3 = (0, 0, 1)$ vektori standardne baze od \mathbb{R}^3 .

Opišimo sada granično ponašanje ovakvog kretanja, odnosno što se događa kada vrijednost pomaka h i vremenski parametar τ teže prema 0. Uz odgovarajuće pretpostavke na f , razvojem u Taylorov red dobivamo:

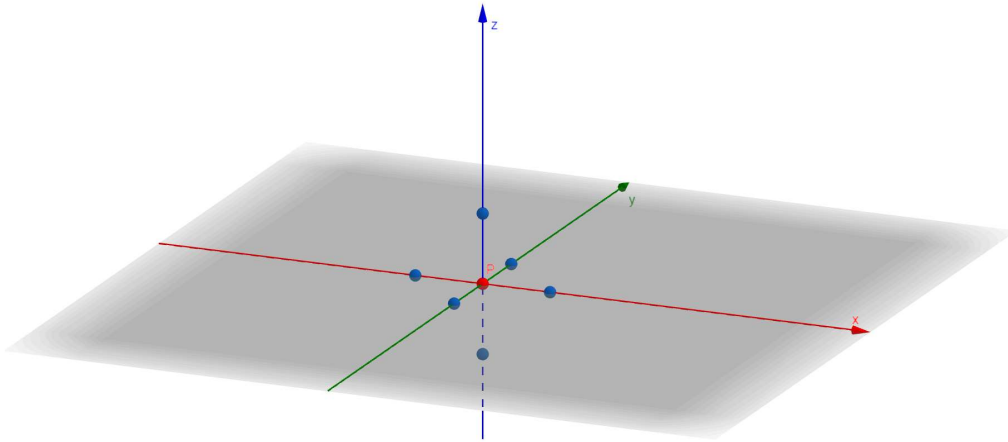
$$\begin{aligned} f(r, t + \tau) &= f(r, t) + \tau \partial_t f(r, t) + o(\tau), \\ f(r - he_i, t) &= f(r, t) - h \partial_{x_i} f(r, t) + \frac{1}{6} h^2 \partial_{x_i}^2 f(r, t) + o(h^2), \quad i = 1, 2, 3, \\ f(r + he_i, t) &= f(r, t) + h \partial_{x_i} f(r, t) + \frac{1}{6} h^2 \partial_{x_i}^2 f(r, t) + o(h^2), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem dobivenih izraza u (25) i prethodno oduzimanjem $f(x, t)$ od svake strane jednadžbe dobivamo:

$$\tau \frac{\partial f}{\partial t} + o(\tau) = \frac{1}{6} h^2 \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i}^2 f(r, t) + 6o(h^2). \quad (26)$$

Označimo $\Delta f := \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i}^2 f(r, t)$ (prisjetimo se, Δ je Laplaceov operator, definiran prethodno kod (13)). Ako sada pustimo da $N \rightarrow \infty$, i to uz uvjet da $N\tau = O(1)$ i $h^2/\tau \rightarrow 6D$, dobivamo jednažbu

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D\Delta f. \quad (27)$$



Slika 9: Gibanje čestice u prostoru u jednom od šest smjerova.

Napomena 1. Jednažba (27) je poseban slučaj *difuzijske jednažbe*, koja se pojavila i kod Einsteinovog opisa Brownovog gibanja; prisjetimo se također jednažbe (13). Iako su obje jednažbe istog tipa, konstanta D u ovom se kontekstu naziva se i *koeficijent difuzije* (u općoj verziji D ne mora biti konstanta). Einsteinov argument je, osim matematičkog dijela koji opisuje koliko daleko čestica putuje u određenom vremenskom intervalu uključivao i fizikalni dio koji D povezuje s drugim fizikalnim veličinama.

