math.e

Hrvatski matematički elektronički časopis

Djelovanje grupe SL(2,Z) na Fareyevom grafu, kompleksu i stablu

Ivan Lovro Kovačić
Asistent na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci,
e-mail:
ivan.lovro.kovacic@riteh.uniri.hr

Vera Tonić
Docentica na Fakultetu za matematiku Sveučilišta u Rijeci,
e-mail:
vera.tonic@math.uniri.hr

Sažetak

U članku ćemo konstruirati Fareyev graf, Fareyev kompleks i Fareyevo stablo, te pokazati kako specijalna linearna grupa $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ djeluje na njima.

1 Uvod

Djelovanja grupa na geometrijskim objektima, npr., na grafovima, čine jedan od interesa geometrijske teorije grupa, što je područje matematike koje se oslanja na algebru, geometriju, topologiju i teoriju grafova, te se može opisati kao proučavanje svojstava grupa korištenjem geometrijskih i topoloških svojstava prostora na kojima te grupe djeluju. Svrha našeg članka je zainteresirati čitatelje za ovo područje. Iako ovdje nećemo imati prostora za detaljno uspostavljanje veze grafa s grupom koja na njega (na dovoljno dobar način) djeluje, barem ćemo predočiti slikovite primjere djelovanja jedne grupe na dva grafa.

Točnije, u radu ćemo opisati konstrukciju grafova poznatih kao Fareyev graf i Fareyevo stablo, pri čemu će nam za konstrukciju Fareyevog stabla trebati takozvani Fareyev kompleks, kojeg ćemo također uvesti. Zatim ćemo prikazati djelovanje specijalne linearne grupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ na njima. Rad završavamo uspostavljanjem veze između Fareyevog grafa i Fareyevog niza razlomaka.

Glavni izvor za ovaj rad je knjiga " Office hours with a geometric group theorist" ([1]), koju svakako preporučamo svima zainteresiranima za geometrijsku teoriju grupa. Puno više informacija o Fareyevom grafu može se naći u knjizi " Topology of numbers" ([4]), gdje je ono što mi nazivamo Fareyevim grafom navedeno kao Fareyev dijagram.

2 Osnovni pojmovi - grafovi, stabla i djelovanje grupe na graf

2.1 Grafovi

Uvedimo za početak osnovne pojmove iz teorije grafova, koji se mogu naći u [2] ili [8].

Definicija 2.1. **Graf**[1]$\mathcal{G}$ je uređena trojka $\mathcal{G} = (\mathcal{V}(\mathcal{G}), \mathcal{E}(\mathcal{G}), \psi_{\mathcal{G}})$, gdje je $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ neprazan skup čije elemente zovemo **vrhovi** grafa $\mathcal{G}$, $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ skup disjunktan s $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ čije elemente zovemo **bridovi** grafa $\mathcal{G}$ i $\psi_{\mathcal{G}}$ **funkcija incidencije** koja svakom bridu grafa $\mathcal{G}$ pridružuje neuređeni par (ne nužno različitih) vrhova grafa $\mathcal{G}$.

Pisat ćemo $\psi_{\mathcal{G}}(e) = \{u, v\}$, tj., koristimo $\{u, v\}$ kao oznaku za neuređeni par vrhova pridružen bridu e. U literaturi se umjesto $\{u, v\}$ također koriste oznake (u, v) ili uv .

Definicija 2.2. Vrhovi u i v grafa $\mathcal{G}$ su **susjedni** ako postoji brid e grafa $\mathcal{G}$ takav da je $\psi_{\mathcal{G}}(e) = \{u, v\}$. Kažemo da su u i v **krajevi** brida e. Brid e s jednim jedinim vrhom, tj., takav da je $\psi_{\mathcal{G}}(e) = \{u, u\}$ zovemo **petlja**.

Definicija 2.3. **Šetnja** u grafu $\mathcal{G}$ od **početnog** vrha v_0 do **krajnjeg** vrha v_n je konačan niz

$$W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n),$$

gdje su v_i vrhovi, e_i bridovi, te vrijedi $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$, za sve $i = 1, \ldots, n$. Broj n zovemo **duljina** šetnje. Šetnja je zatvorena ako ima pozitivnu duljinu i vrijedi $v_0 = v_n$. Zatvorena šetnja kod koje su početni vrh v_0 i svi unutarnji vrhovi $v_1, \ldots, v_{n-1}$ međusobno različiti zove se **ciklus**.

Neka su $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n)$ i $W' = (v_n, e_{n+1}, v_{n+1}, e_{n+2}, v_{n+2}, \ldots, e_{n+k}, v_{n+k})$ šetnje u grafu $\mathcal{G}$. Šetnja $(v_n, e_n, v_{n-1}, e_{n-1}, v_{n-2}, \ldots, v_1, e_1, v_0)$ dobivena obrtanjem redoslijeda u šetnji W zove se **inverzna** (ili **suprotna**) šetnja od W i označava se s W^{-1}, a šetnja

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n, e_{n+1}, v_{n+1}, e_{n+2}, v_{n+2}, \ldots, e_{n+k}, v_{n+k})$$

dobivena **nadovezivanjem** (ili **konkatenacijom**) šetnji W i W' kod vrha v_n označava se s WW'.

Definicija 2.4. Ako su u šetnji $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n)$ svi bridovi e_i međusobno različiti, takva se šetnja naziva **staza**. Ako su u stazi W i svi vrhovi v_i međusobno različiti, takvu stazu W zovemo **put**. Pri tome uvodimo i tzv. **trivijalan** (ili **konstantan**) **put**, što je šetnja duljine 0 koja se sastoji od jednog vrha i nema bridova.

Put u grafu $\mathcal{G}$ od vrha u do vrha v kraće zovemo (u, v)-put u $\mathcal{G}$. Vrhovi u i v grafa $\mathcal{G}$ su **povezani** ako postoji (u, v)-put u $\mathcal{G}$ (smatramo da uvijek imamo trivijalan (u, u)-put).

Na skupu vrhova $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ grafa $\mathcal{G}$ definiramo relaciju $\sim$:

$$u \sim v \ \Leftrightarrow \ \text{postoji } (u, v)\text{-put u } \mathcal{G}, \ \text{tj., vrhovi } u \text{ i } v \text{ su povezani.}$$

Lako se pokaže da je ovo relacija ekvivalencije na $\mathcal{V}(\mathcal{G})$. Klase ekvivalencije s obzirom na relaciju $\sim$ zovemo **komponente povezanosti** grafa $\mathcal{G}$. Graf $\mathcal{G}$ je **povezan** ako ima točno jednu komponentu povezanosti, tj., između svaka dva različita vrha grafa $\mathcal{G}$ postoji put.

Definicija 2.5. Povezan graf bez ciklusa zove se **stablo**.

Navedimo bez dokaza sljedeće poznate činjenice iz teorije grafova.

Lema 2.6. *Graf $\mathcal{G}$ je stablo ako i samo ako su svaka dva vrha grafa $\mathcal{G}$ povezana jedinstvenim putem.*

Lema 2.7. *Ako u grafu $\mathcal{G}$ postoji vrh e takav da za svaki vrh v različit od e postoji jedinstveni put od e do v, tada graf $\mathcal{G}$ nema ciklusa. Također, takav graf $\mathcal{G}$ je povezan, što znači da je $\mathcal{G}$ stablo.*

Napomena 2.8. Graf $\mathcal{G}$ nazivamo **jednostavnim** ako u $\mathcal{G}$ nema petlji i nikoja dva brida ne spajaju isti par vrhova. U jednostavnom grafu je šetnja $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n)$ potpuno određena nizom vrhova, pa je možemo zapisati kao $W = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Primijetimo da je stablo primjer jednostavnog grafa, te ćemo zato puteve u stablu moći zapisati samo pomoću niza odgovarajućih vrhova.
Također, kako u stablu između vrhova u i v postoji jedinstveni (u, v)-put, pisat ćemo njemu inverzni put u stablu kao (v, u)-put. Uočimo još da za (u, v)-put i (v, w)-put u stablu, ako je njihova konkatenacija put, onda je zapisujemo kao (u, w)-put.

2.2 Djelovanje grupe

Navedimo sada definiciju djelovanja grupe na skupu i na grafu, kao i jedan primjer za djelovanje grupe na skupu (iz [??]).
Definicija 2.9. Grupa G **djeluje** na (neprazan) skup Ω ako postoji preslikavanje
$\mathbf{.} : G \times \Omega \to \Omega$, u oznaci $\mathbf{.}(g, \omega) = g\mathbf{.}\omega$, za svaki $g \in G$ i za svaki $\omega \in \Omega$, takvo da vrijedi:

(1) $e\mathbf{.}\omega = \omega$, za svaki $\omega \in \Omega$, gdje je $e \in G$ neutralni element grupe G, i
(2) $g_1\mathbf{.}(g_2\mathbf{.}\omega) = (g_1 g_2)\mathbf{.}\omega$, za svaki $\omega \in \Omega$ i za sve $g_1, g_2 \in G$.

Preslikavanje $\mathbf{.} : G \times \Omega \to \Omega$ koje zadovoljava svojstva (1) i (2) zovemo **djelovanje grupe** G na skup Ω.

Sjetimo se sad specijalne linearne grupe reda 2 nad $\mathbb{Z}$, u oznaci $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, što je grupa svih (2×2)-matrica s cjelobrojnim elementima i s determinantom jednakom 1 , s operacijom množenja matrica.
Zadatak 2.10. Definirajmo preslikavanje $\mathbf{.} : \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ s

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mathbf{.}(x, y) := (ax + by, cx + dy),$$

što također možemo zapisati kao

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mathbf{.}(x, y) := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

gdje vektor $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ zamjenjuje točku $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, a vektor $\begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$ zamjenjuje točku $(ax + by, cx + dy) \in \mathbb{Z}^2$. Pokažite da je ovako definirano preslikavanje ujedno djelovanje grupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ na skupu $\mathbb{Z}^2$.

