

Assessing the Impact of Mathematical Modelling Education on Traditional Word Problem Solving Skills in 10 - 11-Year-Old Croatian and Slovenian Students

Mateja Sabo Junger¹, Alenka Lipovec² and Jasmina Ferme²

¹University of Zagreb, Faculty of Teacher Education

²University of Maribor, Faculty of Education, Faculty of Natural Sciences
and Mathematics

Abstract

In contemporary mathematics education, there is a paradigm shift toward active learning, particularly through mathematical modelling. This study investigates the impact of a mathematical modelling development program on traditional word problem-solving skills of 10-11-year-old students in Croatia and Slovenia (N = 231), as perceived by students. Theoretical frameworks highlight the role of word problems in shaping fundamental mathematical skills and emphasise the complexity of mathematical modelling problems. The research explores the transferability of skills acquired in the program to traditional word problem-solving. The methodology involves workshops for teachers and students, using four mathematical modelling tasks addressing concepts of function, criteria choice, and combinatorics. Results indicate varied impacts on skills as perceived by students, with improvements in careful reading, planning, and reflection regarding the solution method and accuracy of the answer. While the study shows some progress, the short duration may limit conclusive findings. Overall, the research underscores the potential of mathematical modelling in enhancing problem-solving skills in primary education.

Keywords: *Learning and teaching mathematics; mathematical modelling; word problems; mathematical problems; word-problem solving skills*

Introduction

In contemporary mathematics education, there is a significant shift in how learning is perceived compared to traditional approaches. This change is characterised by a move towards encouraging students to actively participate in acquiring mathematical knowledge, emphasising their ability for independent and creative exploration of mathematics. Such a transformation lays the groundwork for the practical application of mathematical knowledge and skills, as highlighted by Kurnik (2008). Central to this educational evolution are instructional tasks, particularly word problems and mathematical modelling, which are not only challenging but also present rich opportunities for learning.

Word problems, known for their complexity and as a staple in mathematics education, have been extensively studied for over half a century. A key aspect of this study involves exploring the relationship between traditional school word problems and mathematical modelling problems, which are designed to reflect real-life or authentic scenarios. While there are differing views on this relationship, with scholars like Kaiser (2017) advocating for a clear distinction, this article adopts the perspective of Verschaffel et al. (2020), who see word problems as a simplified form of mathematical modelling tasks.

This perspective is crucial in understanding the evolution of mathematics education. The skills developed through mathematical modelling, especially in tackling real-life problems, significantly impact the approach and effectiveness of solving traditional word problems. This interconnection is highlighted by various research programs, such as those documented by Schukajlow et al. (2018), which show the positive effects of mathematical modelling on traditional word problem-solving skills. These programs often use a modelling approach to address mathematical problems within realistic contexts, underscoring the synergy between mathematical modelling and traditional word problem-solving.

Building on this foundation, this article aims to explore this relationship further, focusing on the skills acquired through a mathematical modelling development program designed for 10-11-year-old students. We will investigate which specific skills from this program can be transferred and are beneficial to traditional word problem solving, thereby illuminating the potential of mathematical modelling as a powerful tool in modern mathematics education.

Theoretical framework

Teachers carefully choose and utilise tasks – mathematical (word) problems that stimulate students to engage in active thinking, analysis, and problem-solving. In this way, problems become a crucial tool in shaping students' fundamental mathematical knowledge, skills, and work habits. Additionally, they contribute to the development of their mathematical abilities and creative thinking skills (Kurnik, 2008). Solving various mathematical word problems is a common and fundamental step in early mathematical education. Primarily, solving mathematical problems serves as an outstanding motivational tool for students in the context of mathematics. It also allows

teachers to introduce new teaching topics and content interactively, facilitating the understanding and applying mathematical concepts.

Furthermore, the process of solving mathematical problems significantly impacts the development of students' mental abilities, including analytical thinking, problem-solving, and critical thinking. Solving mathematical problems also enables the practical application of mathematical knowledge in real-life situations, providing students with a sense of the importance of mathematics in their lives (Ovčar, 1987). Traditional or routine word problems in mathematics present a particular challenge for students as they require more than mere computation. In addition to performing arithmetic operations, the student must read and comprehend the given mathematical problem correctly, identify the appropriate arithmetic operation or mathematical model to be applied, calculate the task, and, ultimately, logically consider the solution before articulating it in accordance with the posed question (Glasnović Gracin, 2013). This process emphasises the importance of understanding the text as a crucial step in solving mathematical problems. As noted by Stage and Kloosterman (1992), many students are content with how they perceive mathematics and themselves as mathematics learners. Often, they simply seek steps from the teacher for problem resolution or even skip textual tasks, believing that they are only for excellent students and consequently difficult. Textual (word) problems introduce an additional abstraction layer, where the student must recognise and interpret information from the text to mathematically model and solve it. This demands critical thinking, analytical skills, and applying mathematical concepts to real situations. It also fosters the development of mathematical skills while enhancing the ability to comprehend and communicate mathematical concepts in the context of a problem. Solving mathematical word problems requires, above all, an understanding of both the problem and its solution. Creativity comes to the forefront, involving how to express the problem, which methods to employ, and teamwork (Begović, 2015). In Slovenia and Croatia, children become acquainted with mathematical word problems in the first grade. Students encounter difficulties in solving word problems, which require reading and comprehension throughout their education. For this reason, the understanding that must be acquired at the beginning of the early school years is defined as the ability to read the text, process it, and comprehend its meaning.

According to Kolovou (2011), the primary aim of mathematical education should be to empower students to solve problems independently. Understanding is a strong predictor of solving mathematical problems. Some students excel in algorithmic calculation skills but face difficulties with word problems (Fuentes, 1998; Özcan & Doğan, 2018). Various problem-solving strategies can be applied to help students overcome these difficulties. Several studies have shown that many students approach solving mathematical problems superficially and unjustifiedly within a school environment. Their problem-solving activity often involves performing one or more computational operations with the numbers given in the problem, with very little or no attention paid to other aspects of a competent problem-solving model (Verschaffel, 1999). Unlike routine problems involving routine computational operations, atypical

problems, including word problems and mathematical modelling problems, do not have a simple solution. They require creative thinking and applying specific heuristic strategies to understand the problem situation and find a way to solve it. Therefore, atypical problems, including modelling problems, are considered more complex and challenging than routine problems (Kolovou, 2011).

The goal of education is to acquire practical knowledge that is meaningful and useful in everyday life. Students need to learn and develop problem-solving skills that they will apply in their daily lives. These skills include analytical and critical thinking, which will assist them in various aspects, particularly in decision-making. Problem-solving enables students to understand and apply reasoning in different areas of practical life (Osman et al., 2018).

As Verschaffel (1999) notes, research has shown that many weaker students hold incorrect beliefs about mathematics and learning mathematics, teaching, and solving mathematical problems, such as:

- Mathematical problems have only one correct answer; There is only one correct way to solve each mathematical problem, usually the rule that the teacher recently demonstrated in class;
- Ordinary students cannot solve mathematical problems on their own;
- Solving a mathematical problem should not take more than five minutes;
- Being able to solve a mathematical problem is just luck;
- The mathematics we learn in school has little or nothing to do with the real world.

These beliefs are confirmed by many other studies, as solving word problems presents a challenging and frustrating area for a significant number of students (Osman et al., 2018; Bluman, 2005; Olga, 2010; Phonapichat et al., 2013; Verschaffel & Corte, 1993). These are highly worrying findings since solving mathematical word problems is an important part of problem-solving that involves real-world issues and applications (Osman et al., 2018; Azizah et al., 2010) and is considered the most significant cognitive activity in everyday and professional environments (Kolovou, 2011; Jonassen, 2000).

Another area of focus has been the lack of genuine general knowledge and understanding when solving mathematical modelling tasks and interpreting mathematical word problems in school. In the late seventies, some French and German researchers tested elementary school children's tendencies toward (un)realistic modelling using nonsensical tasks such as "There are 26 sheep and 10 goats on a boat. How old is the captain?" They discovered that a significant number of students (up to 60%) solved these unsolvable tasks by combining the numbers provided in the tasks to get answers without awareness of the absurdity of the problem and their solutions (Verschaffel, 1999; Baruk, 1989; Radatz, 1983). In Radatz's study, for instance, the percentage of children solving absurd tasks in this way increased from the early to middle grades of elementary school before only slightly decreasing in the higher grades (Verschaffel, 1999). As stated by Vilenius-Tuohimaa et al. (2008), success in solving mathematical word problems is strongly related to success in reading comprehension of the task

itself. When solving mathematical tasks involving modelling, it is necessary to analyse the entire task text carefully.

Additionally, critically observing the task text to identify key variables essential for problem-solving and distinguishing them from less important variables is crucial (Sabo Junger, M. & Lipovec, A., 2022). According to Verschaffel (1999), students often skip the representation phase in solving word problems and immediately move to the mathematical expression based on syntactic, surface-level cues. Such an approach directly challenges and reinforces stereotypical representations of mathematical word problems for students, as it results in a high degree of surface success.