Pod pojmom *molekularne difuzije* podrazumijeva se proces kojim se molekule neke tvari gibaju unutar čvrstih tijela, tekućina i plinova. Ovaj fenomen bio je, na temelju opažanja, poznat kemičarima i biologima od 18. stoljeća, a objavom Fourierovog rada o prijenosu topline postalo je moguće rezultate eksperimenata interpretirati korištenjem sličnih ideja. Jednažba difuzije u svom matematičkom obliku spomenuta je 1855. godine, više od trideset godina nakon Fourierova objavljivanja jednažbe provođenja topline. Te je godine Adolf Fick¹⁴ objavio članak "Ueber Diffusion" (hrv. "O difuziji") u kojem, na temelju eksperimentalnih rezultata, predlaže fizikalne zakone koji opisuju difuziju čestica u nekom sredstvu (ne samo fluidu, već i krutoj tvari, ali se tada to nije smatralo mogućim). Danas su ta dva zakona prihvaćena i nazvana po njemu: *Fickov prvi i drugi zakon*. Fickov prvi zakon, kojeg nećemo pomnije razmatrati, kaže da je kretanje čestica iz visoke u nisku koncentraciju (sredstva u kojem se gibaju) proporcionalno koncentracijskom gradijentu čestica. Fickov drugi zakon daje predviđanje promjene (kroz vrijeme) koncentracijskog gradijenta čestica zbog difuzije. U jednodimenzionalnom slučaju ti zakoni glase:

$$\text{Fickov prvi zakon: } N = -D \frac{d\varphi}{dx}, \quad \text{Fickov drugi zakon: } \frac{\partial \varphi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$

pri čemu N predstavlja tok čestica, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ gradijent koncentracije, D koeficijent koncentracije (ovisan o vrsti čestica i sredstvu u kojem se one gibaju te je nenegativan). Uočimo da je drugi Fickov zakon ekvivalentan jednažbi provođenja topline. Fick se ovakvim matematičkim i fizikalnim promatranjima bavio vrlo rano u svom životu, prije no što se odlučio posvetiti medicini. Difuzijski proces koji poštuje Fickove zakone naziva se normalnom difuzijom ili Fickovim procesom, dok se u suprotnom naziva anomalnom difuzijom.

6 Vrednovanje opcija i Black-Scholesov model

Vratimo se ponovno na simetričnu slučajnu šetnju ($S_n : n \in \mathbb{N}$) određenu kretanjem čestice na pravcu u smjeru lijevo ili desno za vrijednost h kako bismo razmatranja iz prethodnog poglavlja, vezana uz granično ponašanje kada τ i h teže prema 0 interpretirali pomoću drugog vjerojatnosnog rezultata. Prisjetimo se, distribucija slučajne varijable X_n dana je s (23) te vrijedi $\mathbb{E}X_n = 0$ i $\text{Var}X_n = h^2$. Vjerojatnost $f(x, t)$ promatrana u 5. zapravo je vrijednost funkcije gustoće slučajne varijable $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ u točki x , očekivanje ove slučajne varijable iznosi 0, a varijanca nh^2 . Prema centralnom graničnom teoremu, slučajna varijabla $S_n / \sqrt{\text{Var}(S_n)}$ uz dovoljno velik n imat će približno jediničnu normalnu razdiobu.

Ako $n \rightarrow \infty$, $\tau \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$, uz zahtjev da $n\tau = t$ teži konstanti i $\frac{h^2}{\tau} \rightarrow D$, distribuciju od $X_\tau(t) = S_{t/\tau} = \sum_{k=1}^{t/\tau} X_k$ moći ćemo aproksimirati normalnom distribucijom $N(0, Dt)$, čija je gustoća dana s