Uputa: Provjerite da preslikavanje $\mathbf{.}$ zadovoljava svojstva djelovanja grupe, to jest, da za neutralni element $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ vrijedi $I\mathbf{.}(x, y) = (x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2$, te da za proizvoljne $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ vrijedi $A\mathbf{.}(B\mathbf{.}(x, y)) = (AB)\mathbf{.}(x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

Osim djelovanja grupe na skup, možemo uvesti i djelovanja koja čuvaju dodatnu strukturu koju skup ima, kao što je djelovanje grupe na graf.

Definicija 2.11. Grupa G **djeluje na graf** $\mathcal{G}$ ako:

(1) postoji djelovanje grupe G na skup vrhova grafa
$\boldsymbol{.} : G \times \mathcal{V}(\mathcal{G}) \to \mathcal{V}(\mathcal{G})$, te

(2) postoji djelovanje grupe G na skup bridova grafa
$\boldsymbol{.} : G \times \mathcal{E}(\mathcal{G}) \to \mathcal{E}(\mathcal{G})$

tako da vrijedi: ako su u, v krajevi brida b, onda su $g\boldsymbol{.}u, g\boldsymbol{.}v$ krajevi brida $g\boldsymbol{.}b$.

Pri tome je uobičajeno korištenje oznake $\boldsymbol{.}$ za djelovanja od G i na skupu vrhova i na skupu bridova istog grafa. Za *jednostavne* grafove, ovu definiciju možemo formulirati ovako:

Definicija 2.12. Grupa G **djeluje na jednostavan graf** $\mathcal{G}$ ako postoji djelovanje grupe G na skup vrhova grafa $\textbf{.} : G \times \mathcal{V}(\mathcal{G}) \to \mathcal{V}(\mathcal{G})$ koje čuva susjednost vrhova grafa $\mathcal{G}$, to jest, za koje vrijedi:

$(*)$
$u, v \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$ su susjedni u $\mathcal{G} \ \Rightarrow\ g.u, g.v \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$ su susjedni u $\mathcal{G}, \ \forall g \in G.$

Napomena 2.13. Definicija 2.12 zadaje i djelovanje grupe G na skup bridova $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ jednostavnog grafa $\mathcal{G}$. Naime, definirajmo preslikavanje $\textbf{.} : G \times \mathcal{E}(\mathcal{G}) \to \mathcal{E}(\mathcal{G})$ s

$$g.\{u, v\} := \{g.u, g.v\},$$

za sve $g \in G$ i sve $\{u, v\} \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$. Znamo iz $(*)$ da je kodomena ovog preslikavanja zaista $\mathcal{E}(\mathcal{G})$. Također, jasno je da za neutralni element $e \in G$ vrijedi $e.\{u, v\} = \{u, v\}$ za svaki $\{u, v\} \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$, te se lako provjeri da za proizvoljan $\{u, v\} \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$ vrijedi $g_1.(g_2.\{u, v\}) = (g_1 g_2).\{u, v\}$, za sve $g_1, g_2 \in G$.

Napomena 2.14. Iz svojstva $(*)$ i definicije 2.9 slijedi da preslikavanje $\textbf{.}$ iz definicije 2.12 čuva i *nesusjednost* vrhova grafa $\mathcal{G}$: za vrhove $u, v \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$ koji nisu susjedni, ako pretpostavimo da postoji $g \in G$ takav da su $g.u$ i $g.v$ susjedni, onda iz $(*)$ slijedi da su $g^{-1}.(g.u) = u$ i $g^{-1}.(g.v) = v$ susjedni, što je u kontradikciji s početnom pretpostavkom.

Primjer djelovanja grupe na jednostavan graf dat ćemo u idućem odjeljku.

3 Fareyev graf

Cilj ovog odjeljka je definirati i konstruirati graf koji je u geometrijskoj teoriji grupa poznat kao *Fareyev graf*. U [4] se navodi da je ovaj graf konstruirao Adolf Hurwitz[2] 1894. godine, te ga nazvao u čast Johna Fareya, Sr.[3], zbog veze vrhova ovog grafa s takozvanim *Fareyevim nizovima* (koje ćemo spomenuti u petom odjeljku ovog rada). Osim konstrukcije Fareyevog grafa, ovdje ćemo opisati djelovanje grupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ na njega (iz [1]).

Za uvođenje vrhova Fareyevog grafa koristit ćemo uređene parove cijelih brojeva s nekim dodatnim svojstvima. Za početak, sjetimo se Bezoutove leme (npr. iz [3], gdje je Bezoutova lema navedena kao posljedica teorema 2.3):
Lema 3.1. *Neka su $m, n \in \mathbb{Z}$ takvi da je $(m, n) \neq (0, 0)$. Tada postoje $x, y \in \mathbb{Z}$ takvi da je*

$$mx + ny = \mathrm{nzd}(m, n),$$

gdje je $\mathrm{nzd}(m, n)$ najveći zajednički djelitelj brojeva m i n, to jest, najveći prirodni broj koji dijeli i m i n.

Kada je $\mathrm{nzd}(m, n) = k$, pisat ćemo $(m, n) = (km', kn') = k(m', n')$ za odgovarajuće brojeve $m', n' \in \mathbb{Z}$, odnosno, pisat ćemo $(lm, ln) = l(m, n)$ kad nam to bude potrebno. Ako je $\mathrm{nzd}(m, n) = 1$, kažemo da su m i n *relativno prosti*.
Par brojeva (x, y) iz leme 3.1 zovemo *Bezoutovim koeficijentima* za par (m, n), a mogu se odrediti (proširenim) Euklidovim algoritmom ([3]). Iako Bezoutovi koeficijenti za (m, n) općenito nisu jedinstveni, uz dodatne uvjete možemo dobiti i jedinstvenost. Tako korištenjem Teorema 10.1 iz [3] (o rješenjima linearnih Diofantskih jednadžbi) i Euklidovog algoritma slijedi:

Lema 3.2. *Za prirodne brojeve $m > n > 1$ koji su relativno prosti vrijedi:*

(1) Postoji jedinstveni par cijelih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju $mx + ny = 1$, te $x < 0$, $|x| < n$ i $0 < y < m$.

(2) Postoji jedinstveni par cijelih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju $mx + ny = 1$, te $y < 0$, $|y| < m$ i $0 < x < n$.

Posljedica Leme 3.2 je sljedeća:

Lema 3.3. *Neka su $m > n > 1$ relativno prosti prirodni brojevi. Tada postoje jedinstveni prirodni brojevi x i y za koje vrijedi $0 < x < m$, $0 < y < n$ te $-my + nx = 1$.*
Dodatno, vrijedi i sljedeće:

- $x > y$, $m - x \geq n - y$,
- $\mathrm{nzd}(x, y) = 1$, *i*
- $\mathrm{nzd}(m - x, n - y) = 1$.

Dokaz. Za dane relativno proste brojeve $m > n > 1$, po dijelu (1) leme 3.2 znamo da postoji jedinstveni par Bezoutovih koeficijenata $(-y, x)$ takvih da vrijedi

$$m(-y) + nx = 1, \quad \text{te} \quad 0 < y < n, \ 0 < x < m.$$

Pri tome još vrijedi $x > y$, jer bi u protivnom iz $x \leq y$ slijedilo $1 = nx - my \leq (n - m)y < 0$.
Također vrijedi $m - x \geq n - y$, jer bi u protivnom iz $m - x < n - y$ slijedilo
$1 = nx - my = m(n - y) - n(m - x) > m(n - y) - n(n - y) = (m - n)(n - y)$,
a znamo da je $(m - n)(n - y) \geq 1$. Osim toga, kad x i y ne bi bili relativno prosti, postojao bi $l \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ takav da $x = lx'$, $y = ly'$, za neke $x', y' \in \mathbb{N}$, iz čega bi slijedilo da l dijeli $nx - my = 1$. Konačno, kad $m - x$ i $n - y$ ne bi bili relativno prosti, postojao bi $l \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ takav da $m - x = lz$, $n - y = lw$, za neke $z, w \in \mathbb{N}$, iz čega bi slijedilo da l dijeli $m(n - y) - n(m - x) = nx - my = 1$. ■

Napomena 3.4. Za (m, n) i (x, y) iz Leme 3.3, upravo su $n - y$ i $-(m - x)$ jedinstveni cijeli brojevi koji zadovoljavaju uvjete iz (2) leme 3.2, jer $m(n - y) + n(-(m - x)) = 1$, te vrijedi $0 < n - y < n$ i $|-(m - x)| = m - x < m$. Pri tome primijetimo da vijedi i $\det\left(\begin{bmatrix} m & x \\ n & y \end{bmatrix}\right) = my - nx = -1$, te
$\det\left(\begin{bmatrix} m & m - x \\ n & n - y \end{bmatrix}\right) = nx - my = 1$.

Navedimo sada definiciju korisnu za uvođenje Fareyevog grafa.

Definicija 3.5. Kažemo da je uređeni par $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ **primitivan** ako je $\mathrm{nzd}(m, n) = 1$.

Naglasimo da iz činjenice da je $\mathrm{nzd}(m, n) = 1$ slijedi da u primitivnom elementu $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ barem jedan od brojeva nije nula.

Na skupu svih primitivnih elemenata iz $\mathbb{Z}^2$ definiramo relaciju $\sim$ ovako:

$$(m, n) \sim (k, l) \iff \exists x \in \{1, -1\} \text{ takav da je } (m, n) = x(k, l).$$

Lako se pokaže da je $\sim$ relacija ekvivalencije na tom skupu. S obzirom na ovu relaciju ekvivalencije, klasa ekvivalencije primitivnog elementa $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ je

$$[(m, n)] = \{(m, n), -(m, n)\}.$$

Zbog preglednosti, koristit ćemo oznaku $\pm(m,n) := [(m,n)]$.

