math.e

Hrvatski matematički elektronički časopis

Neke primjene određenog integrala u fizici

Jelena Jankov Pavlović
docent na Fakultetu primijenjene matematike i informatike, Sveucilište u Osijeku,
e-mail: jjankov@mathos.hr

Lara Tompa
student na Tehničkom sveucilištu u Münchenu, Odjel matematike i informatike, smjer Mathematics in Science and Engineering,
e-mail: lara.tompa7@gmail.com

1 Riječ-dvije o integralnom računu

Problemi računanja površine nekog područja stari su više od 4000 godina. Odgovor na taj problem daje integralni račun. Integral je jedan od ključnih pojmova matematike čiju su ideju računanja prvi oblikovali Isaac Newton i Dottfried Wilhelm Leibniz, dok je prvu strogu definiciju određenog integrala dao Bernhard Riemann. Danas se tehnike integriranja primjenjuju u prirodnim znanostima, inženjerstvu, ekonomiji te brojnim drugim područjima. U fizici, određeni integrali omogućuju precizno računanje kompleksnih pojmova, počevši od klasične mehanike do elektromagnetizma i kvantne mehanike.

Cilj ovog rada je objasniti određeni integral te čitatelju približiti taj apstraktan matematički pojam preko opipljivog svijeta fizike. Poznavanje primjena integralnog računa u fizici uvelike pomaže razumjeti matematičke tehnike, kao i koncepte fizike, što pokazuje povezanost matematike i fizike.

2 Riemannov integral ograničene funkcije na segmentu

Računati površinu jednostavnih geometrijskih likova poput pravokutnika, trokuta ili kruga naučili smo još u osnovnoj školi. Postavlja se pitanje kako računati površinu nekog općenitog lika u ravnini? Motivirani ovim pitanjem uvodimo pojam Riemannovog[1] integrala funkcije i povezujemo ga s površinom "ispod njezinog grafa". Odmah ćemo promatrati ograničene funkcije na segmentu, jer ćemo se takvima najčešće baviti u problemima iz primjene.

Neka je $[a,b]$ segment realnih brojeva i $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ ograničena funkcija. Stoga, postoje realni brojevi

$$m=\inf_{x\in[a,b]} f(x) \text{ i } M=\sup_{x\in[a,b]} f(x),$$

tj. infimum i supremum funkcije f. Uočimo, ako je $[a_1, b_1] \subseteq [a, b]$ tada je i restrikcija od f na $[a_1, b_1]$ ograničena funkcija i iz

$$m \leq f(x) \leq M, \; x \in [a, b]$$

slijedi

$$m \leq m_1 \leq f(x) \leq M_1 \leq M, \; x \in [a_1, b_1], \qquad (1)$$

gdje su $m_1 = \inf\limits_{x \in [a_1, b_1]} f(x)$ i $M_1 = \sup\limits_{x \in [a_1, b_1]} f(x)$.

Za prirodni broj n, segment $[a, b]$ podijelimo na n dijelova tako da je

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Tada konačan skup točaka $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ nazivamo **subdivizijom** ili **particijom** segmenta $[a, b]$. Za subdiviziju P^* kažemo da je **profinjenje** subdivizije P ako je $P^* \subseteq P$.

Definicija 1. Neka je $[a, b] \subseteq \mathbf{R}$ i $n \in \mathbf{N}$. Za subdiviziju $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ definiranu s

$$x_i := a + ih, h =: \frac{b-a}{n}, \quad i \in \{0, 1, \ldots, n\},$$

kažemo da je **ekvidistantna**.

Neka je

$$M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \; m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, 1 \leq k \leq n,$$

te $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ proizvoljna točka. Definiramo Darbouxove[2] i integralnu sumu:

$$s(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) \text{ je donja Darbouxova suma,}$$

$$\sigma(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}) \text{ je integralna suma, te}$$

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) \text{ gornja Darbouxova suma.}$$