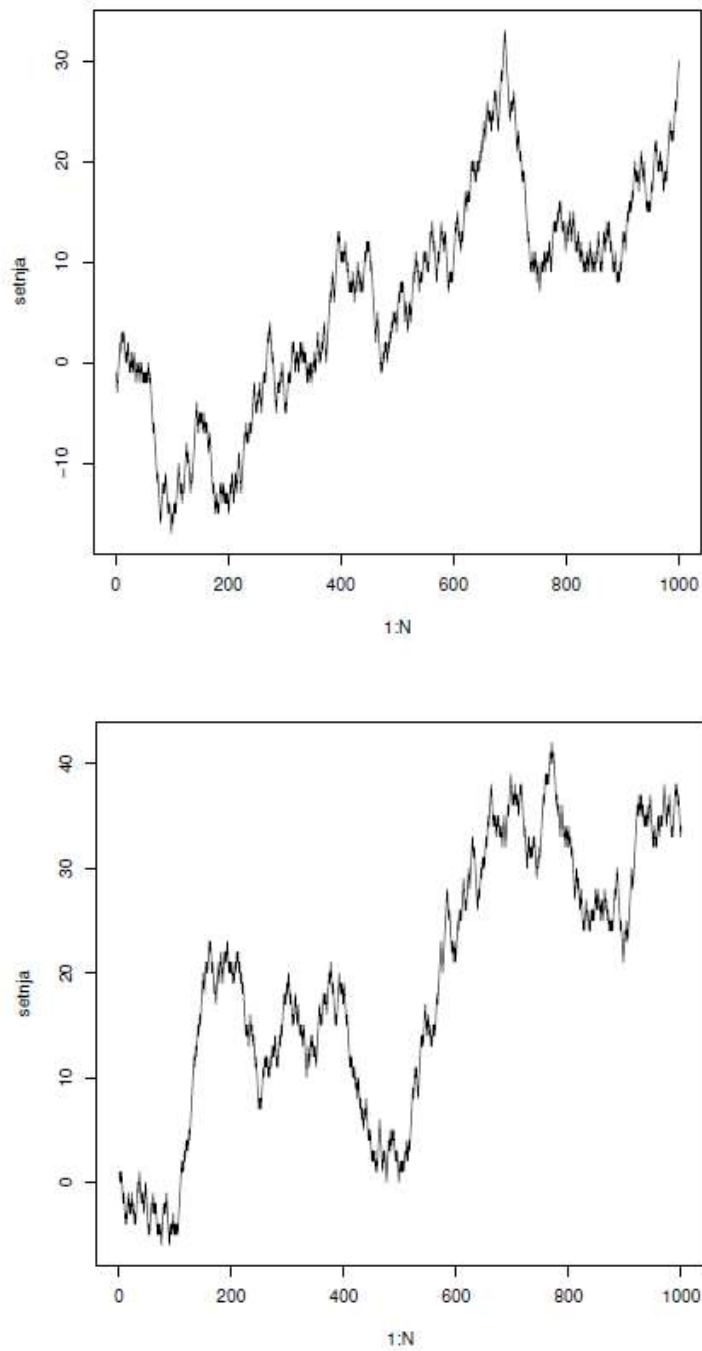
$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} e^{-x^2/2Dt}. \quad (28)$$

Prisjetimo se da je ovo upravo funkcija koja se javlja kod rješenja jednažbe koja opisuje Brownovo gibanje na temelju Einsteinovog argumenta. Ovime smo (naravno, samo neformalno) predstavili dio argumenta da je granični proces koji se javlja kod slučajne šetnje slučajni proces koji se naziva *Brownovo gibanje*. Ovakav slučajni proces prvi je konstruirao Norbert Wiener¹⁵, a *standardni Wienerov proces* ili *standardno Brownovo gibanje* je (neprekidni) slučajni proces ($W_t : t \geq 0$) sa sljedećim svojstvima:

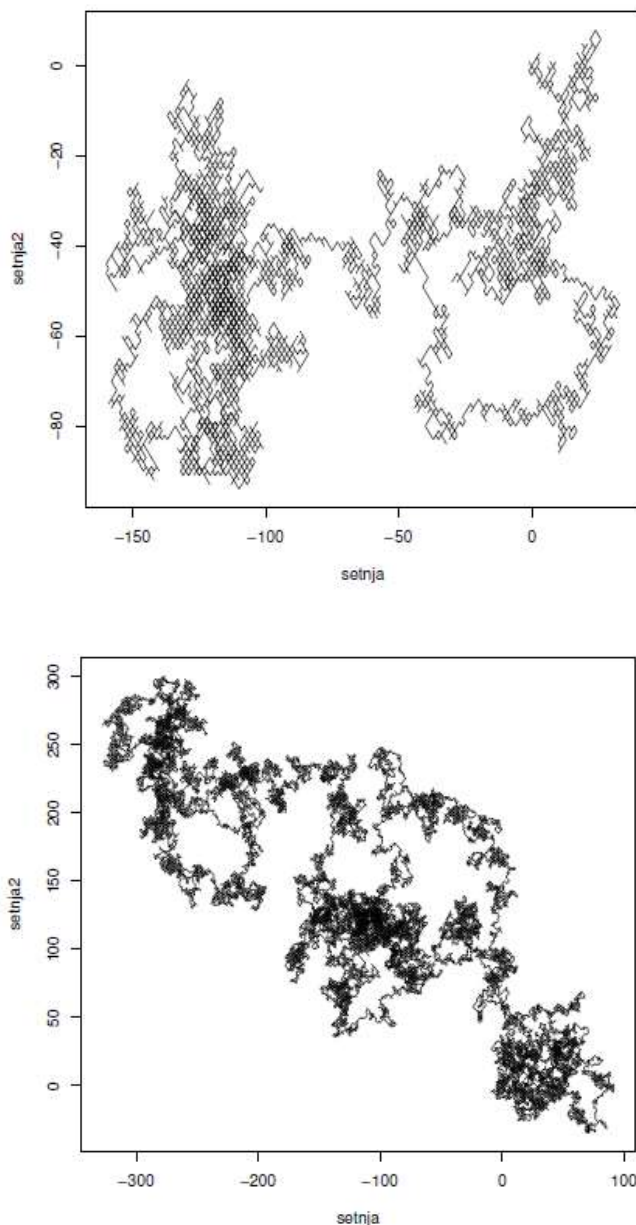
- (i) $W_0 = 0$ i funkcija $t \rightarrow W(t)$ je neprekidna, g.s.;
- (ii) za bilo koje $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ prirasti $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$ su nezavisni;
- (iii) za bilo koje $t, s \geq 0$ $W_{t+s} - W_s$ ima normalnu razdiobu s parametrima 0 i t .