Definicija Fareyevog grafa

Definicija 3.6. **Fareyev graf** $\mathcal{G}$ je graf čiji je skup vrhova

$$\mathcal{V}(\mathcal{G}) := \{\pm(m,n) \mid (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \text{ je primitivan}\},$$

tj., $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ je kvocijentni skup s obzirom na relaciju ekvivalencije $\sim$ na skupu svih primitivnih elemenata od $\mathbb{Z}^2$. Skup bridova $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ dobijemo ovako: vrhovi $\pm(p,q)$ i $\pm(r,s)$ su susjedni ako je

$$\det\left(\begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}\right) = ps - qr \in \{1,-1\}.$$

Uočimo da zamjena stupaca u determinanti mijenja predznak determinante, no iz $ps - qr \in \{1,-1\}$ slijedi $rq - sp \in \{1,-1\}$, pa redosljed vrhova u bridu zaista nije bitan.
Zadatak 3.7. Pokažite da je Fareyev graf jednostavan graf.

Konstrukcija Fareyevog grafa $\mathcal{G}$. Konstruirajmo sada, za $n \in \mathbb{N}_0$, niz grafova $\mathcal{G}_n$ za koji ćemo pokazati da vrijedi

$$\mathcal{V}(\mathcal{G}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{V}(\mathcal{G}_n) \text{ i } \mathcal{E}(\mathcal{G}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{E}(\mathcal{G}_n).$$

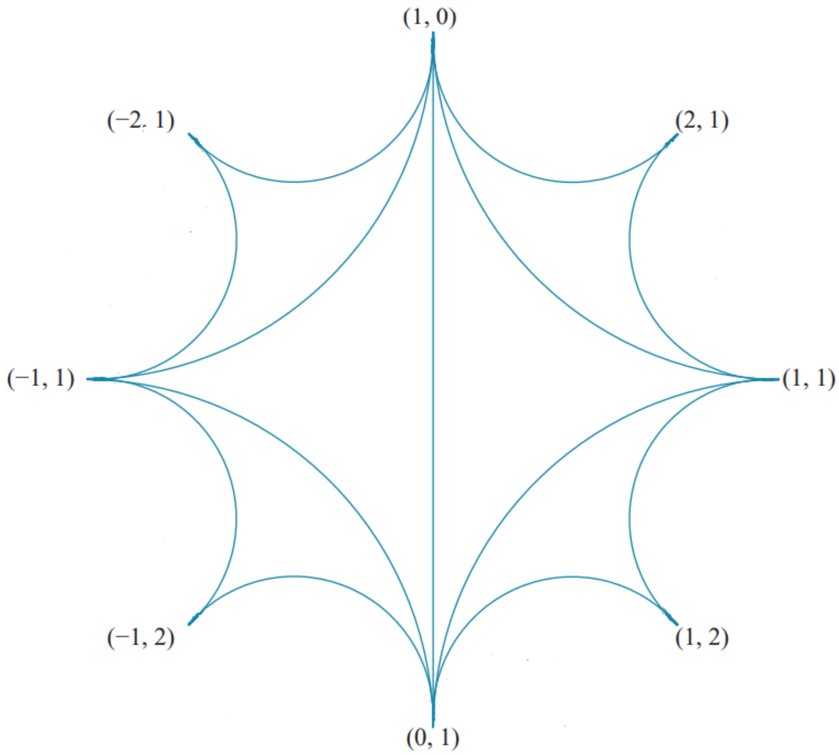
Prikazat ćemo konstrukciju i grafički, barem djelomično. Počinjemo od vrhova $\pm(1,0)$ i $\pm(0,1)$. Kako vrijedi $\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1$, vrhovi $\pm(1,0)$ i $\pm(0,1)$ su susjedni, tj. povezani bridom i to ćemo smatrati grafom $\mathcal{G}_0$, a ujedno i nultim korakom naše konstrukcije za $\mathcal{G}$. Postoje li vrhovi koji su susjedni s $\pm(1,0)$ i $\pm(0,1)$? Pretpostavimo da je $\pm(p,q)$ vrh susjedan s $\pm(1,0)$ i $\pm(0,1)$. Tada iz

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & p \\ 0 & q \end{bmatrix}\right) = q \in \{1,-1\} \text{ i } \det\left(\begin{bmatrix} p & 0 \\ q & 1 \end{bmatrix}\right) = p \in \{1,-1\}$$

dobijemo da su vrhovi $\pm(1,0)$ i $\pm(0,1)$ susjedni s vrhovima $\pm(1,1)$, $\pm(1,-1)$, $\pm(-1,1)$ i $\pm(-1,-1)$, ali kako je $(1,1) \sim (-1,-1)$ i $(-1,1) \sim (1,-1)$, slijedi da je $\pm(1,1) = \pm(-1,-1)$ i $\pm(-1,1) = \pm(1,-1)$. Dakle, vrhovi $\pm(1,0)$ i $\pm(0,1)$ su susjedni s vrhovima $\pm(1,1)$ i $\pm(-1,1)$. Na ovaj način smo dodali dva nova vrha i četiri nova brida grafu $\mathcal{G}_0$, te tako dobili graf $\mathcal{G}_1$. Ovo dodavanje dvaju novih vrhova i četiriju novih bridova smatramo provođenjem prvog koraka u našoj konstrukciji za $\mathcal{G}$. Nadalje, pogledajmo brid koji spaja vrhove $\pm(1,0)$ i $\pm(1,1)$. Postoje li vrhovi susjedni s $\pm(1,0)$ i $\pm(1,1)$ osim vrha $\pm(0,1)$? Iz

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & p \\ 0 & q \end{bmatrix}\right) = q \in \{1,-1\} \text{ i } \det\left(\begin{bmatrix} 1 & p \\ 1 & q \end{bmatrix}\right) = q - p \in \{1,-1\}$$

dobijemo da su vrhovi $\pm(1,0)$ i $\pm(1,1)$ susjedni s vrhovima $\pm(0,1)$, $\pm(2,1)$,$\pm(-2,-1)$ i $\pm(0,-1)$, ali kako je $(0,1) \sim (0,-1)$ i $(2,1) \sim (-2,-1)$, slijedi da je $\pm(0,1) = \pm(0,-1)$ i $\pm(2,1) = \pm(-2,-1)$. Kako smo već znali da je vrh $\pm(0,1)$ susjedan s vrhovima $\pm(1,0)$ i $\pm(1,1)$, dobili smo jedan novi vrh, $\pm(2,1)$, koji je susjedan s vrhovima $\pm(1,0)$ i $\pm(1,1)$. Analogno se dobiju vrhovi $\pm(-2,1)$ (susjedan s $\pm(-1,0)=\pm(1,0)$ i $\pm(-1,1)$), $\pm(-1,2)$ (susjedan s $\pm(-1,1)$ i $\pm(0,1)$) i $\pm(1,2)$ (susjedan s $\pm(0,1)$ i $\pm(1,1)$). Kada grafu $\mathcal{G}_1$ dodamo ova četiri nova vrha i spojimo odgovarajuće bridove, to dovršava drugi korak naše konstrukcije za $\mathcal{G}$, čime dobivamo graf $\mathcal{G}_2$.



Slika 1: Graf $\mathcal{G}_2$, tj., nulti, prvi i drugi korak konstrukcije Fareyevog grafa $\mathcal{G}$ (iz [1]).

Dosadašnji koraci konstrukcije prikazani su na slici 1, na kojoj smo, radi preglednosti, vrhove zapisali izostavljajući simbol $\pm$, a bridove smo nacrtali zakrivljenima.

Primjetimo da smo vrh $\pm(2,1)$ mogli dobiti zbrajanjem odgovarajućih reprezentanata vrhova $\pm(1,0)$ i $\pm(1,1)$, to jest, za $(1,0)\in\pm(1,0)$ i $(1,1)\in\pm(1,1)$, dobijemo $(1,0)+(1,1)=(2,1)$. Općenito, vrijedi sljedeća lema.

Lema 3.8. *Neka su $\pm(p,q)$ i $\pm(r,s)$ susjedni vrhovi Fareyevog grafa $\mathcal{G}$. Tada je $\pm(p+r,q+s)$ također vrh Fareyevog grafa $\mathcal{G}$ koji je susjedan vrhovima $\pm(p,q)$ i $\pm(r,s)$.*

Dokaz. Pokažimo prvo da je $\pm(p+r,q+s)$ vrh Fareyevog grafa $\mathcal{G}$. Kada $\pm(p+r,q+s)$ ne bi bio vrh Fareyevog grafa $\mathcal{G}$, tj., $p+r$ i $q+s$ ne bi bili relativno prosti, postojao bi $l\in\mathbb{N}_{\geq 2}$ takav da $(p+r,q+s)=l(w,z)$, za neke $w,z\in\mathbb{Z}$. No tada bi vrijedilo $slw-rlz=s(p+r)-r(q+s)=sp-rq\in\{-1,1\}$, jer su $\pm(p,q)$ i $\pm(r,s)$ susjedni vrhovi, što bi značilo da l mora dijeliti 1, što je nemoguće. Dakle, $\pm(p+r,q+s)$ je vrh Fareyevog grafa $\mathcal{G}$.