Teachers face significant challenges in teaching mathematical modelling (Sen Zeytun et al., 2023). Individual factors contributing to these difficulties include a lack of mathematical conceptual understanding, difficulty connecting real-world scenarios with mathematical concepts, a tendency to prioritise results over the modelling process, and disorganised approaches to problem-solving. Additionally, contextual challenges such as limited prior experience with modelling tasks and constraints on time further complicate the teaching of mathematical modelling. Stohlmann and Yang (2023) have identified a prevalent challenge in the realm of educational resources: teachers often encounter difficulties in creating their mathematical modelling problems, prompting them to turn to online materials. However, these online resources frequently fall short of aligning with established standards of mathematical modelling. The results revealed that a mere 6% of these resources were fully aligned with the principles of mathematical modelling. This finding underscores the critical need for tasks that are both rigorously tested and thoughtfully adapted from scholarly research, ensuring both effectiveness and accuracy in mathematical modelling education. This approach has been adopted in selecting our mathematical modelling tasks, reflecting a commitment to educational excellence and integrity.

Although mathematical modelling is well-established in secondary and undergraduate education, until recently, it has been underemphasised at the elementary level (Turner et al., 2024). This article explores the effectiveness of mathematical modelling in primary education on improving traditional word problem-solving skills among 10–11-year-old Croatian and Slovenian students. It addresses the growing emphasis in mathematics education on developing students' independent and creative problem-solving abilities, mainly through mathematical modelling. The article aims to investigate whether skills acquired in a mathematical modelling program are transferable and beneficial to solving traditional word problems, thereby illuminating the potential of mathematical modelling as a tool in modern mathematics education for this specific age group.

Methodology

In this paper, we will present the results pertaining to the program conducted with students as part of a larger project. Alongside students, primary school teachers from Slovenia and Croatia also participated in this research. The program was carried out between October and December 2022 in both countries.

To conduct the research in schools, we obtained approval from the Ministry of Science and Education of the Republic of Croatia and the Ethics Commission for Research in the Field of Organizational Science of the Republic of Slovenia. Additionally, we obtained consent from parents and school principals of the selected schools.

Research Design

The mathematical modelling workshop program structure encompassed three workshops about mathematical modelling held in Croatia and an equal number in Slovenia, culminating in a final joint workshop where all 15 teachers participated collectively. Each workshop spanned three hours, and the course followed an iterative spiral approach. The language of instruction corresponded to the participants' nationality: Croatian workshops were conducted in Croatian, while those for Slovenian teachers were held in Slovenian. Throughout each workshop session, teachers tackled and deliberated upon a specific mathematical modelling task, contributing to the interactive nature of the program. In total, teachers and their students completed four mathematical modelling tasks. The first task was 'Waste Sortin', created following the task model 'The Pea Problem' by English (2003). The second task was 'Buying an Electric Scooter', also designed for lower grades of elementary school use based on the task 'What Car to Buy?' from English (2004). The third task was 'Amusement Park', adapted from Bleiler-Baxter et al. (2017). The final task, 'Christmas Dinner', was taken from English (2007) and reformulated to be suitable for the age group of students participating in the research.

In the study by Lipovec and Sabo Junger (2023), the tasks were carefully categorised into three distinct groups based on their underlying mathematical concepts. The first group, centred around the pre-concept of a function, emphasised the relationship between different quantities. This aspect was particularly prominent in tasks like 'Waste Sorting' and 'Amusement Park'. The second group focused on the selection and significance of criteria, a key feature in the 'Buying an Electric Scooter' task. The 'Christmas Dinner' task was uniquely designed to combine criteria-based decision-making with the pre-concept of a function. The sequence of tasks allowed for gradual skill development, progressing from more structured, simpler problems to more complex, open-ended ones. The iterations of the two task types—quantity relationships and decision-making based on criteria—were interwoven to support gradual progression.

Initially, the 'Waste Sorting' task introduced students to quantity relationships through clear instructions and specific questions, such as determining which school collected more waste and predicting the amounts for the fourth month. This provided a familiar and guided entry into mathematical modelling. The next step introduced a simpler decision-making task, 'Buying an Electric Scooter', where students evaluated vehicles based on limited criteria, such as price and fuel consumption, learning to prioritise and weigh factors. In the following iteration, the 'Amusement Park' task increased the complexity of quantity relationships. Students had to analyse and connect

multiple quantities by predicting missing waiting times for rides under varying crowd conditions, requiring pattern recognition and refined reasoning. Finally, the 'Christmas Dinner' task brought together both types. Through these interwoven iterations, the tasks evolved from simpler, well-structured problems to increasingly open-ended and complex scenarios. The scaffolding provided by teachers also evolved throughout the program. In the initial tasks, support was high, with teachers guiding students step-by-step to ensure understanding. As the tasks became more complex, scaffolding was gradually reduced, and the approach became more open-ended. By the final stages, students were encouraged to collaborate, explore different strategies independently, and refine their models, fostering greater autonomy, teamwork, and critical thinking.

During the program, students regularly followed the prescribed curriculum and dedicated 6 to 8 school hours of intensive work to solving the given mathematical modelling tasks. In addition to these activities, they also focused on solving more traditional word problems and problems in between lessons. In these problems, they followed Polya's problem-solving phases (Polya, 1957) - understanding the problem, devising a plan, carrying out the plan, and reflecting on the solution. When teachers returned to the workshop, they reported progress and challenging points among students, including improved reading comprehension and general understanding of problems. In the discussions, good practices were highlighted—for example, in the second workshop, emphasis was placed on understanding the problems by visualisation, while in the third workshop, the focus shifted to locating key information within the tasks.

Before the research began and after it was completed, teachers administered achievement tests and a self-assessment inventory of mathematical problem-solving skills (MPSSI) to their students. The details and results of this test are presented in the paper.

Sample

In the program, a total of seven fifth-grade teachers from three schools in Slovenia participated, along with eight fourth-grade teachers from four schools in Croatia. The variation in grade levels is attributed to the difference in the duration of primary school education between the two countries; while primary education in Croatia spans eight years, in Slovenia, it covers nine years. As a result, teachers worked with students of the same age group, typically 10 or 11 years old. The study was conducted using data gathered from a sample of 231 students, typically aged 10 or 11 years old. There were 98 (42,4%) students from Croatia and 133 (57,6%) from Slovenia.

Methods of data collection and analysis

MPSSI (Mathematical Problem-Solving Skills Inventory) was developed by researchers based on mathematical problem-solving skills found in the literature (Chirinda & Barmby, 2017; Hiebert & Wearne, 1993; Kadel, 1992; Polya, 1957). It was used to determine whether ninth-grade students perceived themselves as having developed mathematical problem-solving skills after the program. Students were required to

evaluate their competencies on each item on a five-point scale. We chose MPSSI as a data collection tool because it provided additional data about students that complemented the data from the tests collected from the teachers who participated in the research, allowing students to contribute to the data collection process fully.

The questionnaire MPSSI encompassed the following statements.

- T1 I always carefully read the word problem to understand it.
- T2 I underline important words in the word problem.
- T3 I draw pictures to comprehend the word problem.
- T4 I visualise the problem I am solving in my mind.
- T5 I can distinguish different parts of the word problem.
- T6 I carefully plan how I will solve the word problem.
- T7 I recall other problem-solving tasks I have already solved that are similar to the problem at hand.
- T8 I can easily explain what I am doing when solving a word problem.
- T9 I constantly check if the solution method is correct.
- T10 If I get stuck, I go back to the text of the assignment to make sure I understood it correctly.
- T11 I try to find different ways to solve the word problem.
- T12 At the end, I review the solution method to see if it makes sense.
- T13 I verify the correctness of my answer by revisiting the text of the assignment.

Each student completed two identical questionnaires (pre- and post-program questionnaires) under a unique code name. The code name served to compare the results of both questionnaires. The questionnaires were distributed to students through their class teachers. The obtained data were processed and analysed using the IBM SPSS Statistics 29 software. We used the methods of descriptive analyses and the Paired-Samples T Test. The notation refers to an average, while means standard deviation.

Limitations

The program was relatively short and limited. Namely, it involved only four mathematical modelling tasks, for which the students spent only between 6 and 8 school hours. Although this time was used to work intensively on the tasks and teachers invested additional time in preparation, the limited duration of the program can be one reason why solving mathematical modelling tasks may not have an impact on word problem-solving skills.

Further, this study primarily relies on students' self-assessment of their mathematical problem-solving skills and self-description of solving mathematical problems, offering valuable insight into their perceptions of the problem-solving process and the strategies they use. However, it does not evaluate the correctness of their solutions, processes, or explanations of their work. Incorporating this aspect into the study would provide a more complete picture of the effectiveness of the skills developed through mathematical modelling.

Results

For all students who expressed agreement with all statements in the pre- and post-program questionnaires (N=214), we calculated the average agreement levels for both sets of statements (statements of the pre-program questionnaire and statements of the post-program questionnaire). The results of the calculations are shown in Table 1.

Table 1

Average agreement levels with statements from pre- and post-program questionnaires

	\bar{x}	S.D.
Before the program	3,931	0,518
After the program	3,939	0,542

Table 1 indicates that the average agreement level with the statements in the post-program questionnaire is marginally higher than the average agreement level with the statements in the pre-program questionnaire. However, statistical analysis reveals that this difference in averages is not statistically significant ($t=-0,231$, $P=0,818$).

To ascertain whether specific students' word-problem-solving skills (as perceived by the students themselves) are improved following the program, we computed the average level of agreement for each statement separately in the pre- and post-program questionnaires. We must mention that we have used only the data from participants who provided agreement levels for a specific statement in both the pre- and post-program questionnaires. The results of the calculations are presented in Table 2. Additionally, we employed Paired-Samples T Tests to examine whether the difference between the average agreement levels in the pre- and post-program questionnaire for specific statements is statistically significant.