Očito vrijedi:

$$m(b-a) \leq s(f, P) \leq \sigma(f, P) \leq S(f, P) \leq M(b-a). \qquad (2)$$

Neka je dan segment $[a, b]$ te $\mathcal{P}$ skup svih subdivizija na njemu. Nadalje, neka je $\mathcal{A} = \{s(f, P) : P \in \mathcal{P}\}, \; \mathcal{B} = \{S(f, P) : P \in \mathcal{P}\}, \text{te } \mathcal{C} = \{\sigma(f, P) : P \in \mathcal{P}\}$. Zbog (2) ti skupovi su ograničeni pa postoje

$$\mathcal{I}_*(f; a, b) = \sup \mathcal{A} \text{ i } \mathcal{I}^*(f; a, b) = \inf \mathcal{B}.$$

Definicija 2. Broj $\mathcal{I}_*$ naziva se **donji Riemannov integral** funkcije f na $[a, b]$, a broj $\mathcal{I}^*$ **gornji Riemannov integral** funkcije f na $[a, b]$.

Iz pokazanog je jasno da svaka ograničena funkcija f na segmentu $[a, b]$ ima gornji i donji Riemannov integral.

Definicija 3. Za funkciju $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ograničenu na $[a, b]$ kažemo da je **R-integrabilna** ili **integrabilna u Riemannovom smislu** ako je

$$\mathcal{I}_*(f; a, b) = \mathcal{I}^*(f; a, b).$$

Tada se broj $\mathcal{I} = \mathcal{I}_* = \mathcal{I}^*$ naziva **integral** ili R-integral funkcije f na segmentu $[a, b]$.

Vratimo se sada na problem površine s početka. Neka je $T = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : 0 \leq y \leq g(x), x \in [a, b]\}$ pseudotrapez ispod grafa funkcije $g : [a, b] \to \mathbf{R}^+$. Sada **površinu pseudotrapeza** definiramo s

$$\int_a^b g(x)dx$$

za integrabilnu funkciju g.

3 Primjene integralnog računa u fizici

Sada kada smo se malo bolje upoznali s integralnim računom ostaje vidjeti što sve, između ostalog, u području fizike možemo računati preko integrala.

3.1 Računanje duljine puta

Promotrimo za početak tijelo koje se giba jednoliko pravocrtno. Ako se tijelo giba brzinom v, put koje je ono prešlo do trenutka t definira se kao: $s := vt$. Sada uvedimo tijelo koje se giba, ne nužno jednoliko pravocrtno. Na pravac po kojem se giba tijelo uvedimo koordinatni sustav i početak gibanja označimo s 0 te označimo s $v(t)$ brzinu tijela u trenutku t. Želimo odrediti put koji je tijelo prešlo do trenutka t, tj. $s(t)$.
Neka je dana funkcija brzine $v : [0, t] \to \mathbf{R}$ gdje je $t > 0$. Uzmimo subdiviziju

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t, \quad n \in \mathbf{N}$$

segmenta $[0, t]$. Na proizvoljnom podsegmentu $[t_{k-1}, t_k], k < n, k \in \mathbf{N}$, brzinu tijela aproksimiramo s $v(t_k*)$ pri čemu je $t_k* \in [t_{k-1}, t_k]$ proizvoljna točka. Tada se na tom podsegmentu tijelo giba jednoliko pravocrtno pa vrijedi da je $s_k \approx v(t_k*)(t_k - t_{k-1})$, odnosno

$$s \approx \sum_{k=1}^{n} v(t_k*)(t_k - t_{k-1}).$$

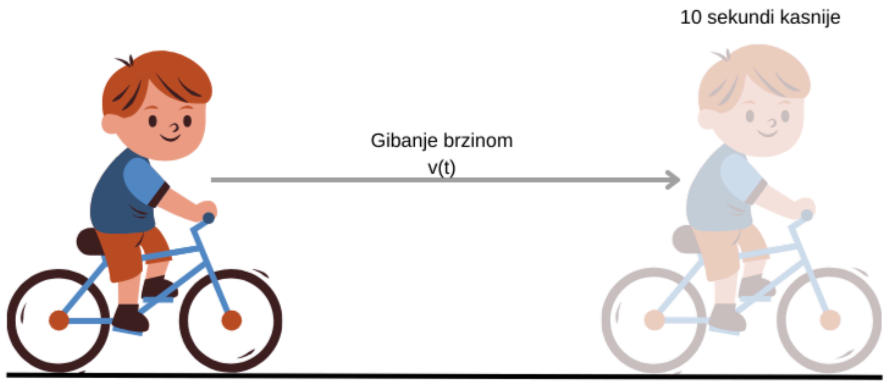
Ova suma je upravo jednaka integralnoj sumi funkcije v pa ima smisla definirati:

$$s(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau.$$

Primjer 1. Biciklist Marko vozi utrku i njegova je brzina dana funkcijom $v(t) = 2t + 1$, $t > 0$, gdje je vrijeme mjereno u sekundama. Koliko je metara prešao Marko za 10 sekundi?
Prema prethodno izvedenoj formuli imamo da je

$$s(10) = \int_0^{10} (2\tau + 1) d\tau = \tau^2 \Big|_0^{10} + \tau \Big|_0^{10} = 110.$$

Marko je za 10 sekundi prešao $110\, m$.



Slika 1: Marko vozi utrku

Napomena 1. Umjesto definiranja prijeđenog puta preko brzine, može se definirati i brzina preko puta. Tada je

$$v(t) = s'(t), \tag{3}$$

za neki trenutak t (vidjeti [1]). Uočimo da je to u skladu s našom definicijom puta preko brzine uz prirodan zahtjev $s(0) = 0\, m$ (tijelo za 0 sekundi prijeđe 0 metara). Integrirajući (3) od 0 do t te primjenom Newton-Leibnitzove formule dobijamo:

$$\begin{aligned} \int_0^t s'(\tau) d\tau &= \int_0^t v(\tau) d\tau \\ s(t) - s(0) &= \int_0^t v(\tau) d\tau \\ s(t) &= \int_0^t v(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Napomena 2. Akceleracija čestice definira se kao promjena brzine u vremenu, tj.

$$a(t) = v'(t).$$

Tada primjenom Newton-Leibnitzove formule i integriranjem obje strane dobivamo:

$$v(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau + v(0),$$

tj. ako nam je poznata početna brzina možemo izračunati brzinu u proizvoljnom trenutku kao integral akceleracije.

3.2 Rad sile

Ako za početak pretpostavimo da na tijelo djeluje konstantna sila F u istome smjeru tada se tijelo pod utjecajem sile F giba jednoliko pravocrtno i prijeđe put s. Tada se *rad* sile F definira kao $W := F \cdot s$. No, iz iskustva znamo da sila ne mora uvijek biti konstantna. Primjerice, zamislite da idete na autobusni kolodvor i vučete veliki kofer - sigurno ćete na početku vašeg puta imati više energije, odnosno sila koju primjenjujete bit će veća!

Dakle, sila može biti zadana funkcijom $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ pri čemu segment $[a, b]$ predstavlja put koje je tijelo prešlo uslijed djelovanja sile f. Da bi smo izračunali rad te sile, napravimo subdiviziju

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad n \in \mathbf{N},$$

segmenta $[a, b]$. Ako promotrimo proizvoljni podsegment $[x_{k-1}, x_k], k < n, k \in \mathbf{N}$, silu na tom segmentu aproksimirat ćemo s $f(x'_k)$ pri čemu je $x'_k \in [x_{k-1}, x_k]$ proizvoljna točka. Tada je sila na tom podsegmentu konstantna, tj. gibanje je jednoliko pravocrtno pa je rad sile na tom podsegmentu

$$W_k \approx f(x'_k)(x_k - x_{k-1}),$$

odnosno na cijelom putu:

$$W \approx \sum_{k=1}^{n} f(x'_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Primijetimo da je gornji izraz zapravo integralna suma funkcije f na zadanom segmentu $[a, b]$ pa rad sile ima smisla definirati kao integral funkcije f, tj.

$$W := \int_a^b f(x) dx.$$

Promotrimo kako izračunati rad u nekim konkretnim situacijama.

Primjer 2. Ako je poznato da je potrebna sila od $50\,N$ da bi se opruga prirodne duljine $10\,cm$ rastegnula na $20\,cm$, izračunajmo koliko je rada potrebno uložiti da bi se opruga rastegnula s 12 na $15\,cm$.
Prema Hookeovom zakonu iznos sile koju treba uložiti za produljenje opruge jednak je umnošku koeficijenta elastičnosti k i produljenja opruge x. Možemo iskoristiti Hookeov zakon da izračunamo konstantu elastičnosti k te zadane podatke; $x = 10cm = 0.1\,m$ i sila $f = 50\,N$. Iz toga slijedi $k = 500\,N/m$, odnosno sila opruge je dana funkcijom $f(x) = 500x$. Stoga je traženi rad jednak:

$$W = \int_{0.02}^{0.05} 500x dx = 500 \frac{x^2}{2}\Big|_{0.02}^{0.05} = 0.525\,J.$$

Treba napomenuti da je osim samog iznosa sile važno i njezino usmjerenje. Promotrimo sljedeći primjer.