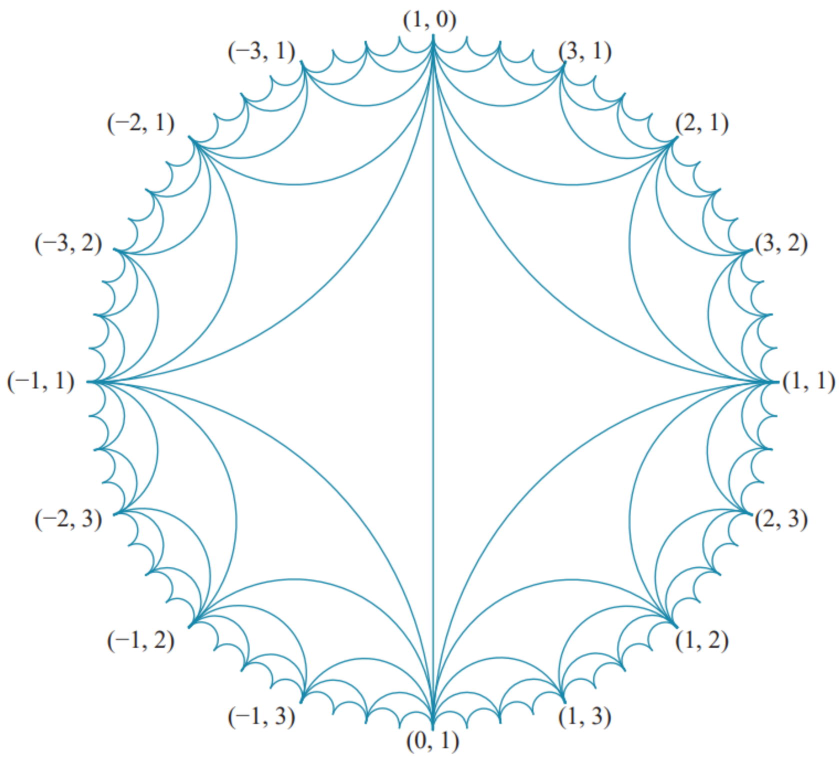
Da pokažemo da je vrh $\pm(p+r,q+s)$ susjedan s vrhovima $\pm(p,q)$ i $\pm(r,s)$, dovoljno je uočiti da vrijedi $\det\left(\begin{bmatrix} p & p+r \\ q & q+s \end{bmatrix}\right)=\det\left(\begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}\right)\in\{1,-1\}$, iz čega slijedi da su $\pm(p,q)$ i $\pm(p+r,q+s)$ susjedni vrhovi, te da je

$\det\left(\begin{bmatrix} p+r & r \\ q+s & s \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}\right) \in \{1, -1\}$, iz čega slijedi da su $\pm(r, s)$ i $\pm(p+r, q+s)$ susjedni vrhovi. ■

Dakle, ako su $\pm(p, q) = \pm(-p, -q)$ i $\pm(r, s) = \pm(-r, -s)$ susjedni vrhovi Fareyevog grafa $\mathcal{G}$, prema lemi 3.8 slijedi da su $\pm(p+r, q+s), \pm(p-r, q-s), \pm(-p+r, -q+s)$ i $\pm(-p-r, -q-s)$ vrhovi susjedni s vrhovima $\pm(p, q)$ i $\pm(r, s)$, ali kako je $(p+r, q+s) \sim (-p-r, -q-s)$ i $(-p+r, -q+s) \sim (p-r, q-s)$, slijedi da je $\pm(p+r, q+s) = \pm(-p-r, -q-s)$ i $\pm(-p+r, -q+s) = \pm(p-r, q-s)$. Odavde slijedi da za svaki brid Fareyevog grafa $\mathcal{G}$ iz n-tog koraka konstrukcije (za $n \geq 1$), u idućem koraku konstrukcije koristeći lemu 3.8 dobijemo jedan novi vrh Fareyevog grafa $\mathcal{G}$, susjedan s krajevima tog brida, tako da zbrojimo odgovarajuće reprezentante krajeva tog brida. Tako smo mogli dobiti vrhove $\pm(2, 1)$, $\pm(-2, 1)$, $\pm(-1, 2)$ i $\pm(1, 2)$ te ukupno osam njima pripadajućih novih bridova iz drugog koraka konstrukcije.

Nastavimo dalje s konstrukcijom Fareyevog grafa $\mathcal{G}$ korištenjem leme 3.8: za treći korak, vrh $\pm(3, 1)$ dobivamo zbrajanjem odgovarajućih reprezentanata vrhova $\pm(1, 0)$ i $\pm(2, 1)$, te zatim ovaj vrh bridovima povežemo s vrhovima $\pm(1, 0)$ i $\pm(2, 1)$. Analogno dobijemo po jedan novi vrh za svaki od preostalih sedam bridova iz drugog koraka, te svaki takav vrh spojimo bridovima s vrhovima brida iz kojeg je nastao, što dovršava treći korak konstrukcije. Zatim istovjetno izvedemo četvrti korak, peti korak i tako u beskonačnost, čime dobivamo graf $\mathcal{K} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{G}_n$, za koji želimo pokazati da je jednak Fareyevom grafu $\mathcal{G}$.

Na slici 2 je prikazano od nultog do trećeg koraka iz konstrukcije Fareyevog grafa $\mathcal{G}$ s označenim vrhovima, te četvrti i peti korak samo s nacrtanim bridovima (tj., na slici 2 je graf $\mathcal{G}_5$).



Slika 2: Graf $\mathcal{G}_5$, tj., od nultog do petog koraka konstrukcije Fareyevog grafa $\mathcal{G}$ (iz [1]).

Primijetimo da iz opisane konstrukcije za $\mathcal{K}$ i leme 3.8 slijedi da je

$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{G}$, dakle za vrhove vrijedi $\mathcal{V}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{G})$ i za bridove vrijedi $\mathcal{E}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{G})$. Stoga, da bismo dokazali da je $\mathcal{K} = \mathcal{G}$ dovoljno je dokazati da vrijedi $\mathcal{V}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{K})$ i $\mathcal{E}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{K})$. Za početak, formulirajmo ovakav zadatak:

Zadatak 3.9. Pokažite da su svi bridovi Fareyevog grafa $\mathcal{G}$ iz vrha $\pm(1,0)$ oblika $\{\pm(1,0), \pm(p,1)\}$, za $p \in \mathbb{Z}$, te da se konstrukcijom od $\mathcal{K}$ dobije da su svi ovi bridovi sadržani u $\mathcal{K}$, pa su i svi vrhovi $\pm(p,1)$, za $p \in \mathbb{Z}$, sadržani u $\mathcal{K}$. Ujedno pokažite da su, za $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, svi bridovi $\{\pm(p,1), \pm(p-1,1)\}$ i $\{\pm(-p,1), \pm(-p+1,1)\}$ iz $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ sadržani i u $\mathcal{E}(\mathcal{K})$.

Uputa: Prva tvrdnja slijedi iz uvjeta $\det\left(\begin{bmatrix} 1 & p \\ 0 & q \end{bmatrix}\right) = q \in \{1,-1\}$, tj., vrhovi iz $\mathcal{G}$ susjedni s $\pm(1,0)$ su oblika $\pm(p,q)$, za $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \{1,-1\}$. Kako je $(-p,1) \sim (p,-1)$ za svaki $p \in \mathbb{Z}$, vrhovi iz $\mathcal{G}$ susjedni s vrhom $\pm(1,0)$ su oblika $\pm(p,1)$, $p \in \mathbb{Z}$. Za proizvoljni $p \in \mathbb{Z}$, pokažite da se opisanom konstrukcijom pomoću leme 3.8 (korištenjem $\pm(1,0)$ i $\pm(1,1)$, ili $\pm(-1,0) = \pm(1,0)$ i $\pm(-1,1)$) u odgovarajućem broju koraka može doći do brida koji spaja vrhove $\pm(1,0)$ i $\pm(p,1)$, pri čemu se također dobije da, za $p \geq 2$, i brid $\{\pm(p,1), \pm(p-1,1)\}$ mora biti u $\mathcal{E}(\mathcal{K})$, te za $p < 0$, $|p| \geq 2$ i brid $\{\pm(p,1), \pm(p+1,1)\}$ mora biti u $\mathcal{E}(\mathcal{K})$.

Analogno se pokaže da $\mathcal{K}$ sadrži sve bridove Fareyevog grafa $\mathcal{G}$ iz vrha $\pm(0,1)$, dakle skup vrhova $\{\pm(1,p) \mid p \in \mathbb{Z}\} = \{\pm(1,p) \mid p \in \mathbb{N}\} \cup \{\pm(-1,p) \mid p \in \mathbb{N}\}$ iz $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ također se nalazi i u $\mathcal{V}(\mathcal{K})$.

Napomena 3.10. Primijetimo sada da za vrhove $\pm(p,q)$ iz $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ za koje je $p < 0$ i $q < 0$ vrijedi $\pm(p,q) = \pm(|p|,|q|)$, a za vrhove $\pm(p,q)$ iz $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ za koje je $p > 0$ i $q < 0$ vrijedi $\pm(p,q) = \pm(-p,|q|)$. Iz toga slijedi da sve vrhove $\pm(p,q)$ iz $\mathcal{V}(\mathcal{G}) \setminus \{\pm(1,0), \pm(0,1), \pm(1,1), \pm(-1,1)\}$ možemo zapisati tako da vrijedi jedan od sljedeća četiri uvjeta:

(i) $p > q \geq 1$, ili
(ii) $p < 0$ i $|p| > q \geq 1$, ili
(iii) $p < 0$ i $q > |p| \geq 1$, ili
(iv) $q > p \geq 1$.

To jest, možemo zamisliti da smo graf $\mathcal{G}$ bez brida $\{\pm(1,0), \pm(0,1)\}$ podijelili na četiri kvadranta i to tako da:

(I) prvi kvadrant sadrži vrhove $\pm(p,q)$ koji zadovoljavaju uvjet (i) ili vrijedi $\pm(p,q) = \pm(1,0)$ ili $\pm(p,q) = \pm(1,1)$,
(II) drugi kvadrant sadrži vrhove $\pm(p,q)$ koji zadovoljavaju uvjet (ii) ili vrijedi $\pm(p,q) = \pm(-1,0) = \pm(1,0)$ ili $\pm(p,q) = \pm(-1,1)$,
(III) treći kvadrant sadrži vrhove $\pm(p,q)$ koji zadovoljavaju uvjet (iii) ili vrijedi $\pm(p,q) = \pm(0,1)$ ili $\pm(p,q) = \pm(-1,1)$,
(IV) četvrti kvadrant sadrži vrhove $\pm(p,q)$ koji zadovoljavaju uvjet (iv) ili vrijedi $\pm(p,q) = \pm(0,1)$ ili $\pm(p,q) = \pm(1,1)$.