Uočimo također da smo u gornjem primjeru mogli primijeniti de Moivre-Laplaceov teorem, no primjena općenitije verzije centralnog-graničnog teorema (na primjer, Lévyjevog) omogućila bi isti zaključak i ako izbacimo (možda ne toliko realističnu) pretpostavku da se čestica kreće u određenim smjerovima te s istim vjerojatnostima.

Vratimo se sada na ponovno na trajektorije simetrične slučajne šetnje s pomakom 1 prikazane na slici 10. Možemo uočiti da slika donekle podsjeća na nekakva financijska kretanja (npr. kretanje cijena dionica). Ako zamislimo najjednostavniji model, u kojemu bi u svakom trenutku ta cijena mogla porasti za 1 ili pasti za -1, onda takav model djeluje razumno. No, može li stohastički proces zaista opisati financijska kretanja?



Slika 10: Simulacije simetrične slučajne šetnje ($n = 1000$).



Slika 11: Simulacije simetrične slučajne šetnje u dvije dimenzije ($n = 10000$, $n = 50000$).

Louis Bachelier¹⁶ smatra se utemeljiteljem primjene stohastičkih procesa u ekonomiji. U svojoj disertaciji *“Theory of Speculation”* 1900. godine postavio je temelje onog što se danas naziva problem vrednovanja opcija (engl. *option pricing problem*). Bachelier tvrdi da bi male fluktuacije cijene dionica uočene u kratkom vremenskom intervalu trebale biti neovisne o trenutnoj vrijednosti cijene. Implicitno, također pretpostavlja da su neovisne o ponašanju procesa u prošlosti te u kombinaciji sa centralnim graničnim teoremom zaključuje da su prirasti procesa nezavisni i normalno distribuirani (prisjetimo se ovdje argumenta s početka ovog poglavlja te svojstava (i)-(iii) iz definicije standardnog Wienerovog procesa). Bachelier je u radu uveo pojam tzv. “radijacije” vjerojatnosti, analogne Fourierovom zakonu provođenja topline (*“Each price x during an element of time radiates towards its neighboring price an amount of probability proportional to the difference of their probabilities”*, [1]). U skladu s tim, za vjerojatnost p cijene x u trenutku t vrijedi $p = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x}$, gdje je \mathcal{P} vjerojatnost da cijena premaši vrijednost x , a vjerojatnost promjene cijene kroz x u vremenskom intervalu Δt modelirao je pomoću parcijalne diferencijalne jednačbe

$$\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t}; \quad (29)$$

uočimo da je ovo ponovno Fourierova jednačba provođenja topline.