Primjer 3. Dječak uzme igračku koja se sastoji od užeta i loptice na kraju te ju vrti u zraku. Uže na kojem je loptica dugo je $5\,cm$, loptica je teška $0.1\,kg$, a sestra mu je pomogla izmjeriti brzinu vrtnje loptice koja je stalna i iznosi $15\,m/s$. Koliki rad obavi centripetalna sila ako znamo da je loptica napravila 5 krugova?
Centripetalna sila pri stalnoj brzini v iznosi

$$F_c = m\frac{v^2}{r},$$

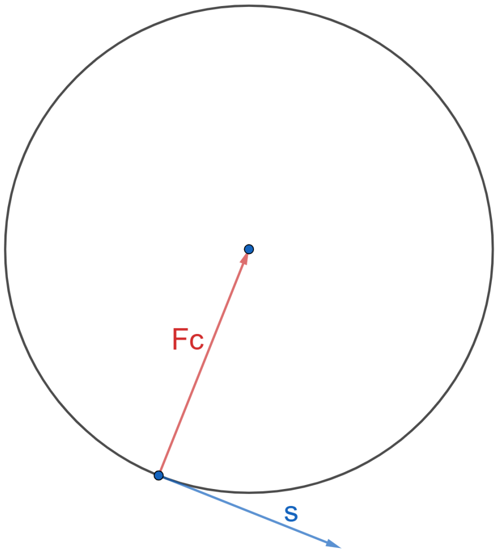
gdje je m masa tijela, a r polumjer kružnice po kojoj se to tijelo giba. U ovom slučaju ona iznosi:

$$F_c = 0.1\frac{15^2}{0.05} = 450\,N.$$

Loptica ukupno prijeđe put od 5 krugova, odnosno 5 puta prijeđe opseg kruga (koji iznosi $2r\pi$) pa ne uzimajući u obzir usmjerenje centripetalne sile dobijemo:

$$W = F_c \cdot s = 450 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 0.05\pi \approx 706,86\ J.$$

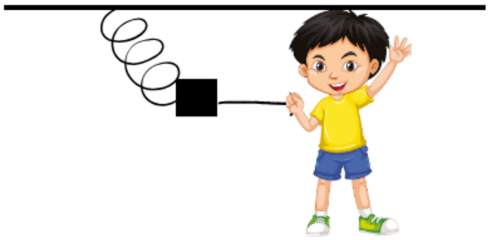
Međutim, rad sile definiran je kao skalarni produkt, a za njega je bitno i usmjerenje vektora za koje ga računamo. Znamo da je centripetalna sila usmjerena prema središtu kružnice po kojoj se tijelo giba (Slika 2), pa je ona okomita na putanju iz čega slijedi $W = F_c \cdot s = 0\,J$, tj. centripetalna sila ne obavlja rad.



Slika 2: Odnos centripetalne sile i putanje u proizvoljnoj točki

Sada kada smo vidjeli važnost usmjerenja sile s obzirom na putanju promotrimo sljedeći primjer.

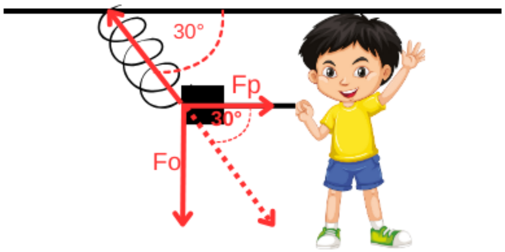
Primjer 4. Dječak vuče lagani blok na opruzi konstante elastičnosti $k = 800\, N/m$ kao na Slici 3. Pri tome je blok postavljen ukoso pod kutom od 30° prema horizontali.



Slika 3: Dječak vuče blok

Izračunajmo rad koji dječak treba obaviti kako bi povukao blok i oprugu za $10\, cm$ ako zanemarujemo masu bloka.