Na slici 2 bi podjela na kvadrante odgovarala tome da nacrtamo x-os kroz vrhove $\pm(-1,1)$ i $\pm(1,1)$, te nacrtamo y-os kroz vrhove $\pm(1,0)$ i $\pm(0,1)$ (mada ova slika prikazuje $\mathcal{G}_5$, a ne cijeli $\mathcal{G}$).

Sada želimo pokazati da, ako je $\pm(p,q)$ vrh iz $\mathcal{G}$ koji zadovoljava jedan od uvjeta (i)–(iv) napomene 3.10, onda za bilo koji brid iz $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ kojemu je taj $\pm(p,q)$ vrh mora vrijediti da mu se i drugi vrh nalazi u istom kvadrantu kao i $\pm(p,q)$, tj., cijeli brid se mora nalaziti u istom kvadrantu kao i $\pm(p,q)$. Pokažimo to za vrh koji zadovoljava uvjet (i) iz napomene 3.10, dok se za ostale uvjete iz napomene 3.10 ova činjenica dokaže analogno.

Lema 3.11. *Neka je $\pm(p,q)$ vrh iz $\mathcal{G}$ za koji vrijedi $p > q \geq 1$, te neka je $\{\pm(p,q), \pm(x,y)\}$ brid iz $\mathcal{G}$. Tada vrijedi da je vrh $\pm(x,y)$ također iz prvog kvadranta od $\mathcal{G}$, tj., ili je $x > y \geq 1$, ili $(x,y) = (1,0)$ ili $(x,y) = (1,1)$.*

Dokaz. Znamo da vrijedi $\det\left(\begin{bmatrix} p & x \\ q & y \end{bmatrix}\right) = py - qx \in \{1,-1\}$, te trebamo pokazati da za (x,y) ne može vrijediti niti jedna od preostalih mogućnosti koje opisuju vrhove u kvadrantima od $\mathcal{G}$, a nisu spomenute u tekstu ove leme.

Ako bi bilo $(x,y) = (0,1)$, slijedilo bi $py - qx = p \geq 2 \notin \{-1,1\}$. Ako bi bilo $(x,y) = (-1,1)$, slijedilo bi $py - qx = p + q \geq 3 \notin \{-1,1\}$. Oba slučaja kad je $x < 0$ (tj, (ii) i (iii) iz napomene 3.10) vode na $py - qx = py + q|x| \geq p + q \geq 3 \notin \{-1,1\}$. Napose, ako je $y > x \geq 1$ kao u (iv) iz napomene 3.10, tada $py - qx > py - qy = y(p-q) > 1$, jer $y > 1$ i $p - q \geq 1$, dakle ne može biti $py - qx \in \{-1,1\}$. ∎

Dakle, ako želimo pokazati da je $\mathcal{V}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{K})$ i $\mathcal{E}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{K})$, dovoljno je to pokazati za svaki kvadrant posebno (a za brid $\{\pm(1,0), \pm(0,1)\}$ već znamo da je i u $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ i u $\mathcal{E}(\mathcal{K})$).

Teorem 3.12. *Vrijedi $\mathcal{V}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{K})$ i $\mathcal{E}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{K})$.*

Dokaz. Iz početka konstrukcije za $\mathcal{K}$ znamo da su vrhovi $\pm(1,0)$, $\pm(1,1)$, $\pm(0,1)$ i $\pm(-1,1)$ iz $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ ujedno sadržani i u $\mathcal{V}(\mathcal{K})$, te da su bridovi $\{\pm(1,0), \pm(0,1)\}$, $\{\pm(1,0), \pm(1,1)\}$, $\{\pm(1,0), \pm(-1,1)\}$, $\{\pm(0,1), \pm(1,1)\}$ i $\{\pm(0,1), \pm(-1,1)\}$ iz $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ ujedno sadržani i u $\mathcal{E}(\mathcal{K})$.

Kao u napomeni 3.10, podijelimo graf $\mathcal{G}$ na kvadrante, te pokažimo da za sve vrhove i bridove iz prvog kvadranta od $\mathcal{G}$ vrijedi da su oni sadržani i u $\mathcal{K}$, a za ostala tri kvadranta se ovo sadržavanje pokaže analogno.

Što se tiče vrhova iz prvog kvadranta od $\mathcal{G}$, kako za $\pm(1,0)$ i $\pm(1,1)$ već znamo da su sadržani i u $\mathcal{G}$ i u $\mathcal{K}$, ostaje provjeriti što je s vrhovima $\pm(p,q)$ iz $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ za koje vrijedi $p > q \geq 1$.

Što se tiče bridova iz prvog kvadranta od $\mathcal{G}$, kako za brid $\{\pm(1,1), \pm(1,0)\}$ već znamo da je sadržan i u $\mathcal{G}$ i u $\mathcal{K}$, preostaje promatrati bridove $\{\pm(p,q), \pm(r,s)\}$ iz $\mathcal{G}$ za koje vrijedi $p > q \geq 1$, pri čemu iz leme 3.11 znamo da mora biti i $\pm(r,s)$ iz prvog kvadranta of $\mathcal{G}$. Također, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $p \geq r$, no primijetimo da slučaj $p = r$ vodi na $ps - pq \in \{-1,1\}$, što bi značilo da je $p = 1$, dakle $(p,q) = (1,1)$ i $(r,s) = (1,0)$ (jer to je jedino što je moguće u prvom kvadrantu). Zato ćemo ubuduće pretpostavljati da vrijedi $p > r$. Da rezimiramo, naše su pretpostavke za bridove $\{\pm(p,q), \pm(r,s)\}$ iz $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ za koje trebamo pokazati da su i u $\mathcal{E}(\mathcal{K})$ sljedeće:

$$p > q \geq 1, \;\; p > r \geq 1 \;\text{ i }\; r \geq s \geq 0. \tag{3.1}$$

Pogledajmo prvo vrhove $\pm(p,q)$ za koje je $p > q = 1$. Iz zadatka 3.9

znamo da su, za $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, svi vrhovi oblika $\pm(p,1)$ koji su iz $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ ujedno sadržani i u $\mathcal{V}(\mathcal{K})$. Sada pogledajmo bridove $\{\pm(p,1), \pm(r,s)\}$ iz $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ uz uvjete iz (3.1). Iz uvjeta $ps - r \in \{-1, 1\}$ i iz (3.1) slijedi da mora biti $(r,s) = (1,0)$ ili $(r,s) = (p-1, 1)$ (jer $s \geq 2$ vodi na $ps - r \geq 2p - r > p > 1$). Znači brid $\{\pm(p,1), \pm(r,s)\}$ mora biti jednak ili $\{\pm(p,1), \pm(1,0)\}$ ili $\{\pm(p,1), \pm(p-1,1)\}$, no za oba ova brida iz zadatka 3.9 znamo da su sadržani i u $\mathcal{E}(\mathcal{K})$.

Ostaje provjeriti slučaj vrhova $\pm(p,q)$ iz prvog kvadranta $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ za koje vrijedi $p > q > 1$, te bridova $\{\pm(p,q), \pm(r,s)\}$ iz $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ za koje vrijedi

$$p > q > 1, \;\; p > r \geq 1 \;\text{ i }\; r \geq s \geq 0. \tag{3.2}$$

Dakle, fiksirajmo proizvoljni vrh $\pm(p,q)$ iz $\mathcal{G}$ za kojeg vrijedi $p > q > 1$. Koristit ćemo indukciju po p. Za bazu indukcije iskoristit ćemo da znamo da su vrhovi $\pm(1,0)$ te $\pm(p,1)$, za $p \in \mathbb{N}$, koji su u $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ ujedno sadržani i u $\mathcal{V}(\mathcal{K})$, te da su bridovi $\{\pm(p,1), \pm(1,0)\}$ za $p \in \mathbb{N}$ i $\{\pm(p,1), \pm(p-1,1)\}$ za $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, koji su u $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ ujedno sadržani i u $\mathcal{E}(\mathcal{K})$.

Pretpostavimo da za svaki prirodan broj p' za koji vrijedi $p > p' > 0$ imamo:

(1) [$(*)$] svaki vrh $\pm(p', q')$, uz $p' > q' \geq 1$, koji se nalazi u $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ se također nalazi u $\mathcal{V}(\mathcal{K})$,
(2) [$(**)$] svaki brid oblika $\{\pm(p', q'), \pm(r,s)\}$ koji zadovoljava uvjete iz (3.1) i nalazi se u $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ se također nalazi i u $\mathcal{E}(\mathcal{K})$.

Sada primijetimo da za zadani vrh $\pm(p,q)$ iz $\mathcal{V}(\mathcal{G})$, zbog $\operatorname{nzd}(p,q) = 1$ i $p > q > 1$ iz leme 3.3 slijedi da postoje jedinstveni prirodni brojevi x i y za koje vrijedi:

$$\begin{gathered} 0 < x < p, \; 0 < y < q \;\text{ i }\; \det\left(\begin{bmatrix} p & x \\ q & y \end{bmatrix}\right) = -(-py + qx) = -1, \\ \text{te još } x > y, \; p - x \geq q - y, \;\; \operatorname{nzd}(x,y) = 1, \;\; \operatorname{nzd}(p-x, q-y) = 1. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Iz $x > y > 0$ i $\operatorname{nzd}(x,y) = 1$ slijedi da je $\pm(x,y)$ vrh iz prvog kvadranta od $\mathcal{G}$, a iz $p - x \geq q - y > 0$ i $\operatorname{nzd}(p-x, q-y) = 1$ slijedi da je $\pm(p-x, q-y)$ vrh iz prvog kvadranta od $\mathcal{G}$. Po pretpostavci indukcije $(*)$ izlazi da su $\pm(x,y)$ i $\pm(p-x, q-y)$ i vrhovi iz $\mathcal{K}$, a po konstrukciji od $\mathcal{K}$, kako je $\pm(p,q)$ dobiven zbrajanjem predstavnika (x,y) od $\pm(x,y)$ i $(p-x, q-y)$ od $\pm(p-x, q-y)$, slijedi da je i $\pm(p,q)$ vrh u $\mathcal{K}$.