Slika 12: Robert Brown, Albert Einstein, Louis Bachelier, Norbert Wiener (slike su preuzete s [\url{https://www.wikipedia.org/}](https://www.wikipedia.org/))

Iako se danas Bachelierov rad smatra radom koji je opisao problem opcija metodom ispred svojeg vremena, trebalo je pola stoljeća da taj rad bude prepoznat; u području matematičke ekonomije to se dogodilo tek primjenom Paula A. Samuelsona¹⁷ 60-tih godina prošlog stoljeća. U međuvremenu je Bachelierov rad utjecao na rad japanskog matematičara Itô-a¹⁸ u teoriji slučajnih procesa, koji je postao temelj za primjenu ekonomista Roberta C. Mertona¹⁹ u području matematičkih financija. Na temelju rada Mertona, ekonomisti Myron S. Scholes²⁰ i Fischer Black²¹ 1973. godine opisuju model za vrednovanje opcija, a godine 1997. za ovaj model Mertonu i Scholesu dodjeljena je Nobelova nagrada za ekonomiju.

Opcije spadaju u tzv. *izvedene vrijednosne* papire, jer njihova isplata ovisi o vrijednosti vezane imovine (vrijednosnog papira, npr. dionice). Kao što je sugerirano nazivom, vlasnik opcije ima mogućnost (ali ne i obvezu) da na unaprijed određeni datum ili ranije (ovisno o vrsti) iskoristi pravo na kupnju (u slučaju *call* opcije) ili prodaju (u slučaju *put* opcije) vezane imovine.

Primjer 6.1. Pretpostavimo da je investitor danas kupio europsku call opciju po cijeni od 1 EUR, čija je vezana imovina dionica tvrtke A, s dospijecom od šest mjeseci od današnjeg dana te s izvršnom cijenom od 46 EUR. S obzirom da je riječ o europskoj call opciji, investitor ima mogućnost kupnje te dionice točno šest mjeseci od danas, a njegova odluka ovisit će o cijeni dionice u tom trenutku.

- (1) Pretpostavimo da je u vrijeme dospijeca opcije cijena dionice 50 EUR. Tada bi investitor iskoristio opciju i kupio dionicu za 46 EUR. Odmah bi prodao tu dionicu za 50 EUR te ostvario povrat od 4 EUR. Ukupan profit na investiciju bi bio 3 EUR jer je opciju platio 1 EUR.
- (2) Pretpostavimo da je u vrijeme dospijeca opcije cijena dionice 40 EUR. Tada investitor ne bi iskoristio opciju (jer bi ostvario gubitak) pa je njegov gubitak na investiciju 1 EUR (cijena opcije).

S obzirom da isplata ovisi o vrijednosti temeljnog vrijednosnog papira, cijena opcije mora biti povezana s vrijednošću tog vrijednosnog papira te s njegovim očekivanim ponašanjem u budućnosti. Problem vrednovanja opcija je problem određivanja cijene opcije po kojoj će je izdavatelj ponuditi. Black-Scholesova jednažba koja opisuje tu cijenu dana je s

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (30)$$

Iako nećemo razmatrati detalje, napomenimo samo da se ponovno radi o parcijalnoj diferencijalnoj jednažbi drugog reda te da se ova jednažba može svesti na jednažbu difuzije. U jednažbi (30), V predstavlja cijenu opcije (to je funkcija dvije varijable, cijene vezane imovine $S \geq 0$ i vremena $0 \leq t \leq T$), r je nerizična kamatna stopa, a σ volatilnost. Rješenje ove jednažbe, uz odgovarajuće početne i rubne uvjete je Black-Scholesova formula za vrednovanje opcija.

7 Zaključak

Napomenimo na kraju da ovaj pregled predstavlja samo mali dio nevjerojatnog niza procesa i fenomena u čijem je sagledavanju i razumijevanju jednažba provođenja topline imala važnu ulogu. I više od primjene u modeliranju procesa difuzije možda djeluje iznenađujuć njen utjecaj i primjena u području financijske matematike. No, kao što na molekule u Brownovom gibanju utječe nasumično gibanje sitnijih čestica, tako i financijsko tržište možemo promatrati kao kaotični sustav na koji utječe sve, od ljudskih emocija do vremenskih prilika i neprilika. Iako svakoj analogiji takvog tipa treba pristupiti iznimno oprezno, razmišljajući na ovaj način, barem intuitivno, poveznica s problemom od kojeg smo krenuli i nije toliko neočekivana.