Table 2

Average agreement levels with each statement from the pre- and post-program questionnaires and their comparison

Statement	N	Pre-prog.	Post-prog.	Paired-Samples T-Test for comparison of averages	Increase (↑) / decrease (↓) in average
T1 I always carefully read the word problem to understand it.	231	4,34 (0,746)	4,42 (0,747)	$t=-1,521$ $P=0,130$	↑
T2 I underline important words in the word problem.	231	3,58 (1,139)	3,35 (1,176)	$t=2,832$ $P=0,005$	↓*
T3 I draw pictures to comprehend the word problem.	230	2,62 (1,315)	2,45 (1,276)	$t=1,903$ $P=0,058$	↓
T4 I visualise the problem I am solving in my mind.	231	4,18 (0,929)	4,13 (0,933)	$t=0,784$ $P=0,434$	↓

Statement	N	Pre-prog.	Post-prog.	Paired-Samples T-Test for comparison of averages	Increase (↑) / decrease (↓) in average
T5 I can distinguish different parts of the word problem.	227	3,97 (0,909)	4,01 (0,971)	t=0,610 P=0,542	↑
T6 I carefully plan how I will solve the word problem.	229	4,12 (0,880)	4,14 (0,980)	t=-0,0174 P=0,862	↑
T7 I recall other problem-solving tasks I have already solved that are similar to the problem at hand.	229	3,72 (1,031)	3,74 (1,151)	t=-0,266 P=0,791	↑
T8 I can easily explain what I am doing when solving a word problem.	227	3,79 (1,016)	3,82 (1,033)	t=-0,395 P=0,693	↑
T9 I constantly check if the solution method is correct.	231	3,90 (1,017)	4,10 (1,013)	t=-2,315 P=0,021	↑*
T10 If I get stuck, I go back to the text of the assignment to make sure I understood it correctly.	230	4,52 (0,775)	4,47 (0,780)	t=0,840 P=0,402	↓
T11 I try to find different ways to solve the word problem.	229	3,90 (0,931)	3,88 (1,021)	t=0,180 P=0,857	↓
T12 At the end, I review the solution method to see if it makes sense.	229	4,16 (0,960)	4,22 (0,912)	t=-0,904 P=0,367	↑
T13 I verify the correctness of my answer by revisiting the text of the assignment.	230	4,19 (0,932)	4,27 (0,896)	t=-1,228 P=0,221	↑

* Statistically significant at the 5 % level.

It is evident that the agreement levels increased for 8 out of 12 statements, namely for statements T1, T5, T6, T7, T8, T9, T12, and T13, whereas for the other four statements, the agreement levels decreased. The results of the Paired-Samples T-Tests are presented in Table 2, indicating that for statements T2 and T9, we can confirm a statistically significant difference at the 5 % level. In contrast, for statement T3, we observe a statistically significant trend in averages at the 10 % level.

Discussion

The above-presented results indicate no statistically significant differences in average agreement levels with the statements in pre- and post-program questionnaires. Hence, we generally cannot confirm an improvement in students' skills in solving word problems after the program intervention. Some potential factors influencing the outcomes of

the study are the variety of listed skills, the duration of the program and the quantity of textual tasks assigned.

However, we have discovered that specific students' word problem-solving skills, as perceived by the students themselves, are improved.

Our discussion will be methodically organised according to the substance of the arguments, which are categorised into two principal sections. The first section encompasses arguments pertaining to the general mathematical modelling theory. These arguments are instrumental in elucidating the findings associated with statements T1, T2, T8, T9, and T10. They offer a crucial theoretical underpinning and contextual background, essential for interpreting the specific outcomes of these statements. The second section will focus on arguments related to the particularities of the selected mathematical modelling problems used in the program. Within this section, the arguments will be further segmented into two distinct subgroups. The first subgroup will examine arguments related to statements in which the chosen tasks were found to be ineffective in fostering the development of specific problem-solving skills, as identified in the MPSSI, specifically referring to statements T3, T4, and T11. Conversely, the second subgroup will delve into statements where the tasks successfully nurtured these skills, as demonstrated in statements T5, T6, T7, T12, and T13. This structured approach ensures a comprehensive and systematic analysis, enabling us to delve deeply into the nature and implications of the arguments with clarity and focus.

Based on the results presented in Table 2, we observe an increase in careful reading with comprehension, as anticipated. This can be attributed to the nature of problem tasks involving mathematical modelling, which differ from the typical word problems students are accustomed to. Consequently, students may engage in more precise reading of the text to fully comprehend the context. In addition, as noted by Blum (2015), students often face challenges right from the initial reading of a problem task, which can also be attributed to careful reading. In contrast, regarding statement T2, we observe a statistically significant decline, which aligns with the theory. Namely, in mathematical modelling tasks, the strategy of underlining keywords is usually not employed, as the tasks themselves do not rely on keywords, as is the case in typical word problems. Therefore, students do not have specific strategies, such as that one, for solving problem tasks involving mathematical modelling (Blum, 2015). We further observe a marginal, albeit statistically insignificant, rise in students' agreement with statement T8, 'I can easily explain what I am doing when solving a problem task'. The existing literature uniformly asserts that engagement in mathematical modelling tasks fosters active learning, emphasising that mathematical modelling itself is a form of active learning (Blum, 1993). Since active learning shows the potential for facilitating more straightforward explanations of one's problem-solving process, we believe that the mentioned result regarding T8 follows the general properties of mathematical modelling. One of them is also the repeated improvement of the chosen method of solving. This is crucial in the process of mathematical modelling, where constant

iteration and improvement of the chosen solution method or model occur (Stohlmann & Albarracin, 2016). This is evident in the results of statement T9, where we observe a statistically significant increase in the continuous verification of the solution method. Interestingly, this contradicts the findings of Nurkaeti (2018), who identified that students often struggle to evaluate the accuracy of their answers retrospectively. In addition, Nurkaeti (2018) suggest that the reason for that is understanding, planning, and implementing problem-solving erroneously.

Furthermore, a decline is observed in statement T10, specifically concerning encountering difficulties. Since mathematical modelling tasks do not have a unique solution (Sabo Junger & Lipovec, 2022) and students were aware of this before the start of the program, they likely did not encounter difficulties. The notion that a word problem involving mathematical modelling has a unique solution is contrary to the goal of mathematical modelling. Therefore, students can exchange ideas about possible solutions, as the task is not limited to a unique solution (Sabo Junger, Lipovec, 2022), which was not the case before the program in the students' classrooms when solving textual tasks. All their considerations about the given problem were acceptable and, ultimately, potential solutions.

Now, we will focus on arguments related to the particularities of the selected mathematical modelling problems used in the program. The problems we used could not facilitate some skills noted in MPSSI because of their content. We observed a decrease in students' agreement levels with certain statements pertaining to word problem-solving skills following the program. Such a situation occurred with the results for statements T3 and T4, specifically concerning drawing pictures while solving tasks and visualising the problem. The observed trend could be attributed to the absence of the need for drawing in solving four mathematical modelling tasks used in the program. With the selection of used modelling tasks, we can also explain the decrease in agreement levels with statement T11, which states, 'I try to find different ways to solve a given problem.' Namely, in the modelling tasks that students worked on, the only chosen method was improving; there was no need to seek multiple different ways. Additionally, note that some students who find mathematics challenging may refuse to work on tasks altogether if they do not immediately receive guidelines for the correct solution, up to the solution itself (Pehkonen, 2017).

On the other hand, chosen problems did facilitate several skills listed in MPSSI. In the case of statements T5, which addresses how a student distinguishes different parts of a problem task, and T6, which states careful planning of the solution approach for a given task, we observe improvement. All modelling tasks in our research can be broken down into parts, and in the last presented task, 'Christmas Dinner', we can precisely see the necessity for careful planning of the method or approach to solving. Children's solutions to this task clearly demonstrated the need to consider and contemplate each part of the task and its function in the final model or solution (English, 2007).

Improvement is also evident in statement T7, which states how I use similar problems I have already solved to solve the given problem. Our first task, 'Waste Sorting', and the third presented task, 'Amusement Park', are problems related to the pre-concept of a function, while the second task, 'Buying an Electric Scooter', and the last, fourth task, 'Christmas Dinner', revolve around the choice and importance of selecting different criteria (Lipovec & Sabo Junger, 2023). Due to this interconnection and similarity in the types of given tasks, students could, when solving the third and fourth tasks, recall or refer to the methods and approaches they used in the first and second tasks. Next, improvement is also evident in the last two statements, T12 and T13, which state how I reflect on the solution method to see if it makes sense for the given task and verify the accuracy of the solution by reviewing the task text. This was clearly demonstrated in students' solutions for the second task, 'Christmas Dinner' and 'Buying an Electric Scooter'. In this task, students had to rank their ideas, weigh them, and decide which criterion was more important. They constantly referred to the task text, ultimately selecting the most crucial and effective model for obtaining the solution. Throughout this process, they continuously checked the accuracy of their model and reasoning (English, 2004). The findings suggest that carefully selected modelling tasks contribute to the enhancement of certain word problem-solving skills. However, it is important to note that these improvements did not reach statistical significance.

In our analysis of the study's findings, we observed statistically significant differences in two key statements: T2 (I underline important words in the word problem.) and T9 (I constantly check if the solution method is correct.).

For statement T2, there was a statistically significant decrease, indicating that the strategy of underlining keywords, often referred to as the 'keyword strategy', is ineffective in mathematical modelling problems. This observation aligns with our results and corroborates the scepticism of other researchers regarding the efficacy of this strategy, even for word problems (for review, see Xin, 2019). Powell et al. (2022) report that for single-step routine word problems, the keywords strategy led to a correct solution in less than 50% of cases, and for multi-step routine problems, the success rate dropped even below 10%.