Osim toga, za brid $\{\pm(x,y), \pm(p-x, q-y)\}$ za koji znamo da je iz $\mathcal{G}$ jer je $\det\left(\begin{bmatrix} x & p-x \\ y & q-y \end{bmatrix}\right) = qx - py = 1$, po pretpostavci indukcije $(**)$ vrijedi da je on sadržan i u $\mathcal{E}(\mathcal{K})$, pa stoga konstrukcija od $\mathcal{K}$ daje da su i bridovi $\{\pm(p,q), \pm(x,y)\}$ i $\{\pm(p,q), \pm(p-x, q-y)\}$, koji su u $\mathcal{E}(\mathcal{G})$, ujedno sadržani i u $\mathcal{E}(\mathcal{K})$.

Na kraju primijetimo da, ako je $\{\pm(p,q), \pm(r,s)\}$ proizvoljni brid iz prvog kvadranta od $\mathcal{G}$ sa svojstvom $p > r$ (i svojstvom $r \geq s \geq 0$), tada mora vrijediti $\det\left(\begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}\right) = ps - qr \in \{-1, 1\}$, tj., $ps - qr = -1$ ili $ps - qr = 1$. No iz (3.3) znamo da postoje jedinstveni prirodni brojevi x i y takvi da vrijedi $p > x > 0$,

$q > y > 0$, $p(-y) + qx = 1$, za koje još vrijedi i $x > y$, $p - x \geq q - y$, $\mathrm{nzd}(x, y) = 1$, te $\mathrm{nzd}(p - x, q - y) = 1$. Ako je $ps - qr = -1$, dakle $p(-s) + qr = 1$, onda mora biti $(r, s) = (x, y)$. Ako je $ps - qr = 1$, onda mora biti $(r, s) = (p - x, q - y)$ (napomena 3.4). U oba slučaja već znamo da je brid $\{\pm(p, q), \pm(r, s)\}$ iz $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ ujedno sadržan i u $\mathcal{E}(\mathcal{K})$. To dovršava dokaz. ∎

Korolar 3.13. *Opisanom konstrukcijom dobije se cijeli Fareyev graf $\mathcal{G}$.*

Napomena 3.14. Uočite da smo u dokazu teorema 3.12 pokazali: ako je $\pm(p, q)$ proizvoljan vrh iz $\mathcal{G}$ takav da je $p > q \geq 1$, tada postoje susjedni vrhovi $\pm(x, y)$ i $\pm(p - x, q - y)$ iz $\mathcal{G}$ takvi da se vrh $\pm(p, q)$ dobije kao zbroj njihovih odgovarajućih predstavnika.

Zadatak 3.15. Neka je $\mathcal{G}$ Fareyev graf, a $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ skup njegovih vrhova. Definirajmo preslikavanje $\boldsymbol{.} : \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \times \mathcal{V}(\mathcal{G}) \to \mathcal{V}(\mathcal{G})$ formulom

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \boldsymbol{.}(\pm(p, q)) := \pm(ap + bq, cp + dq),$$

što također možemo zapisati kao

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \boldsymbol{.}(\pm(p, q)) := \pm\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}\right),$$

pri čemu vektori $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} ap + bq \\ cp + dq \end{bmatrix}$ zamjenjuju (p, q) i $(ap + bq, cp + dq) \in \mathbb{Z}^2$. Pokažite da je ovo preslikavanje jedno djelovanje grupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ na Fareyev graf $\mathcal{G}$.

Uputa: Po zadatku 3.7, Fareyev graf $\mathcal{G}$ je jednostavan graf pa je dovoljno provjeriti svojstva iz definicije 2.12. Prvo pokažite da preslikavanje $\boldsymbol{.}$ zaista ima $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ za kodomenu, tj., da vrijedi da je $(ap + bq, cp + dq) \in \mathbb{Z}^2$ primitivan element. Zatim pokažite da $\boldsymbol{.}$ zadovoljava oba svojstva djelovanja grupe, tj., da je $I.(\pm(p, q)) = \pm(p, q)$, te da za proizvoljne $A, B \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ vrijedi $A\boldsymbol{.}(B\boldsymbol{.}(\pm(p, q))) = (AB)\boldsymbol{.}(\pm(p, q))$. Za kraj pokažite da djelovanje $\boldsymbol{.}$ čuva susjednost vrhova Fareyevog grafa.

Zadatak 3.16. Neka je $\boldsymbol{.}$ djelovanje grupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ na Fareyev graf zadano u zadatku 3.15. Pokažite da za svaki vrh $\pm(p, q)$ Fareyevog grafa $\mathcal{G}$ postoji matrica $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ takva da je

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \boldsymbol{.}(\pm(p, q)) = \pm(1, 0).$$

Uputa: Korištenjem jednadžbe u zadatku i Bezoutove leme 3.1 odredite vrijednosti za a, b, c, d u ovisnosti o p, q.

4 Fareyev kompleks i Fareyovo stablo

Sada ćemo korištenjem Fareyevog grafa uvesti pojam Fareyevog kompleksa, na osnovi kojeg ćemo konstruirati još jedan graf, takozvano *Fareyevo stablo*. Sljedeća definicija je iz [1].

Definicija 4.1. **Fareyev kompleks** $\mathcal{G}_T$ je Fareyev graf $\mathcal{G}$ zajedno sa skupom

$$T = \{\{v_1, v_2, v_3\} \mid v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{V}(\mathcal{G}), \{v_i, v_j\} \in \mathcal{E}(\mathcal{G}), \text{ za svaki } i \neq j\}.$$

Skupove $t = \{v_1, v_2, v_3\}$ zovemo **trokutima** pa je skup T **skup trokuta** Fareyevog kompleksa $\mathcal{G}_T$. Ako je $t \in T$ proizvoljan trokut, tada za svaki par $u, v \in t$, $u \neq v$, brid $\{u, v\} \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$ zovemo **stranicom** trokuta t .

Zadatak 4.2. Neka je $\centerdot$ djelovanje grupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ na Fareyev graf zadano u zadatku 3.15. Definirajmo preslikavanje $\centerdot : \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \times T \to T$ formulom

$$A \centerdot \{v_1, v_2, v_3\} = \{A \centerdot v_1, A \centerdot v_2, A \centerdot v_3\},$$

za $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ i $\{v_1, v_2, v_3\} \in T$. Pokažite da ovako zadano preslikavanje $\centerdot$ daje jedno djelovanje grupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ na skup trokuta T Fareyevog kompleksa $\mathcal{G}_T$.

Uputa: Prvo primijetite da je kodomena ovog preslikavanja zaista T, tj., ako su $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ i $\{v_1, v_2, v_3\} \in T$ proizvoljni, kako su $v_i, v_j \in \{v_1, v_2, v_3\}$ susjedni vrhovi za sve $i \neq j$, slijedi da su $A \centerdot v_i$ i $A \centerdot v_j$ također susjedni vrhovi. Zatim pokažite da $\centerdot$ zadovoljava oba svojstva djelovanja grupe na skup T, tj., da je $I \centerdot \{v_1, v_2, v_3\} = \{v_1, v_2, v_3\}$, za svaki $\{v_1, v_2, v_3\} \in T$, te da za proizvoljne $A, B \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ vrijedi $A \centerdot (B \centerdot \{v_1, v_2, v_3\}) = (AB) \centerdot \{v_1, v_2, v_3\}$, za sve $\{v_1, v_2, v_3\} \in T$.

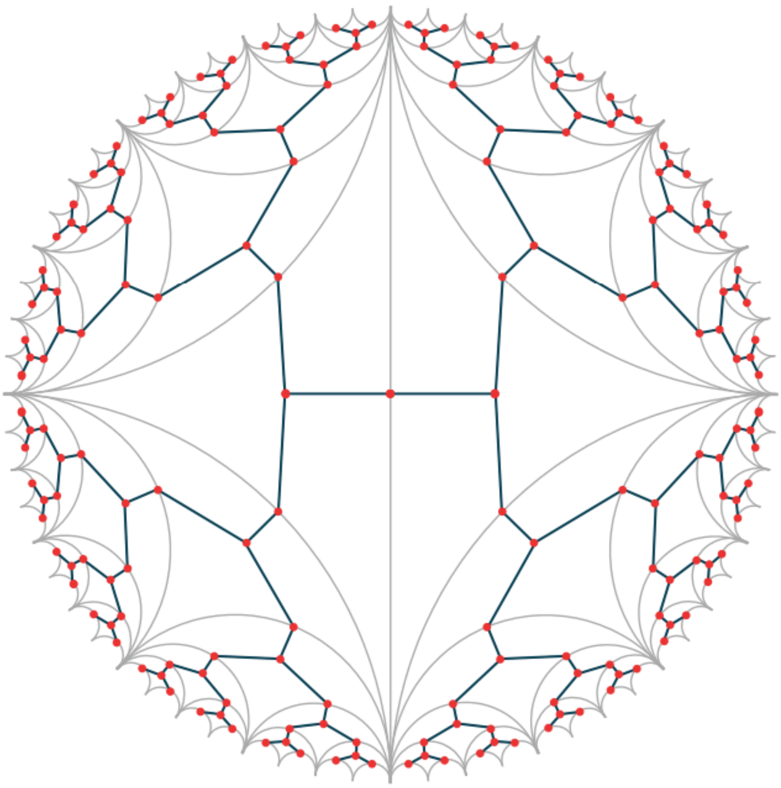
Definicija 4.3. Neka je $\mathcal{G}$ Fareyev graf te neka je $\mathcal{G}_T$ Fareyev kompleks sa skupom trokuta T. **Fareyevo stablo** $\mathcal{T}$ je graf sa skupom vrhova

$$\mathcal{V}(\mathcal{T}) := \mathcal{E}(\mathcal{G}) \cup T$$

i skupom bridova

$$\mathcal{E}(\mathcal{T}) := \{ \ \{\{u, v\}, t\} \mid \{u, v\} \in \mathcal{E}(\mathcal{G}), t \in T, u, v \in t\}.$$

Tek trebamo pokazati da je ovako zadan graf $\mathcal{T}$ zaista *stablo*, ali prije ovog dokaza opišimo konstrukciju za $\mathcal{T}$ te nacrtajmo sliku za nju. Na slici 3 prikazano je početnih pet koraka konstrukcije Fareyevog stabla $\mathcal{T}$, koji su nacrtani direktno na početnih pet koraka konstrukcije Fareyevog kompleksa $\mathcal{G}_T$.