Primijetimo da je ovdje elastična sila usmjerena pod kutom s obzirom na smjer putanje pa je potrebno rastaviti silu na komponente.



Slika 4: Rastav elastične sile

Neka je F_o komponenta okomita na putanju, a F_p komponenta paralelna putanji bloka. Iz trigonometrijskih jednakosti slijedi:

$$F_o = F \sin 30^\circ \quad i \quad F_p = F \cos 30^\circ.$$

U prethodnom smo primjeru vidjeli da je rad sile okomite na putanju jednak 0 pa nam samo preostaje izračunati rad sile F_p. Sada koristeći Hookeov zakon dobivamo ukupan rad:

$$W = \int_0^{0.1} F_p(x)dx = \int_0^{0.1} 800x \cos 30^\circ dx = 800 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0.1} \approx 3.46J.$$

3.3 Masa i težište

Neka je dan tanki[3] ravni štap duljine l, te funkcija $\rho : [0, l] \to \mathbf{R}$ koja predstavlja linijsku gustoću njegove mase. Ukoliko je ona konstantna kažemo da je štap **homogen**, a u suprotnom je **nehomogen**. Tada je masa tog štapa dana s:

$$m = \int_0^l \rho(x)dx.$$

Napomena 3. Umjesto računanja mase cijelog štapa možemo računati masu dijela $[0, x] \subseteq [0, l]$ danog štapa. Tada je:

$$m(x) = \int_0^x \rho(\tau) d\tau.$$

Primjer 5. Na raspolaganju imamo štap duljine $5\,m$, linijske gustoće mase $\rho : [0, 5] \to \mathbf{R}$ zadane s $\rho(x) = x^3 + 2x^2 + 1$. Kolika je težina dijela štapa između pravaca $x = 2$ i $x = 3$?
Kako bi izračunali težinu prvo moramo izračunati masu štapa:

$$m = \int_2^3 (x^3 + 2x^2 + 1) dx = \frac{x^4}{4}\Big|_2^3 + 2\frac{x^3}{3}\Big|_2^3 + x\Big|_2^3 = \frac{359}{12}.$$

Sada je težina jednaka:

$$F = mg \approx 293.5\ N.$$

Pojam momenta i težišta objasnit ćemo na jednostavnom primjeru. Neka je dan sustav koji se sastoji od tanke šipke zanemarive mase i dva utega mase m_1 i m_2 na koordinatama x_1 i x_2. Želimo naći koordinatu točke $\bar{x}$ u kojoj dobijemo *klackalicu u ravnoteži*. Tu točku nazivamo **težište**. Koristeći Arhimedov zakon poluge:

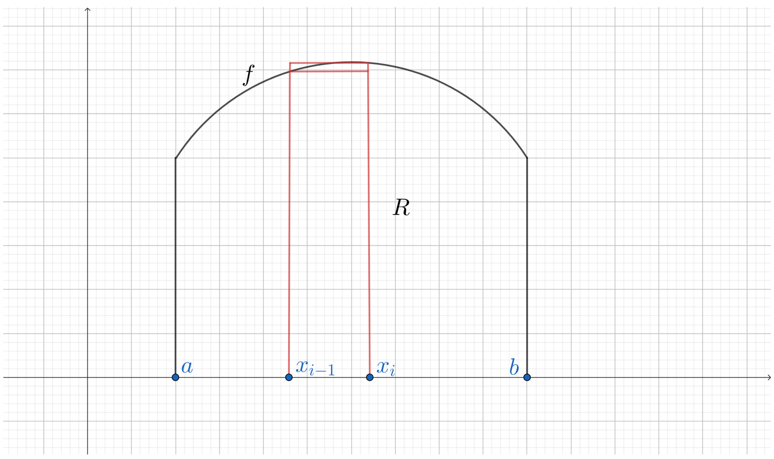
$$m_1(\bar{x} - x_1) = m_2(x_2 - \bar{x}),$$

dobivamo da je:

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

Veličina mx naziva se **moment mase** m koja se nalazi u koordinati x, a $m_1 x_1 + m_2 x_2$ naziva se moment sustava u odnosu na ishodište. Tešište, moment i masu možemo računati i za općenitije slučajeve, što slijedi u nastavku.