Conversely, the skill identified in T9 demonstrated a statistically significant increase, underscoring its importance in mathematical modelling. This skill, involving constant validation of the solution method, is a fundamental characteristic of mathematical modelling, resonating with its iterative nature. As defined by Stohlmann and Albarracín, 'Mathematical modelling is an iterative process that involves the open-ended, real-world, practical problems that students make sense of with mathematics using assumptions, approximations, and multiple representations. Other sources of knowledge besides mathematics can be used as well.' (Stohlmann & Albarracín, 2016, p.1). This definition highlights the iterative process as a core element of mathematical modelling, suggesting that the increase in skill observed in T9 is not only significant but also essential for successful engagement with complex, real-world mathematical problems.

Conclusion

In summarising our study's findings, we observed notable advancements in certain aspects of students' word problem-solving skills through the use of mathematical modelling tasks, despite a general lack of statistically significant improvement across most areas measured by the Mathematical Problem-Solving Skills Inventory (MPSSI). A key insight from the study is the statistically significant decrease in the use of the keyword strategy (statement T2), reinforcing the notion that this approach is less effective for mathematical modelling problems. This aligns with broader academic scepticism regarding the efficacy of keyword strategies in complex problem-solving scenarios. Conversely, a significant increase was noted in statement T9, which focuses on the iterative verification of solutions. This highlights the critical importance of continuous evaluation and adjustment in the process of mathematical modelling, resonating with the iterative nature of mathematical problem-solving as emphasised by Stohlmann and Albarracín (2016). The increase in this skill underscores the value of mathematical modelling tasks in fostering deeper, more analytical approaches to problem-solving, essential for real-world applications. Overall, our findings suggest that while not all traditional word problem-solving skills are enhanced through mathematical modelling, specific skills, particularly those involving critical evaluation and iterative refinement, are significantly developed, offering valuable insights for future educational practices and curriculum development in mathematics.

Solving mathematical problems plays several crucial roles in the educational process. It fosters motivation, provides an opportunity for learning and skill development, contributes to psychological growth, and enables the practical application of mathematical knowledge, making it an integral part of mathematics education (Ovčar, 1987). It is noteworthy that, even in a relatively short and limited program (involving only four mathematical modelling tasks) conducted with students solving problem-based textual tasks that include mathematical modelling, there was a slight, albeit statistically insignificant, progress in solving such tasks. This suggests that over a systematic, extended period, the impact would be inevitable when dealing with textual problem tasks involving mathematical modelling. During the research, students regularly followed the prescribed curriculum, dedicating a total of six to eight school hours to solving the given tasks, depending on the teacher. Therefore, more time would likely have a significant impact on the resolution of such problem-based textual tasks. Undoubtedly, mathematics serves as a potential medium for enhancing students' abilities to engage in critical thinking and mathematical reasoning through solving mathematical problems (Osman et al., 2018). Textual problems not only assess students' mathematical knowledge but also serve as a tool for developing interpretation skills and the practical application of mathematics, making them a crucial component of mathematical education.

The results of our study and its limitations offer us some additional research questions that could be addressed in further studies. For example, a longer-term program could

be conducted in which students solve a larger number of mathematical modelling problems, which could potentially have a greater impact on students' word problem-solving skills. Additionally, further studies could integrate evaluations of solution correctness and performance measures of students' word problem-solving skills to complement their self-assessment.

References

- Azizah, A., Rohani, A. T., & Mokhtar, N. (2010). Visual representations in mathematical word problem solving among Form Four students in Malacca. *International Conference on Mathematics Education Research 2010 (ICMER 2010)*, 8, 356–361. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.050>
- Baruk, S. (1989). *Wie alt ist der Kapitän? [How old is the captain?]* Stuttgart: Birkhäuser. <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-6354-4>
- Begović, E. (2015). Matematičko modeliranje u osnovnoškolskoj nastavi [Mathematical modelling in elementary school education]. *Matematika i škola: časopis za nastavu matematike*, 17(81), 17–21.
- Bleiler-Baxter, S. K., Stephens, C. D., Baxter, W. A., & Barlow, A. T. (2017). Modeling decision— as a making process. *Teaching Children Mathematics*, 24(1), 20–29. <https://doi.org/10.5951/teachmath.24.1.0020>
- Blum, W. (1993). Mathematical modelling in mathematics education and instruction. *Journal for Mathematics Education*, 4(1), 3–18.
- Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education: Intellectual and attitudinal challenges* (pp. 73–96). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_9
- Bluman, A. (2005). *Math word problems demystified: A self-teaching guide*. McGraw-Hill.
- Chirinda, B., & Barmby, P. (2017). The development of a professional development intervention for mathematical problem-solving pedagogy in a localised context. *Pythagoras*, 38(1), 11. <https://doi.org/10.4102/pythagoras.v38i1.364>
- Dogan Temur, O. (2012). Analysis of prospective classroom teachers' teaching of mathematical modeling and problem solving. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 8(2), 83–93. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2012.822a>
- English, L. (2003). Mathematical modelling with young learners. In S. J. Lamon, W. A. Parker, & K. Houston (Ed.), *Mathematical modelling: A way of life—ICTMA 11* (pp. 3–17). Woodhead Publishing. <https://doi.org/10.1533/9780857099549.1.1>
- English, L. (2004). Mathematical modelling in the primary school. In *Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 1, pp. 207–214). Mathematics Education Research Group of Australasia.

- English, L. D. (2007). Complex systems in the elementary and middle school mathematics curriculum: A focus on modeling. *Festschrift in Honor of Gunter Torner. The Montana Mathematics Enthusiast*, 139–156.
- Fuentes, P. (1998). Reading comprehension in mathematics. *The Clearing House*, 72(2), 81–88. <https://doi.org/10.1080/00098659809599602>
- Glasnović Gracin, D. (2013). Zadaci s dijeljenjem stavljani u kontekst [Division problems placed in context]. *Matematika i škola: časopis za nastavu matematike*, 15(71), 4–9.
- Hiebert, J., & Wearne, D. (1993). Instruction, understanding and skills in multidigit addition and subtraction. *Cognition and Instruction*, 14, 251–283. https://doi.org/10.1207/s1532690xcil403_1
- Jonassen, J. (2000). Toward a design theory of problem solving. *Educational Technology Research and Development*, 48(4), 63–85. <https://doi.org/10.1007/BF02300500>
- Kadel, S. (1992). Problem-centred learning in mathematics and science. *Hot Topics: Usable Research*. Washington, DC: South Eastern Regional Vision for Education.
- Kolovou, A. (2011). Mathematical problem solving in primary school (66) [Doktorska disertacija, Utrecht University].
- Kurnik, Z. (2008). Znanstvenost u nastavi matematike [Scientific approach in mathematics teaching]. *Matematika i škola: časopis za nastavu matematike*, 2(7), 51–58.
- Lipovec, A., & Sabo Junger, M. (2023). Tipi in nekaj primerov nalog matematičnega modeliranja za razredno stopnjo [Types and some examples of mathematical modelling tasks for primary school level]. *Vzgoja in izobraževanje*, 4(5), 15–21. <https://doi.org/10.59132/viz/2023/4-5/15-21>
- Nurkaeti, N. (2018). Polya's strategy: An analysis of mathematical problem-solving difficulty in 5th grade elementary school. *Edu Humanities: Journal of Basic Education Cibiru Campus*, 10(2), 140–147.
- Olga, J. (2010). Model-drawing strategy to solve word problems for students with LD. Miami: IARLD Conference, The Frostig Center.
- Osman, S., Che Yang, C. N. A., Abu, M. S., Ismail, N., Jambari, H., & Kumar, J. A. (2018). Enhancing students' mathematical problem-solving skills through bar model visualisation technique. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 13(3), 273–279. <https://doi.org/10.12973/iejme/3919>
- Ovčar, S. (1987). Tekstualni zadaci u početnoj nastavi matematike [Textual problems in primary mathematics education]. *Istraživanja odgoja i obrazovanja*, 7, 23–39.
- Özcan, Z. Ç., & Doğan, H. (2018). A longitudinal study of early math skills, reading comprehension and mathematical problem solving. *Pegem Eğitim ve Öğretim Dergisi*, 8(1), 1–18. <https://doi.org/10.14527/pegegog.2018.001>
- Pehkonen, E. (2017). Finnish elementary teachers' conceptions on problem solving in mathematics teaching. *Matematica e la sua Didattica*.
- Phonapichat, P., Wongwanich, S., & Sujiva, S. (2013). An analysis of elementary school students' difficulties in mathematical problem solving. *Procedia—Social and Behavioral Sciences*, 116, 3169–3174. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2014.01.728>
- Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2. ed.). Princeton, NJ: Princeton University Press.