No, da bismo još više shvatili njihovu vrijednost, spomenute rezultate nužno je također staviti unutar odgovarajućeg povijesnog konteksta; prisjetimo se, u trenutku Fourierovog rada na problemu prijenosa topline, termodinamika se tek počela razvijati, a mišljenja o prirodi pojma toplina bila su podijeljena. Također, iako danas ove rezultate možemo interpretirati na različite načine, važno se prisjetiti da neki od rezultata (pa i teorija) u to vrijeme nisu bili poznati (za ilustraciju, prisjetimo se da su, primjerice, aksiomi teorije vjerojatnosti postavljeni tek u dvadesetom stoljeću, 1933. godine), a većina ideja spomenutih kroz članak razvijena je nezavisno (na primjer, Einstein nije bio upoznat sa radom Bacheliera koji je nastao nešto ranije, a koristio je drukčiji pristup nego Fick). U tablici 2 još je jednom sažeto prikazana kronologija spomenutih otkrića, onih koja su prethodila radu Fouriera te ona na koje je taj rad utjecao, ali i nekih matematički rezultata koje danas koristimo za njihovu interpretaciju.

1724.	Fahrenheit	živin termometar i temperaturna ljestvica
1738.	de Moivre, Laplace	de Moivre Laplaceov teorem
1752.	D. Bernoulli	ideja primjene trigonometrijskih redova (valna jednažba)
1760.	Black	otkriće latentne topline i specifičnog toplinskog kapaciteta
1783.	Lavoisier i Lapace	prvi kalorimetar, mjerenje toplinskog kapaciteta
1807.	Fourier	"Sur la propagation de la chaleur"
1824.	Fourier	"Theorie analytique de chauler"
1824.	Carnot	drugi zakon termodinamike
1827.	Brown	promatrao mikroskopom gibanje čestica peludi u vodi
1829.	Dirichlet	teorem o točkovnoj konvergenciji Fourierovog reda
1852.	Fick	"Ueber Diffusion"
1903.	Bachelier	"Theory of speculation"
1905.	Einstein	matematički opis Brownovog gibanja
1908.	Perrin	određivanje Avogadrovog broja/dokaz atomske građe tvari
1905.	Pearson	definicija slučajne šetnje
1920.	Wiener	dokaz egzistencije slučajnog procesa <i>Brownovo gibanje</i>
1926.	Perrin	Nobelova nagrada za fiziku
1933.	Kolmogorov	aksiomi teorije vjerojatnosti
1965.	Samuelson	"Rational Theory of Warrant Pricing"
1973.	Merton	primjena stohastičkog računa u teoriji financija
1973.	Black, Scholes	"The Pricing of Options and Corporate Liabilitis"
1997.	Merton, Scholes	Nobelova nagrada za ekonomiju

Tablica 2: Kronološki prikaz otkrića, izuma i rezultata spomenutih u članku.

Bibliografija

- [1] Bachelier, L.: *Thorie de la speculation*, Annales de L'Ecole Norrnale Superieure, 3, Paris, Gaithier-Villars, 1900. English translation in the Random Character of Stock Market Prices, Editor P.H. Cootner, 17-78, M.I.T Press, 1964
- [2] Canon, J. R.: *The One-Dimensional Heat Equation*, Cambridge University Press, 1984.
- [3] Cvitanić, J. , Zapatero, F.: *Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets*, MIT Press, Cambridge, MA., 2004.
- [4] Davis, M.: *Louis Bachelier's Theory of Speculation*, 2008., [\url{https://api.semanticscholar.org/CorpusID:197861170}](https://api.semanticscholar.org/CorpusID:197861170)
- [5] Einstein, A., Fürth, R.: *Investigations on the theory of the Brownian movement by Albert Einstein, Edited with notes by R. Fürth, English translation by A.D. Cowper*, Dover Publications, Inc., New York, 1956.
- [6] Hancock, M.J.: *The 1-D Heat Equation*, 2005, [\url{https://api.semanticscholar.org/CorpusID:22531664}](https://api.semanticscholar.org/CorpusID:22531664)
- [7] Kozdron J. M.: *Brownian Motion and the Heat Equation - Lectures prepared for ACSC 456*, University of Regina, Regina, Canada, 2008.
- [8] Marinić, S.: *Jednadžba provođenja topline i Fourierovi redovi*, završni rad, Fakultet za matematiku, Sveučilište u Rijeci, Rijeka, 2023.
- [9] Narasimhan, T. N.: *Fourier's heat conduction equation: History, influence, and connections*, Reviews of Geophysics, 37:151–172 (1999)
- [10] Plemenčić, M., Slamić, I.: *Kako zvuče trigonometrijske funkcije*, Math. e 38 (1), 21-31 (2020)
- [11] Stachel J.: *Einstein's Miraculous Year - Five Papers That Changed the Face of Physics*, Princeton University Press, New Jersey, 1998.
- [12] Stein, E. M., Shakarchi, R.: *Fourier Analysis: an introduction*, Princeton University Press, 2003.
- [13] Ungar š.: *Matematička analiza 3*, Prirodoslovno-matematički fakultet–Matematički odjel, Zagreb, 2002.