Neka je dana tanka, homogena ploča R, konstantne površinske gustoće mase ρ, koja se nalazi ispod grafa funkcije $f : [a, b] \to \mathbf{R}\hat{}\{+\}$ kao na Slici 5.



Slika 5: Homogena ploča R ispod grafa funkcije f

Koristimo *princip simetrije:* ukoliko je homogena ploča R simetrična s obzirom na neki pravac, onda je težište ploče na tom pravcu. Uzmimo ekvidistantnu subdiviziju

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad n \in \mathbf{N}$$

segmenta $[a, b]$ te s $\Delta x := x_k - x_{k-1}, k < n, k \in \mathbf{N}$, označimo širinu svakog segmenta. Neka je nadalje $\bar{x_k} = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$ središte tog segmenta. Tada je po principu simetrije težište k-tog pravokutnika u točki $(\bar{x_k}, \frac{1}{2}f(\bar{x_k}))$ i masa mu jednaka: $m_k = \rho f(\bar{x_k})\Delta x$. Sada moment ploče s obzirom na os x možemo aproksimirati s:

$$M_x \approx \sum_{k=1}^{n} \rho \frac{1}{2} (f(\bar{x_k}))^2 \Delta x,$$

odnosno profinjenjem subdivizije dobivamo

$$M_x := \frac{1}{2}\rho \int_a^b f^2(x)dx.$$

Analogno definiramo moment s obzirom na os y:

$$M_y := \rho \int_a^b x f(x)dx.$$

Primjer 6. Izračunajte moment sustava koji se sastoji od tanke ploče gustoće 2, koja se nalazi ispod grafa funkcije $g : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$ zadane formulom $g(x) = \cos x$, s obzirom na x i y os.
Prema prethodno izvedenim formulama imamo:

$$\begin{aligned} M_y &= 2\int_0^{2\pi} x\cos x dx = \begin{vmatrix} {\scriptstyle u=x} & {\scriptstyle u'=dx} \\ {\scriptstyle v'=\cos x dx} & {\scriptstyle v=\sin x} \end{vmatrix} = x\sin x\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \sin x dx \\ &= -\cos x\Big|_0^{2\pi} = 0, \end{aligned}$$

$$M_x = \frac{1}{2}2\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx = \frac{1}{2}x\Big|_0^{2\pi} + \frac{\sin 2x}{4}\Big|_0^{2\pi} = \pi.$$

Izvedimo sada koordinate težišta homogene ploče R koja se nalazi ispod grafa funkcije f. Momenti sile se ne mijenjaju premještanjem ukupne mase u težište pa slijedi da koordinate težišta $(\bar{x}, \bar{y})$ zadovoljavaju jednakosti

$$m\bar{x} = M_y \text{ i } m\bar{y} = M_x,$$

gdje je

$$m = \rho P = \rho \int_a^b f(x)dx$$

ukupna masa ploče R. Sada lako dobijemo izraze za kooordinate težišta:

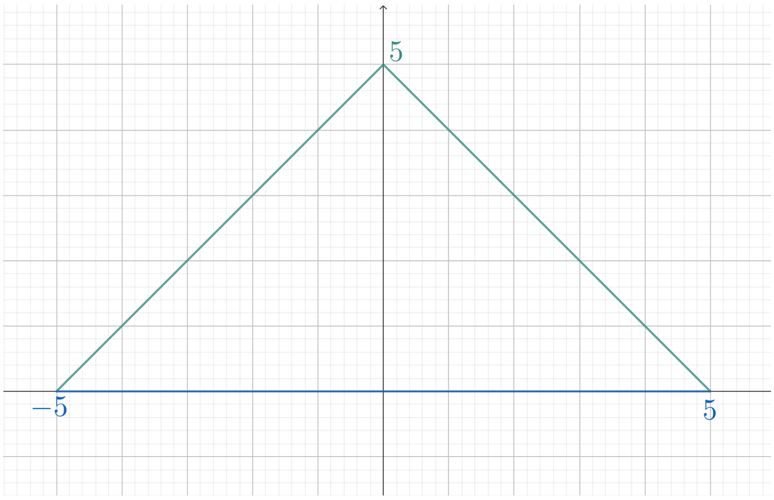
$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int_a^b x f(x)dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}, \quad \bar{y} = \frac{\displaystyle\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}. \qquad (4)$$

Uočimo da koordinate težišta ovise isključivo o funkciji f, tj. o obliku same ploče, a ne o gustoći ρ.