- Powell, S. R., Namkung, J. M., & Lin, X. (2022). An investigation of using keywords to solve word problems. *The Elementary School Journal*, 122(3), 452–473. <https://doi.org/10.1086/717888>
- Radatz, H. (1983). Untersuchungen zum Lösen eingekleideter Aufgaben [Research on solving contextual tasks]. *Journal für Mathematikdidaktik*, 4, 205–217. <https://doi.org/10.1007/BF03339231>
- Sabo Junger, M., & Lipovec, A. (2022). Što jest, a što nije matematičko modeliranje u razrednoj nastavi: Mišljenja slovenskih i hrvatskih učitelja razredne nastave [What is and what is not mathematical modeling in primary education: views of slovenian and croatian primary school teachers]. *Croatian Journal of Education*, 24. <https://doi.org/10.15516/cje.v24i2.4451>
- Sen Zeytun, A., Cetinkaya, B., & Erbas, A. K. (2023). Why do prospective teachers have difficulties in mathematical modelling? Insights from their perspectives. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1–24. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2023.2171922>
- Stage, F. K., & Kloosterman, P. (1992). Measuring beliefs about mathematical problem solving. *School Science and Mathematics*, 92(3), 109–115. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1992.tb12154.x>
- Stohlmann, M. S., & Albarracin, L. (2016). What is known about elementary grades mathematical modelling. *Education Research International*, 1, 1–7. <https://doi.org/10.1155/2016/5240683>
- Stohlmann, M., & Yang, Y. (2023). Investigating the alignment to mathematical modelling of teacher-created mathematical modelling activities available online. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 54(5), 671–686. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1961030>
- Turner, E. E., Been Bennett, A., Granillo, M., Ponnuru, N., McDuffie, A. R., Foote, M. Q., Aguirre, J. M., & McVicar, E. (2024). Authenticity of elementary teacher designed and implemented mathematical modeling tasks. *Mathematical Thinking and Learning*, 26(1), 47–70. <https://doi.org/10.1080/10986065.2022.2028225>
- Verschaffel, L., & De Corte, E. (1993). A decade of research on word problem solving in Leuven: Theoretical, methodological, and practical outcomes. *Educational Psychology Review*, 5(3), 239–256. <https://doi.org/10.1007/BF01323046>
- Verschaffel, L. (1999). Realistic mathematical modelling and problem solving in the upper elementary school: Analysis and improvement. In *Teaching and learning thinking skills: Contexts of learning* (pp. 215–240).
- Xin, Y. P. (2019). The effect of a conceptual model-based approach on ‘additive’ word problem solving of elementary students struggling in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 51, 139–150. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-1002-9>

Mateja Sabo Junger

University of Zagreb, Faculty of Teacher Education
Savska cesta 77, 10000 Zagreb, Croatia
mateja.sabojunger@ufzg.hr

Alenka Lipovec

University of Maribor, Faculty of Education,
Faculty of Natural Sciences and Mathematics
Koroška cesta 160, 2000 Maribor, Slovenia
alenka.lipovec@um.si

Jasmina Ferme

University of Maribor, Faculty of Education,
Faculty of Natural Sciences and Mathematics
Koroška cesta 160, 2000 Maribor, Slovenia
jasmina.ferme1@um.si

Procjena utjecaja poučavanja matematičkoga modeliranja na tradicionalne vještine rješavanja problemskih zadataka u hrvatskih i slovenskih učenika u dobi od 10 do 11 godina

Sažetak

U suvremenoj nastavi matematike prisutan je pomak prema aktivnom učenju, osobito kroz matematičko modeliranje. U ovoj studiji istražuje se utjecaj programa razvoja matematičkoga modeliranja na vještine rješavanja tradicionalnih matematičkih zadataka, kako ih percipiraju učenici dobi od 10 do 11 godina u Hrvatskoj i Sloveniji (N = 231). Teorijski okviri naglašavaju važnost matematičkih zadataka u oblikovanju temeljnih matematičkih vještina te ističu složenost problema matematičkoga modeliranja. U istraživanju se razmatra mogućnost prijenosa vještina stečenih u programu na rješavanje tradicionalnih matematičkih problemskih zadataka. Metodologija uključuje radionice za učitelje i učenike, pri čemu se koristi četiri zadatka matematičkoga modeliranja koji obuhvaćaju pojmove funkcije, odabira kriterija i kombinatorike. Rezultati pokazuju različite učinke na vještine prema percepciji učenika, s poboljšanjima u čitanju s razumijevanjem, planiranju i refleksiji u vezi s metodom rješenja i točnošću odgovora. Iako je u studiji pokazan određeni napredak, kratko trajanje istraživanja može ograničiti konačne zaključke. Općenito, istraživanjem se naglašava potencijal matematičkoga modeliranja u unaprjeđenju vještina rješavanja problemskih zadataka u osnovnoškolskoj nastavi.

Ključne riječi: matematičko modeliranje, matematički problemi, tekstualni zadatci, učenje i poučavanje matematike, vještine rješavanja tekstualnih problemskih zadataka

Uvod

U suvremenoj nastavi matematike dolazi do značajnoga pomaka u načinu na koji se pristupa učenju u usporedbi s tradicionalnim pristupima. Ova promjena obilježena je pomakom prema poticanju učenika na aktivno sudjelovanje u stjecanju matematičkoga znanja, naglašavajući njihovu sposobnost za neovisno i kreativno istraživanje matematike.

Takva transformacija postavlja temelje za praktičnu primjenu matematičkoga znanja i vještina što je istaknuto u radu Kurnika (2008). U središtu ove obrazovne evolucije nalaze se nastavni zadatci, osobito tekstualni zadatci i matematičko modeliranje, koji nisu samo izazovni, već također pružaju bogate mogućnosti za učenje.

Tekstualni zadatci, poznati po svojoj složenosti i kao neizostavan dio nastave matematike, proučavani su više od pola stoljeća. Ključni aspekt ovoga istraživanja uključuje ispitivanje odnosa između tradicionalnih školskih tekstualnih zadataka i problema matematičkoga modeliranja koji su osmišljeni kako bi odražavali stvarne ili autentične situacije. Iako postoje različita mišljenja o ovom odnosu, pri čemu neki znanstvenici poput Kaisera (2017) zagovaraju jasno razdvajanje, u ovom članku prihvaćena je perspektiva Verschaffela i sur. (2020), koji tekstualne zadatke vide kao pojednostavljenu verziju zadataka matematičkoga modeliranja.

Ova perspektiva ključna je za razumijevanje evolucije u nastavi matematike. Vještine koje se razvijaju kroz matematičko modeliranje, osobito pri rješavanju problema iz stvarnoga života, značajno utječu na pristup i učinkovitost rješavanja tradicionalnih tekstualnih zadataka. Navedena povezanost istaknuta je u različitim istraživačkim programima, kao oni koje su dokumentirali Schukajlow i sur. (2018) i koji pokazuju pozitivne učinke matematičkoga modeliranja na vještine rješavanja tradicionalnih tekstualnih zadataka. Ovi programi često koriste pristup modeliranja za rješavanje matematičkih problema u realnim kontekstima, čime se naglašava sinergija između matematičkoga modeliranja i tradicionalnoga rješavanja tekstualnih zadataka.

Polazeći od ove osnove, cilj ovoga članka jest dodatno istražiti ovaj odnos, fokusirajući se na vještine stečene kroz program razvoja matematičkoga modeliranja namijenjenoga učenicima u dobi od 10 do 11 godina. Istražit ćemo koje se specifične vještine iz ovoga programa mogu prenijeti i biti korisne za rješavanje tradicionalnih tekstualnih zadataka čime ćemo osvježiti potencijal matematičkoga modeliranja kao moćnoga alata u suvremenoj nastavi matematike.

Teorijski okvir

Učitelji pažljivo biraju i koriste zadatke – matematičke (tekstualne) probleme koji potiču učenike na aktivno razmišljanje, analizu i rješavanje problema. Na taj način problemi postaju ključni alat u oblikovanju temeljnih matematičkih znanja, vještina i radnih navika učenika. Osim toga, oni pridonose razvoju matematičkih sposobnosti i kreativnoga razmišljanja (Kurnik, 2008). Rješavanje različitih matematičkih problemskih tekstualnih zadataka uobičajen je i temeljni korak u ranom matematičkom obrazovanju. Na prvom mjestu, rješavanje matematičkih problema predstavlja izvanredan motivacijski alat za učenike u kontekstu nastave matematike. Također, omogućuje učiteljima da interaktivno uvedu nove nastavne teme i sadržaje, olakšavajući razumijevanje i primjenu matematičkih pojmova. Štoviše, proces rješavanja matematičkih problema značajno utječe na razvoj mentalnih sposobnosti učenika, uključujući analitičko razmišljanje, rješavanje problema i kritičko razmišljanje. Rješavanje matematičkih

problema omogućava i praktičnu primjenu matematičkoga znanja u stvarnim životnim situacijama, pružajući učenicima uvid u važnost matematike u njihovim životima (Ovčar, 1987). Tradicionalni ili rutinski tekstualni zadatci predstavljaju poseban izazov za učenike jer zahtijevaju više od puke računске obrade. Osim što mora izvoditi aritmetičke operacije, učenik mora pravilno pročitati i razumjeti zadani matematički problem, prepoznati odgovarajuću aritmetičku operaciju ili matematički model koji treba primijeniti, izračunati zadatak te, na kraju, logički razmotriti rješenje prije nego ga iznese u skladu s postavljenim pitanjem (Glasnović Gracin, 2013). Taj proces naglašava važnost razumijevanja teksta kao ključnoga koraka u rješavanju matematičkih problema. Kako ističu Stage i Kloosterman (1992), mnogi učenici zadovoljavaju se načinom na koji percipiraju matematiku i sebe kao učenike matematike. Često jednostavno traže od učitelja korake za rješenje problema ili čak preskaču tekstualne zadatke, smatrajući ih teške i stoga primjerene samo za izvrsne učenike. Tekstualni problemi uvode dodatni sloj apstrakcije pri čemu učenik mora prepoznati i interpretirati informacije iz teksta kako bi ih matematički modelirao i riješio. To zahtijeva kritičko razmišljanje, analitičke vještine i sposobnost primjene matematičkih pojmova na stvarne situacije. Također potiče razvoj matematičkih vještina dok istovremeno poboljšava sposobnost razumijevanja i komunikacije matematičkih pojmova u kontekstu problema. Rješavanje matematičkih tekstualnih problemskih zadataka zahtijeva, prije svega, razumijevanje problema i njegovoga rješenja. Do izražaja dolazi i kreativnost, uključujući način na koji prikazati problem i koje metode primijeniti, uz timski rad (Begović, 2015). U Sloveniji i Hrvatskoj djeca se upoznaju s matematičkim tekstualnim zadatcima u prvom razredu. Učenici se suočavaju s poteškoćama u rješavanju tekstualnih zadataka koji zahtijevaju čitanje i razumijevanje kroz cijelo obrazovanje. Iz toga razloga, razumijevanje koje se mora usvojiti na početku osnovnoškolske nastave definirano je kao sposobnost čitanja teksta, obrade i razumijevanja njegovoga značenja.