-
- ¹Daniel Gabriel Fahrenheit (Gdanjsk, 24. svibnja 1686. – Hag, 16. rujna 1736.), njemački fizičar i izumitelj
- ²Joseph Black (Bordeaux, 16. travnja 1728. – Edinburgh, 6. prosinca 1799.), škotski fizičar i kemičar
- ³Pierre-Simon, Marquis de Laplace (Beaumont-en-Auge, 23. ožujka 1749. – Pariz, 5. ožujka 1827.), francuski matematičar i astronom
- ⁴Antoine Laurent de Lavoisier (Pariz, 26. kolovoza 1743. – Pariz, 8. svibnja 1794.), francuski kemičar
- ⁵Nicolas Léonard Sadi Carnot (Pariz, 1. lipnja 1796. – Pariz, 24. kolovoza 1832.), francuski fizičar
- ⁶Jean-Baptiste Joseph Fourier (Auxerre, 21. ožujka 1768. – Pariz, 16. svibnja 1830.), francuski matematičar i fizičar
- ⁷Joseph-Louis Lagrange (Torino, 25. siječnja 1736. – Pariz, 10. travnja 1813.), talijanski matematičar, fizičar i astronom
- ⁸Jean Perrin (Lille, 30. studenog 1870. – New York, 17. travnja 1942.), francuski fizičar i kemičar
- ⁹Daniel Bernoulli (Groningen, 8. veljače 1700. – Basel, 27. ožujka 1782.), švicarski matematičar i fizičar
- ¹⁰Robert Brown (Monrose, 21. prosinca 1773. – London, 10. lipnja 1858.), škotski botaničar
- ¹¹Animacija gibanja veće čestice (npr. čestica peluda) suspendirane u fluidu (npr. čestice vode) može se pogledati, na primjer, na [vanjska poveznica]:
`\url{https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c2/Brownian_motion_large.gif}`
- ¹²Albert Einstein (Ulm, 14. ožujka 1879. – Princeton, 18. travnja 1955.), njemački teorijski fizičar
- ¹³Za dvije realne funkcije f i g , funkcija $f * g$ definirana je s $f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y)dy$.
- ¹⁴Adolf Eugen Fick (Kassel, 3. rujna 1829. – Blankenberge, 21. kolovoza 1901.), njemački liječnik i fiziolog
- ¹⁵Norbert Wiener (Columbia, 26. studenog 1894. – Stockholm, 18. ožujka 1964.) američki informatičar, matematičar i filozof
- ¹⁶Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier (Le Havre, 11. ožujka 1870. – Saint-Servan-sur-Mer, 28. travnja 1946.), francuski matematičar
- ¹⁷Paul Anthony Samuelson (Gary, 15. svibnja 1915. – Belmont, 13. prosinca 2009.), američki ekonomist
- ¹⁸Kiyoshi Itô (Hokusei, 7. rujna 1915. – Kyoto, 10. studenog 2008.), japanski matematičar
- ¹⁹Robert Cox Merton (New York City, 31. srpnja 1944. – danas), američki ekonomist
- ²⁰Myron Samuel Scholes (Timmins, 1. srpnja 1941. – danas), kanadsko-američki financijski ekonomist
- ²¹Fischer Sheffey Black (Washington, D.C., 11. siječnja 1938. – New Canaan, 30. kolovoza 1995.), američki ekonomist