Slika 3: Prvih pet koraka konstrukcije Fareyevog stabla $\mathcal{T}$ (iz [1]).

Opišimo početak ove konstrukcije. Nultom koraku konstrukcije Fareyevog grafa $\mathcal{G}$ (pa tako i Fareyevog kompleksa $\mathcal{G}_T$), to jest bridu $\{\pm(1,0), \pm(0,1)\}$, odgovara jedan vrh, kojeg na slici smjestimo u polovište ovog brida. U prvom koraku konstrukcije Fareyevog kompleksa $\mathcal{G}_T$ imamo dva trokuta, $t_1 = \{\pm(1,0), \pm(-1,1), \pm(0,1)\}$ i $t_2 = \{\pm(1,0), \pm(1,1), \pm(0,1)\}$, od kojih nam svaki daje po dva nova brida Fareyevog grafa. Smjestimo po jedan vrh za graf $\mathcal{T}$ u težista trokuta t_1 i t_2, te po jedan vrh u polovište svakog od 4 dodana brida Fareyevog grafa, pa ove vrhove zatim povežemo bridovima kao u receptu iz definicije 4.3: od trokuta t_1 dobivamo bridove $\{\{\pm(1,0), \pm(-1,1)\}, t_1\}$, $\{\{\pm(0,1), \pm(-1,1))\}, t_1\}$ i $\{\{\pm(1,0), \pm(0,1)\}, t_1\}$ grafa $\mathcal{T}$, te analogno dobivamo 3 brida koji koriste t_2, čime dovršimo prvi korak konstrukcije grafa $\mathcal{T}$. Konstrukcija se analogno nastavlja u beskonačnost, na trokutima i njihovim stranicama iz svakog koraka konstrukcije Fareyevog kompleksa. Sada pokažimo da je ovako opisan graf $\mathcal{T}$ zaista stablo:

Teorem 4.4. *Graf $\mathcal{T}$ iz definicije 4.3 je stablo.*

Dokaz. Pokažimo da postoji jedinstveni put od vrha $e := \{\pm(1,0), \pm(0,1)\} \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$ do proizvoljnog vrha $v \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$ u grafu $\mathcal{T}$ iz definicije 4.3, uz pretpostavku da je $v \neq e$. Uzimajući da je vrh e ishodište dvodimenzionalnog koordinatnog sustava, možemo podijeliti kompleks $\mathcal{G}_T$ i graf $\mathcal{T}$ na četiri kvadranta, koje si lako možemo predočiti na slici 3. Neka je sada $v \neq e$ proizvoljan vrh grafa $\mathcal{T}$ sadržan u gornjem desnom kvadrantu od $\mathcal{T}$ (tj., u prvom kvadrantu koordinatnog sustava) i pretpostavimo da je vrh v dobiven n-tim korakom konstrukcije Fareyevog grafa $\mathcal{G}$. Pokažimo da postoji jedinstveni (e, v)-put u $\mathcal{T}$.

Nultim i prvim korakom konstrukcije Fareyevog kompleksa $\mathcal{G}_T$ u gornjem desnom kvadrantu od $\mathcal{T}$ dobijemo vrhove e, $\{\pm(1,0), \pm(1,1)\} \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$ i $\{\pm(1,0), \pm(1,1), \pm(0,1)\} \in T$. Ako je $v = \{\pm(1,0), \pm(1,1), \pm(0,1)\}$, krećemo se iz vrha e u vrh $\{\pm(1,0), \pm(1,1), \pm(0,1)\}$ i tako dobivamo traženi jedinstveni (e, v)-put. Ako je $v = \{\pm(1,0), \pm(1,1)\}$, krećemo se iz vrha e u vrh

$\{\pm(1,0),\pm(1,1),\pm(0,1)\}$ pa zatim iz vrha $\{\pm(1,0),\pm(1,1),\pm(0,1)\}$ u vrh $\{\pm(1,0),\pm(1,1)\}$ i tako dobivamo traženi jedinstveni (e,v)-put. Ako v nije jednak ni jednom od dva navedena vrha iz prvog koraka nastanka $\mathcal{T}$, nastavljamo proces kako slijedi.

Drugim korakom konstrukcije Fareyevog kompleksa $\mathcal{G}_T$ u gornjem desnom kvadrantu od $\mathcal{T}$ dobijemo vrhove $\{\pm(1,0),\pm(2,1)\}$, $\{\pm(2,1),\pm(1,1)\}\in\mathcal{E}(\mathcal{G})$ i $\{\pm(1,0),\pm(2,1),\pm(1,1)\}\in T$ grafa $\mathcal{T}$. Ako je $v=\{\pm(1,0),\pm(2,1),\pm(1,1)\}$, pomaknemo se iz vrha $\{\pm(1,0),\pm(1,1)\}$ u vrh $\{\pm(1,0),\pm(2,1),\pm(1,1)\}$ i onda smo gotovi. Ako je $v=\{\pm(1,0),\pm(2,1)\}$ ili $v=\{\pm(2,1),\pm(1,1)\}$, onda se iz vrha $\{\pm(1,0),\pm(2,1),\pm(1,1)\}$ pomaknemo u vrh $\{\pm(1,0),\pm(2,1)\}$ ili u vrh $\{\pm(2,1),\pm(1,1)\}$ i gotovi smo. Ako v nije jednak niti jednom od ta dva vrha, onda ako se v nalazi u djelu grafa $\mathcal{T}$ između vrhova $\pm(1,0)$ i $\pm(2,1)$ Fareyevog grafa $\mathcal{G}$, pomaknemo se iz vrha $\{\pm(1,0),\pm(2,1),\pm(1,1)\}$ u vrh $\{\pm(1,0),\pm(2,1)\}$ grafa $\mathcal{T}$, a ako se vrh v nalazi u djelu grafa $\mathcal{T}$ između vrhova $\pm(2,1)$ i $\pm(1,1)$ Fareyevog grafa $\mathcal{G}$, pomaknemo se iz vrha $\{\pm(1,0),\pm(2,1),\pm(1,1)\}$ u vrh $\{\pm(2,1),\pm(1,1)\}$ grafa $\mathcal{T}$. Na ovaj način nastavimo konstrukciju puta od vrha e do vrha v grafa $\mathcal{T}$ i nakon n-tog koraka konstrukcije Fareyevog grafa $\mathcal{G}$ ćemo doći do vrha v. Analogan postupak vrijedi za proizvoljan vrh grafa $\mathcal{T}$ koji se nalazi u jednom od preostala tri kvadranta. Dakle, pokazali smo da za proizvoljni vrh $v\neq e$ grafa $\mathcal{T}$ postoji jedinstveni (e,v)-put u $\mathcal{T}$.
Iz leme 2.7 slijedi da je $\mathcal{T}$ stablo. ■

Opišimo sada primjer djelovanja grupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ na Fareyevo stablo.

Primjer 4.5. Neka je $\mathcal{G}$ Fareyev graf, $\mathcal{G}_T$ Fareyev kompleks te neka je $\mathcal{T}$ Fareyevo stablo. Tvrdimo da preslikavanje
$\mathbf{.} : \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \times \mathcal{V}(\mathcal{T}) \to \mathcal{V}(\mathcal{T})$ definirano na $\mathcal{V}(\mathcal{T}) = \mathcal{E}(\mathcal{G}) \cup T$ s

$$A.\{u,v\} = \{A.u, A.v\}, \forall A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}), \forall \{u,v\} \in \mathcal{E}(\mathcal{G}), \ \ i$$

$$A.\{v_1,v_2,v_3\} = \{A.v_1, A.v_2, A.v_3\}, \ \forall A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}), \forall \{v_1,v_2,v_3\} \in T,$$

zadaje jedno djelovanje grupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ na Fareyevo stablo $\mathcal{T}$ (djelovanje grupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ na Fareyevo stablo $\mathcal{T}$ označavamo isto kao i djelovanje grupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ na Fareyev graf $\mathcal{G}$ i na skup T).

Budući da je stablo jednostavan graf, dovoljno je provjeriti svojstva iz definicije 2.12.

Prvo provjerimo da ovako definirano preslikavanje $\mathbf{.}$ zaista vrhove od $\mathcal{T}$ šalje u vrhove od $\mathcal{T}$. Za proizvoljan vrh $\{u,v\} \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$ Fareyevog stabla $\mathcal{T}$ slijedi da je $A.\{u,v\}$ vrh Fareyevog stabla $\mathcal{T}$, za sve $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, jer iz zadatka 3.15 znamo da $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ djeluje na Fareyev graf $\mathcal{G}$, pa posebno djeluje na bridove $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ Fareyevog grafa $\mathcal{G}$, odnosno svaki brid se preslikava u brid. Za proizvoljan vrh $t \in T$ Fareyevog stabla $\mathcal{T}$ slijedi da je $A.t$ vrh Fareyevog stabla $\mathcal{T}$, jer iz zadatka 4 znamo da $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ djeluje na skup trokuta T Fareyevog kompleksa $\mathcal{G}_T$, odnosno svaki trokut se preslikava u trokut.

Također, svojstva djelovanja grupe (1) i (2) iz definicije 2.9 su zadovoljena jer znamo da $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ djeluje na Fareyev graf $\mathcal{G}$ i na skup trokuta T Fareyevog kompleksa $\mathcal{G}_T$.