Ako se područje R za koje tražimo težište nalazi između krivulja $y = f(x)$ i $y = g(x)$, gdje je $f(x) \geq g(x)$ za svaki $x \in [a, b]$, može se pokazati da su koordinate težišta $(\bar{x}, \bar{y})$ dane s

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int_a^b x(f(x) - g(x))dx}{\displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))dx}, \quad \bar{y} = \frac{\displaystyle\frac{1}{2}\int_a^b (f^2(x) - g^2(x))dx}{\displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))dx}. \tag{5}$$

Primjer 7. Markov tata odlučio je napraviti kućicu za vrapce. Krov kućice modelirao je funkcijom $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = -|x| + 5$, pod kućice je paralelan podlozi te su bočne strane ispunjene. Gdje Marko mora zakačiti konac na kućici kako bi ona stajala ravno na drvetu?
Budući da kućica mora biti u ravnoteži zaključujemo da Marko treba zakačiti konac u koordinatama težišta.
Pod kućice je paralelan podlozi i zato ćemo uzeti pravac $y = 0$ kao jednu stranu kućice. Zatim, određujemo njegova sjecišta s funkcijom f, što lako vidimo da su $x = -5$ i $x = 5$. Ako promotrimo grafički prikaz ovog područja (Slika 6)



Slika 6: Kućica koju je izgradio Markov tata

vidimo da je simetrično s obzirom na os y, pa je prema principu simetrije $\bar{x} = 0$.
Sada još trebamo izračunati $\bar{y}$:

$$\begin{aligned} P = \int_{-5}^{5} f(x)dx &= \int_{-5}^{0} (x+5)dx + \int_{0}^{5} (-x+5)dx \\ &= \frac{x^2}{2}\bigg|_{-5}^{0} + 5x\bigg|_{-5}^{0} - \frac{x^2}{2}\bigg|_{0}^{5} + 5x\bigg|_{0}^{5} = 10, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-5}^{5} f^2(x)dx &= \int_{-5}^{0} (x+5)^2dx + \int_{0}^{5} (-x+5)^2dx \\ &= \int_{-5}^{0} (x^2 + 10x + 25)dx + \int_{0}^{5} (x^2 - 10x + 25)dx = 50, \end{aligned}$$

te je

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 50}{10} = 2.5.$$

Slijedi da Marko treba okačiti konac na koordinatama $(0, 2.5)$.

4 Zaključak

U ovom radu promatrani su integrali funkcije jedne varijable i njihova primjena u fizici. Nakon uvođenja Riemannovog integrala, proučavane su neke njegove primjene, kao što su računanje duljine puta, rad sile i određivanje koordinata težišta nekog tijela. Nadamo se da će zainteresiranom čitatelju tema biti zanimljiva i korisna, te ga dodatno potaknuti na proučavanje veza između matematike i raznih drugih prirodnih i društvenih znanosti.

Bibliografija

[1] Krešimir Burazin, Jelena Jankov, Ivana Kuzmanović, Ivan Soldo, *Primjene diferencijalnog i integralnog računa funkcija jedne varijable*, Osijek, 2017.

[2] Dr. Miljenko Crnjac, Mr. Dragan Jukić, Dr. Rudolf Scitovski, *Matematika*, Osijek, 1994.

[3] Dimitrije Hajduković, *Matematika 1*, Glas, Banja Luka, 1989.

[4] Svetozar Kurepa, *Matematička analiza 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1975.

[5] Šime Ungar, *Matematička analiza 1 i 2*, skripta, Zagreb, 2018. (javno dostupno na: https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/MATANALuR.pdf)

---

[1]Georg Friedrich Bernhard Riemann (Breselenz, 17. rujan 1826. – Selasca, 20. srpanj 1866.) njemački matematičar
[2]Jean Gaston Darboux (Nimes, 14. kolovoz 1842. - Pariz, 23. veljača 1917.) francuski matematičar
[3]smatramo da je štap jednodimenzionalan

ISSN 1334-6083