Prema Kolovou (2011), primarni cilj matematičkoga obrazovanja trebao bi biti osnaživanje učenika za samostalno rješavanje problema. Razumijevanje je snažan prediktor uspješnosti u rješavanju matematičkih problema. Neki učenici iznimno su vješti u algoritamskim vještinama računanja, ali imaju poteškoća pri rješavanju tekstualnih zadataka (Fuentes, 1998; Özcan i Doğan, 2018). Različite strategije rješavanja problema mogu se primijeniti kako bi se učenicima pomoglo u prevladavanju tih poteškoća. Brojna istraživanja pokazala su da mnogi učenici pristupaju rješavanju matematičkih problema na površan i neosnovan način unutar školskoga okružja. Njihova aktivnost u rješavanju problema često se svodi na izvođenje jedne ili više računskih operacija s brojevima navedenim u zadatku, uz vrlo malo ili nimalo pažnje prema drugim aspektima kompetentnoga modela rješavanja problema (Verschaffel, 1999). Za razliku od rutinskih problema koji uključuju primjenu rutinskih računalnih operacija, atipični problemi, uključujući tekstualne zadatke i probleme matematičkoga modeliranja, nemaju jednostavno rješenje. Oni zahtijevaju kreativno razmišljanje i primjenu specifičnih heurističkih strategija za razumijevanje situacije problema i

pronalaženje načina za njegovo rješavanje. Stoga se atipični problemi, uključujući probleme modeliranja, smatraju složenijima i izazovnijima od rutinskih problema (Kolovou, 2011).

Cilj obrazovanja je stjecanje praktičnoga znanja koje je smisleno i korisno u svakodnevnom životu. Učenici moraju naučiti i razviti vještine rješavanja problema koje će primjenjivati u svojem svakodnevnom životu. Te vještine uključuju analitičko i kritičko razmišljanje koje će im pomoći u različitim aspektima, osobito u donošenju odluka. Rješavanje problema omogućuje učenicima razumijevanje i primjenu rasuđivanja u različitim područjima praktičnoga života (Osman i sur., 2018).

Kao što ističe Verschaffel (1999), istraživanja su pokazala da mnogi učenici koji postižu slabiji uspjeh imaju pogrešna uvjerenja o matematici i učenju matematike, poučavanju i rješavanju matematičkih problema, poput: matematički problemi imaju samo jedan točan odgovor; postoji samo jedan ispravan način rješavanja svakoga matematičkog problema, obično pravilo koje je učitelj nedavno demonstrirao u razredu; obični učenici ne mogu samostalno riješiti matematičke probleme; rješavanje matematičkoga problema ne bi smjelo trajati više od pet minuta; mogućnost rješavanja matematičkoga problema je samo sreća; matematika koju učimo u školi ima malo ili ništa zajedničkoga sa stvarnim svijetom. Ova uvjerenja potvrđuju brojna druga istraživanja jer rješavanje tekstualnih zadataka predstavlja izazovno i frustrirajuće područje za značajan broj učenika (Osman i sur., 2018; Bluman, 2005; Olga, 2010; Phonapichat i sur., 2013; Verschaffel i Corte, 1993). Navedena uvjerenja izazivaju veliku zabrinutost jer je rješavanje matematičkih tekstualnih zadataka važan dio rješavanja problema koji uključuje stvarne životne situacije i primjene (Osman i sur., 2018; Azizah i sur., 2010) te se smatra najvažnijom kognitivnom aktivnošću u svakodnevnim i profesionalnim okruženjima (Kolovou, 2011; Jonassen, 2000).

Drugi smjer istraživanja fokusirao se na nedostatak istinskoga općeg znanja i razumijevanja tijekom rješavanja zadataka matematičkoga modeliranja i interpretacije matematičkih tekstualnih zadataka u školi. Krajem sedamdesetih godina prošloga stoljeća neki su francuski i njemački istraživači ispitivali sklonosti učenika u osnovnoj školi prema (ne)realističkom modeliranju koristeći besmislene zadatke poput: „Na brodu je 26 ovaca i 10 koza. Koliko godina ima kapetan?” Otkrili su da je značajan broj učenika (do 60 %) rješavao ove nerješive zadatke kombinirajući brojeve navedene u zadatku kako bi dobili odgovore bez svijesti o apsurdnosti problema i njihovim rješenjima (Verschaffel, 1999; Baruk, 1989; Radatz, 1983). U Radatzovom istraživanju, na primjer, postotak učenika koja su na ovaj način rješavala apsurdne zadatke povećao se od početnih do srednjih razreda osnovne škole, prije nego što je samo blago opao u višim razredima (Verschaffel, 1999). Kako navode Vilenius-Tuohimaa i sur. (2008), uspjeh u rješavanju matematičkih tekstualnih zadataka snažno je povezan s uspjehom u razumijevanju pročitana zadatka. Pri rješavanju matematičkih zadataka koji uključuju modeliranje potrebno je pažljivo analizirati cijeli tekst zadatka. Također ključno je kritičko promatranje teksta zadatka kako bi se prepoznale varijable važne

za rješavanje problema te ih razlikovati od manje važnih varijabli (Sabo Junger, M. i Lipovec, A., 2022). Prema Verschaffelu (1999), učenici često preskaču fazu predstavljanja u procesu rješavanja tekstualnih zadataka te odmah prelaze na matematički izraz temeljen na sintaktičkim, površinskim naznakama. Takav pristup izravno izaziva i učvršćuje stereotipna tumačenja matematičkih tekstualnih zadataka kod učenika jer rezultira visokim stupnjem površinskoga uspjeha.

Učitelji se suočavaju sa značajnim izazovima u poučavanju matematičkoga modeliranja (Sen Zeytun i sur., 2023). Pojedini faktori koji pridonose tim poteškoćama uključuju nedostatak matematičkoga konceptualnog razumijevanja, teškoće u povezivanju stvarnih situacija s matematičkim pojmovima, sklonost davanju prednosti rezultatima umjesto samom procesu modeliranja te neorganizirane pristupe rješavanju problema. Osim toga, kontekstualni izazovi, poput ograničenoga prethodnog iskustva sa zadacima modeliranja i vremenskih ograničenja, dodatno kompliciraju poučavanje matematičkoga modeliranja. Stohlmann i Yang (2023) identificirali su jedan od čestih izazova u području obrazovnih resursa: učitelji se često suočavaju s poteškoćama u stvaranju vlastitih zadataka matematičkoga modeliranja što ih navodi na korištenje *online* materijala. Međutim, ti *online* resursi često nisu usklađeni s postojećim standardima matematičkoga modeliranja. Rezultati su pokazali da je samo 6 % tih resursa potpuno usklađeno s načelima matematičkoga modeliranja. Navedeni rezultat naglašava kritičnu potrebu za zadacima koji su testirani i pažljivo prilagođeni na temelju znanstvenih istraživanja kako bi se osigurala učinkovitost i točnost u poučavanju matematičkoga modeliranja. Ovaj pristup primijenjen je i u odabiru naših zadataka matematičkoga modeliranja, odražavajući opredjeljenje za obrazovnu izvrsnost i integritet.

Iako matematičko modeliranje ima dobro uspostavljenu istraživačku osnovu u srednjoškolskom i visokoškolskom obrazovanju, donedavno je bilo nedovoljno naglašeno na osnovnoškolskoj razini (Turner i sur., 2024). U ovom članku istražuje se učinkovitost matematičkoga modeliranja u osnovnom obrazovanju u poboljšanju vještina rješavanja tradicionalnih tekstualnih zadataka kod učenika dobi 10-11 godina u Hrvatskoj i Sloveniji. U članku se govori o sve naglašenijoj potrebi da se nastava matematike usmjerava na razvoj sposobnosti učenika za samostalno i kreativno rješavanje problema, osobito kroz matematičko modeliranje. Cilj članka jest istražiti jesu li vještine stečene u programu matematičkoga modeliranja prenosive i korisne za rješavanje tradicionalnih tekstualnih zadataka čime se nastoji osvijetliti potencijal matematičkoga modeliranja kao alata u suvremenoj nastavi matematike za ovu specifičnu dobnu skupinu.

Metodologija

U ovom radu predstaviti ćemo rezultate istraživanja provedenoga s učenicima kao dio većega projekta. Uz učenike, u ovom istraživanju sudjelovali su i učitelji osnovnih škola iz Slovenije i Hrvatske. Projekt se odvijao od listopada do prosinca 2022. godine u obje države.

Kako bismo proveli istraživanje u školama, dobili smo odobrenje Ministarstva znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske te Etičkoga povjerenstva za istraživanje u području organizacijskih znanosti Republike Slovenije. Dodatno, dobili smo suglasnost roditelja i ravnatelja odabranih škola.