Preostaje pokazati da preslikavanje $\mathbf{.}$ čuva susjednost vrhova Fareyevog stabla $\mathcal{T}$. Ako su $\{u,w\} \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$ i $\{v_1,v_2,v_3\} \in T$ susjedni vrhovi Fareyevog stabla $\mathcal{T}$, slijedi da je $\{u,w\}$ stranica trokuta $\{v_1,v_2,v_3\}$, tj., $u, w \in \{v_1,v_2,v_3\}$. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $v_1 = u$ i $v_2 = w$. Sada, za proizvoljnu matricu $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, imamo da je

$$A.\{u,w,v_3\} = \{A.u, A.w, A.v_3\} \ni A.u, A.w,$$

tj., $A.\{u,w\} = \{A.u, A.w\}$ je stranica trokuta $A.\{u,w,v_3\}$, iz čega slijedi da su $A.\{u,w\}$ i $A.\{v_1,v_2,v_3\}$ susjedni vrhovi Fareyevog stabla $\mathcal{T}$.

Dakle, grupa $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ djeluje na graf $\mathcal{T}$.

5 Veza Fareyevog grafa s Fareyevim nizom brojeva

U ovom ćemo odjeljku uvesti takozvani *Fareyev niz brojeva* te vrlo ukratko pokazati njegovu vezu s Fareyevim grafom. Za detalje o povijesti uvođenja Fareyevog niza preporučamo članak [5]. Spomenimo samo da je John Farey, Sr. 1816. godine u znanstvenom časopisu *Philosophical Magazine* objavio prilog pod naslovom " On a curious property of vulgar fractions", gdje je primijetio svojstvo određenih nizova racionalnih brojeva koje ćemo u nastavku teksta opisati.

Definicija 5.1. Za $n \in \mathbb{N}$, uzmimo sve racionalne brojeve $\frac{p}{q}$ za koje, uz $p, q \in \mathbb{Z}$ i $q \neq 0$, vrijedi još i $0 \leq p \leq q \leq n$ i $\mathrm{nzd}(p,q) = 1$. **Fareyev niz** reda n, u oznaci F_n, je konačan niz ovih brojeva poredanih po veličini.

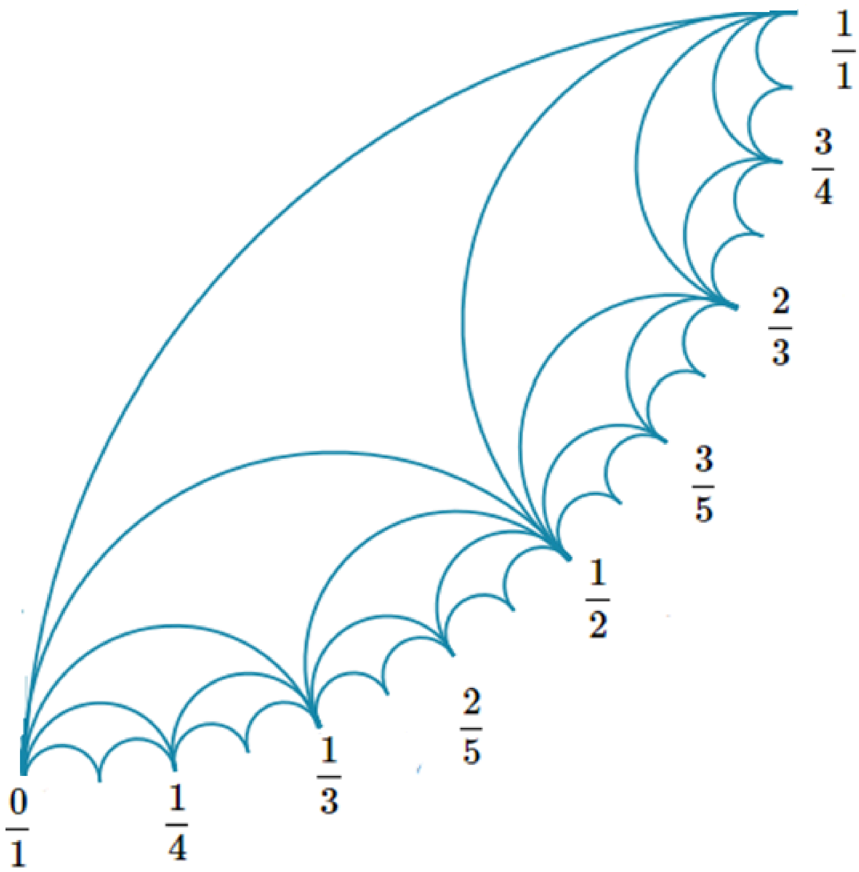
Pišemo ([3]): $F_1 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\}$, $F_2 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\}$, $F_3 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\}$, $F_4 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\}$ itd.

Dokaz za sljedeću lemu, koja opisuje jedno svojstvo Fareyevog niza, može se naći u [5] ili [4]:

Lema 5.2. *Neka su* $\frac{a}{b}, \frac{p}{q}, \frac{c}{d} \in F_n$ *tri uzastopna člana Fareyevog niza* F_n*. Tada vrijedi* $\frac{p}{q} = \frac{a+c}{b+d}$.

Ovu vrstu " zbrajanja" dvaju razlomaka zovemo **Fareyevo zbrajanje**.

Pokažimo sada vezu između Fareyevog niza i Fareyevog grafa. Fokusirajmo se samo na donji desni kvadrant Fareyevog grafa i zamijenimo sve vrhove $\pm(m, n)$ tog kvadranta s razlomcima $\frac{m}{n}$. Svi razlomci $\frac{m}{n}$ dobiveni ovom zamjenom su potpuno skraćeni, jer su svi (m, n) primitivni elementi iz $\mathbb{Z}^2$.



Slika 4: Donji desni kvadrant Fareyevog grafa nakon petog koraka.

Prvim korakom konstrukcije Fareyevog grafa u donjem desnom kvadrantu dobijemo vrhove $\frac{0}{1}$ i $\frac{1}{1}$, tj., dobijemo Fareyev niz $F_1 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\}$. Fareyevim zbrajanjem vrhova $\frac{0}{1}$ i $\frac{1}{1}$ dobijemo razlomak $\frac{1}{2}$ koji odgovara vrhu $\pm(1, 2)$ dobivenom zbrajanjem odgovarajućih predstavnika klasa $\pm(0, 1)$ i $\pm(1, 1)$, tj., drugim korakom konstrukcije Fareyevog grafa dobijemo Fareyev niz $F_2 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\}$ (u donjem desnom kvadrantu Fareyevog grafa). Fareyevim zbrajanjem vrhova $\frac{0}{1}$ i $\frac{1}{2}$, te vrhova $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{1}$, dobijemo razlomke $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$ koji odgovaraju vrhovima $\pm(1, 3)$ i $\pm(2, 3)$ dobivenim zbrajanjem odgovarajućih predstavnika klasa $\pm(0, 1)$ i $\pm(1, 2)$, te $\pm(1, 2)$ i $\pm(1, 1)$, tj., trećim korakom konstrukcije Fareyevog grafa dobijemo Fareyev niz $F_3 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\}$. Fareyevim zbrajanjem vrhova $\frac{0}{1}$ i

$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{3}$, te $\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{1}$ dobijemo razlomke $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ i $\frac{3}{4}$ koji odgovaraju vrhovima $\pm(1,4)$, $\pm(2,5)$, $\pm(3,5)$ i $\pm(3,4)$ dobivenim zbrajanjem odgovarajućih predstavnika klasa $\pm(0,1)$ i $\pm(1,3)$, $\pm(1,3)$ i $\pm(1,2)$, $\pm(1,2)$ i $\pm(2,3)$, te $\pm(2,3)$ i $\pm(1,1)$, tj., četvrtim korakom konstrukcije Fareyevog grafa dobijemo niz razlomaka $\{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\}$, koji sadrži cijeli Fareyev niz $F_4 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\}$. Zatim petim korakom konstrukcije Fareyevog grafa dobijemo niz razlomaka $\{\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\}$ koji sadrži cijeli Fareyev niz $F_5 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\}$. Nastavljajući ovako dalje, imamo da n-tim korakom konstrukcije Fareyevog grafa dobijemo konačni niz razlomaka poredanih po veličini, koji sadrži cijeli Fareyev niz F_n u donjem desnom kvadrantu Fareyevog grafa.

Naglasimo ovdje da se Fareyevi nizovi mogu prikazati geometrijski pomoću niza tangentnih *Fordovih kružnica* ([6] ili [4]). Na ovom se prikazu uvedu kružni lukovi koji povezuju odgovarajuće brojeve, te se takav prikaz veza između elemenata Fareyevog niza još naziva *Fareyevim dijagramom* ([4]). Spomenimo još da se u teoriji brojeva koristi tzv. *Stern-Brocotovo stablo* za prikazivanje pozitivnih racionalnih brojeva ([7]), te se lijevo podstablo Stern-Brocotovog stabla često također naziva Fareyevim stablom.

Zahvala: Autori zahvaljuju anonimnom recenzentu na pažljivom čitanju rada i vrlo korisnim savjetima za njegovo poboljšanje.

Bibliografija

[1] Matt Clay and Dan Margalit (editors), *Office Hours with a Geometric Group Theorist*, Princeton University Press, New Jersey, 2017.

[2] Dean Crnković, *Diskretna matematika*, Fakultet za matematiku Sveučilišta u Rijeci. 2017./2018.

[3] Andrej Dujella, *Teorija brojeva*, Školska knjiga, Zagreb, 2019.

[4] Allen Hatcher, *Topology of numbers*, AMS 2022.

[5] Radomir Lončarević, *Fareyev niz*, Matematika i škola 95, 2018.

[6] Radomir Lončarević, *Geometrijski prikaz Fareyeva niza*, Matematika i škola 99, 2019.

[7] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth and Oren Patashnik, *Concrete mathematics*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1990.

[8] Darko Veljan, *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

---

[1] Naši su grafovi *neusmjereni*.
[2] Adolf Hurwitz, 1859.-1919., njemački matematičar
[3] John Farey, Sr., 1766.-1826., engleski geolog s interesom u mnogim znanostima, uključujući matematiku

ISSN 1334-6083