Dizajn istraživanja

Struktura programa radionica matematičkoga modeliranja obuhvatila je tri radionice o matematičkom modeliranju održane u Hrvatskoj i jednako toliko u Sloveniji, a završila je zajedničkom završnom radionicom u kojoj su sudjelovali svi učitelji zajedno. Svaka radionica trajala je tri sata, a nastavni proces slijedio je iterativni spiralni pristup. Jezik nastave bio je prilagođen nacionalnosti sudionika: radionice u Hrvatskoj održane su na hrvatskom jeziku, dok su radionice za slovenske učitelje bile na slovenskom jeziku. Tijekom svake radionice učitelji su se bavili i raspravljali o određenom zadatku matematičkoga modeliranja čime je program zadržao interaktivan karakter. Ukupno su učitelji i njihovi učenici riješili četiri zadatka matematičkoga modeliranja. Prvi zadatak bio je „Razvrstavanje otpada”, osmišljen prema modelu zadatka „Problem s graham” (English, 2003). Drugi zadatak bio je „Kupnja električnoga skutera”, također dizajniran za niže razrede osnovne škole, temeljen na zadatku „Koji automobil kupiti?” (English, 2004). Treći zadatak bio je „Lunapark”, adaptiran prema Bleiler-Baxter i sur. (2017). Posljednji zadatak preuzet je iz English (2007) pod nazivom „Božićna večera”, preoblikovan je kako bi bio prikladan za dobnu skupinu učenika koji su sudjelovali u istraživanju. U istraživanju Lipovec i Sabo Junger (2023) zadatci su pažljivo kategorizirani u tri različite skupine prema osnovnim matematičkim pojmovima na kojima se temelje. Prva skupina, koja je bila usmjerena na prekoncept funkcije, naglašavala je odnos između različitih količina. Ovaj aspekt bio je posebno izražen u zadacima poput „Razvrstavanja otpada” i „Lunaparka”. Druga skupina bila je fokusirana na odabir i značaj kriterija što je ključno obilježje zadatka „Kupnja električnoga skutera”.

Zadatak „Božićna večera” bio je jedinstveno osmišljen kako bi povezao donošenje odluka temeljenih na kriterijima s predkonceptom funkcije. Niz zadataka omogućio je postupno razvijanje vještina, napredujući od strukturiranih i jednostavnijih problema prema složenijim i otvorenim. Iteracije dviju vrsta zadataka – odnosa količina i donošenja odluka prema kriterijima – bile su međusobno isprepletene radi podrške postupnom napredovanju. U početku je zadatak „Razvrstavanje otpada” uveo učenike u odnose količina uz jasne upute i konkretna pitanja, poput utvrđivanja koja je škola skupila više otpada te predviđanja količina za četvrti mjesec. Time je učenicima pružen poznat i vođen ulazak u matematičko modeliranje. Sljedeći korak uključivao je jednostavniji zadatak donošenja odluka, „Kupnja električnoga romobila”, pri čemu su učenici procjenjivali vozila na temelju ograničenih kriterija, poput cijene i potrošnje goriva, učeći pritom određivanje prioriteta i vaganje čimbenika. U daljnjoj iteraciji, zadatak „Lunapark” povećao je složenost odnosa količina. Učenici su morali analizirati i povezati više količina predviđajući vremena čekanja na vožnje u različitim uvjetima

gužve što je zahtijevalo prepoznavanje uzoraka i unaprijeđeno rasuđivanje. Konačno, zadatak „Božićna večera” objedinio je oba tipa. Kroz ove iteracije zadatci su evoluirali od jednostavnijih, dobro strukturiranih problema prema sve otvorenijim i složenijim scenarijima. Potpora učitelja također se postupno mijenjala tijekom programa. U početnim zadacima potpora je bila velika pri čemu su učitelji učenike vodili korak po korak kroz proces kako bi osigurali razumijevanje. Kako su zadatci postajali složeniji, podrška se smanjivala, a pristup je postajao sve otvoreniji. U završnim fazama učenici su bili poticani da rade suradnički, istražuju različite strategije samostalno i usavršavaju svoje modele čime su razvijali veću samostalnost, timski rad i kritičko razmišljanje.

Tijekom programa učenici su redovito pratili propisani kurikulum i posvetili između 6 do 8 školskih sati intenzivnom radu na rješavanju zadanih zadataka matematičkoga modeliranja. Uz ove aktivnosti dodatno su se usredotočili na rješavanje tradicionalnijih tekstualnih zadataka i problema među nastavnim satima. U ovim zadacima slijedili su Polyaove faze rješavanja problema (Polya, 1957) – razumijevanje problema, izradu plana, provođenje plana i refleksiju o rješenju. Kada su se učitelji vratili na radionicu, izvijestili su o napretku i izazovima među učenicima, uključujući poboljšanja u čitalačkom razumijevanju i općem razumijevanju problema. U raspravama su istaknute dobre prakse – primjerice, na drugoj radionici naglasak je bio na razumijevanju problema vizualizacijom, dok se na trećoj radionici fokusirao na pronalaženje ključnih informacija unutar zadataka.

Prije početka programa i nakon njegovoga završetka, učitelji su učenicima podijelili testove postignuća te inventar samoprocjene vještina rješavanja matematičkih problema (MPSSI). Detalji i rezultati ovoga testa predstavljeni su u članku.

Uzorak

U programu je sudjelovalo ukupno sedam učitelja petih razreda iz tri osnovne škole u Sloveniji, zajedno s osam učitelja četvrtih razreda iz četiriju osnovnih škola u Hrvatskoj. Varijacija u razrednim razinama povezana je s razlikom u trajanju osnovnoga školovanja između dviju zemalja; dok osnovno obrazovanje u Hrvatskoj traje osam godina, u Sloveniji obuhvaća devet godina. Stoga su učitelji radili s učenicima iste dobne skupine, obično u dobi od 10 ili 11 godina. Istraživanje je provedeno na temelju podataka prikupljenih od 231 učenika u dobi od 10 ili 11 godina. Točnije 98 (42,4 %) učenika iz Hrvatske i 133 (57,6 %) učenika iz Slovenije.

Metode prikupljanja i analize podataka

MPSSI (Mathematical Problem-Solving Skills Inventory) razvili su istraživači na temelju vještina rješavanja matematičkih problema navedenih u literaturi (Chirinda i Barmby, 2017; Hiebert i Wearne, 1993; Kadel, 1992; Polya, 1957). Navedeni alat koristio se kako bi se utvrdilo smatraju li učenici devetih razreda da su razvili vještine rješavanja matematičkih problema nakon programa. Učenici su morali procijeniti svoje vlastite kompetencije za svaki element na petostupanjskoj skali. Odabrali smo MPSSI kao

alat za prikupljanje podataka jer je pružio dodatne informacije o učenicima koje su dopunjavale podatke s testova koje su prikupili učitelji koji su sudjelovali u istraživanju, omogućujući učenicima da u potpunosti doprinesu procesu prikupljanja podataka.

Upitnik MPSSI obuhvaćao je sljedeće tvrdnje.

- T1 Uvijek pažljivo čitam tekstualni problem kako bih ga razumio/la.
- T2 Podcrtavam važne riječi u tekstualnom problemu.
- T3 Crtam slike kako bih razumio/la tekstualni problem.
- T4 Zamišljam problemski zadatak koji rješavam u svojoj glavi.
- T5 Mogu odvojiti različite dijelove tekstualnoga problema.
- T6 Pažljivo planiram kako ću riješiti tekstualni problem.
- T7 Sjećam se drugih problemskih zadataka koje sam prije riješio, a koji izgledaju kao problem koji radim.
- T8 Lako mogu objasniti što radim kada rješavam tekstualni problem.
- T9 Stalno provjeravam je li način na koji rješavam ispravan.
- T10 Ako zapnem, vraćam se na zadatak da provjerim jesam li ga dobro razumio.
- T11 Pokušavam pronaći različite načine za rješavanje tekstualnoga problema.
- T12 Osvrćem se na način na koji sam riješio zadatak da vidim ima li smisla.
- T13 Provjeravam je li moj odgovor točan vraćajući se na zadani problem.

Svaki učenik ispunio je dva identična upitnika (upitnik prije i nakon programa) pod jedinstvenim šifriranim imenom. Šifrirano ime služilo je za usporedbu rezultata obaju upitnika. Upitnike su učenicima podijelili njihovi razredni učitelji. Prikupljeni podatci obrađeni su i analizirani pomoću softvera IBM SPSS Statistics 29. Koristili smo metode deskriptivne analize i Paired-Samples T Test-a. Oznaka \bar{x} odnosi se na prosjek, dok SD označava standardnu devijaciju.

Ograničenja

Program je bio relativno kratak i ograničen. Naime, obuhvaćao je samo četiri zadatka matematičkoga modeliranja za čije su rješavanje učenici utrošili svega između 6 i 8 školskih sati. Iako je to vrijeme bilo iskorišteno za intenzivan rad na zadacima, a učitelji su uložili dodatno vrijeme u pripremu, ograničeno trajanje programa može biti jedan od razloga zašto rješavanje zadataka matematičkoga modeliranja možda nema utjecaj na vještine rješavanja tekstualnih zadataka.

Nadalje, ovo istraživanje primarno se oslanja na samoprocjenu učenika o njihovim vještinama rješavanja matematičkih problema te na njihov opis vlastitoga pristupa rješavanju problema, što pruža vrijedan uvid u njihove percepcije procesa rješavanja problema i strategije koje koriste. Međutim, istraživanje ne ocjenjuje točnost njihovih rješenja, procesa ili objašnjenja rada. Uključivanje toga aspekta u istraživanje omogućilo bi cjelovitiji uvid u učinkovitost vještina razvijenih kroz matematičko modeliranje.

Rezultati

Za sve učenike koji su izrazili suglasnost sa svim tvrdnjama na upitnicima prije i nakon programa (N = 214), izračunali smo prosječne razine suglasnosti za obje skupine tvrdnji (tvrdnje u upitniku prije programa i tvrdnje u upitniku nakon programa). Rezultati izračuna prikazani su u Tablici 1.

Tablica 1

Tablica 1 pokazuje da je prosječna razina suglasnosti s tvrdnjama u upitniku nakon programa tek neznatno viša od prosječne razine suglasnosti s tvrdnjama u upitniku prije programa, no statistička analiza otkriva da ta razlika u prosjecima nije statistički značajna ($t = -0,231$, $P = 0,818$).

Kako bismo utvrdili jesu li vještine rješavanja tekstualnih zadataka kod određenih učenika (prema njihovoj vlastitoj procjeni) poboljšane nakon provedenoga programa, izračunali smo prosječnu razinu slaganja za svaku tvrdnju zasebno u upitnicima prije i nakon programa. Važno je napomenuti da smo koristili samo podatke sudionika koji su u oba upitnika, i prije i nakon programa, iskazali razinu slaganja s određenom tvrdnjom. Rezultati tih izračuna prikazani su u Tablici 2. Nadalje, koristili smo *t-test za zavisne uzorke* kako bismo ispitali je li razlika između prosječnih razina slaganja u upitnicima prije i nakon programa za pojedine tvrdnje statistički značajna.

Tablica 2

Vidljivo je da su razine suglasnosti porasle za 8 od 12 tvrdnji, a točnije za tvrdnje T1, T5, T6, T7, T8, T9, T12 i T13, dok su za preostale 4 tvrdnje razine suglasnosti smanjene. Rezultati Paired-Samples T testova prikazani su u Tablici 2, pokazujući da za tvrdnje T2 i T9 možemo potvrditi statistički značajne razlike na razini od 5 %, dok za tvrdnju T3 primjećujemo statistički značajan trend porasta u prosjecima na razini od 10 %. Vrh obrasca

Rasprava

Prikazani rezultati ukazuju na to da nema statistički značajnih razlika u prosječnim razinama slaganja s tvrdnjama u upitnicima prije i nakon programa. Stoga, općenito gledano, ne možemo potvrditi poboljšanje vještina učenika u rješavanju tekstualnih zadataka nakon provedene intervencije programa. Mogući čimbenici koji su utjecali na ishode istraživanja uključuju raznolikost navedenih vještina, trajanje programa te broj tekstualnih zadataka koji su zadani.

Međutim, ustanovili smo da su se kod određenih učenika, prema njihovoj vlastitoj procjeni, vještine rješavanja tekstualnih zadataka ipak poboljšale.

Naša će rasprava biti sustavno organizirana prema sadržaju argumenata, podijeljenih u dvije glavne cjeline. Prvi dio obuhvaća argumente koji se odnose na opću teoriju matematičkoga modeliranja. Ti su argumenti ključni za objašnjenje nalaza povezanih s tvrdnjama T1, T2, T8, T9 i T10 te pružaju važnu teorijsku osnovu i kontekst za

interpretaciju specifičnih rezultata tih tvrdnji. Drugi dio fokusira se na argumente vezane uz specifičnosti odabranih problema matematičkoga modeliranja korištenih u programu. U okviru ovoga dijela argumenti će biti dodatno podijeljeni u dvije podskupine. Prva podskupina analizira argumente vezane uz tvrdnje u kojima se pokazalo da odabrani zadatci nisu bili učinkoviti u poticanju razvoja specifičnih vještina rješavanja problema pri čemu se posebno referira na tvrdnje T3, T4 i T11. S druge strane, druga podskupina bavi se tvrdnjama u kojima su zadatci bili uspješni u razvijanju tih vještina, što je vidljivo u tvrdnjama T5, T6, T7, T12 i T13.

Ovakav strukturirani pristup osigurava sveobuhvatnu i sustavnu analizu, omogućujući nam dublje razumijevanje prirode i implikacija argumenata s jasnoćom i fokusom.

Na temelju rezultata prikazanih u Tablici 2, uočavamo očekivani porast pažljivoga čitanja s razumijevanjem. To se može pripisati prirodi problemskih zadataka koji uključuju matematičko modeliranje, a koji se razlikuju od uobičajenih tekstualnih zadataka na koje su učenici navikli. Posljedično, učenici su skloniji preciznijem čitanju teksta kako bi u potpunosti razumjeli kontekst. Osim toga, kako ističe Blum (2015), učenici se često suočavaju s izazovima već pri prvom čitanju problemskoga zadatka što dodatno doprinosi čitanju s razumijevanjem. Nasuprot tome, kod tvrdnje T2 uočavamo statistički značajan pad što je u skladu s teorijom. Naime, u zadacima matematičkoga modeliranja strategija podcrtavanja ključnih riječi obično se ne primjenjuje jer se ti zadatci ne oslanjaju na ključne riječi, za razliku od uobičajenih tekstualnih zadataka. Stoga učenici nemaju specifične strategije, poput te, za rješavanje problemskih zadataka koji uključuju matematičko modeliranje (Blum, 2015). Nadalje, uočavamo blagi, iako statistički neznačajan, porast slaganja učenika s tvrdnjom T8: „Lako mogu objasniti što radim dok rješavam problemski zadatak.” Postojeća literatura dosljedno naglašava da angažman u zadacima matematičkoga modeliranja potiče aktivno učenje pri čemu je samo matematičko modeliranje oblik aktivnoga učenja (Blum, 1993). Budući da aktivno učenje može olakšati jasnije objašnjenje procesa rješavanja problema, vjerujemo da spomenuti rezultat u vezi s tvrdnjom T8 proizlazi iz općih svojstava matematičkoga modeliranja. Jedno od tih svojstava je i kontinuirano poboljšavanje odabrane metode rješavanja. To je ključno u procesu matematičkoga modeliranja pri čemu dolazi do stalnoga iteriranja i unaprjeđenja odabrane metode ili modela (Stohlmann i Albarracin, 2016). Ovaj proces vidljiv je u rezultatima tvrdnje T9 u kojima se uočava statistički značajan porast u kontinuiranoj provjeri metode rješavanja. Zanimljivo je da to proturječi rezultatima Nurkaeti (2018) koji je utvrdio da učenici često imaju poteškoća s retrospektivnim vrednovanjem točnosti svojih odgovora. Nurkaeti (2018) sugerira da je razlog tome nerazumijevanje, pogrešno planiranje i provedba procesa rješavanja problema. Nadalje, zabilježen je pad kod tvrdnje T10, koja se odnosi na suočavanje s poteškoćama. Budući da zadatci matematičkoga modeliranja nemaju jedinstveno rješenje (Sabo Junger i Lipovec, 2022) i učenici su toga bili svjesni prije početka programa, vjerojatno nisu nailazili na poteškoće. Ideja da tekstualni zadatak iz matematičkoga modeliranja ima jedinstveno rješenje suprotna je cilju matematičkoga

modeliranja. Stoga učenici mogu razmjenjivati ideje o mogućim rješenjima jer zadatak nije ograničen na jedno rješenje (Sabo Junger i Lipovec, 2022), što nije bio slučaj prije programa u učionicama tijekom rješavanja tekstualnih zadataka. Sve njihove zamisli o zadanom problemu bile su prihvatljive i u konačnici potencijalna rješenja.

Sada ćemo se usredotočiti na argumente vezane uz specifičnosti odabranih zadataka matematičkoga modeliranja korištenih u programu. Problemi koje smo koristili nisu mogli potaknuti razvoj određenih vještina navedenih u MPSSI zbog svojega sadržaja. Uočili smo pad razina slaganja učenika s određenim tvrdnjama koje se odnose na vještine rješavanja tekstualnih zadataka nakon programa. Takva situacija dogodila se s rezultatima za tvrdnje T3 i T4 koje se konkretno odnose na crtanje slika tijekom rješavanja zadataka i vizualizaciju samoga problema. Ovaj trend može se pripisati činjenici da u četiri zadatka matematičkoga modeliranja korištena u programu nije bilo potrebe za crtanjem. Pad razina slaganja s tvrdnjom T11 koja glasi: „*Pokušavam pronaći različite načine za rješavanje zadanog problema*”, također možemo objasniti odabirom zadataka. Naime, u zadacima matematičkoga modeliranja na kojima su učenici radili jedini zahtjev bio je kontinuirano unaprjeđenje odabrane metode, nije bilo potrebe za traženjem više različitih načina rješavanja. Dodatno, treba napomenuti da neki učenici koji smatraju matematiku izazovnom mogu potpuno odbiti raditi na zadacima ako odmah ne dobiju upute za ispravno rješenje, pa čak i samo rješenje (Pehkonen, 2017).

S druge strane, odabrani zadatci potaknuli su razvoj određenih vještina navedenih u MPSSI. U slučaju tvrdnji T5 koja se odnosi na sposobnost učenika da razlikuje različite dijelove problemskoga zadatka i T6, koja ističe pažljivo planiranje pristupa rješavanju zadanoga problema, uočavamo napredak. Svi zadatci matematičkoga modeliranja korišteni u našem istraživanju mogu se raščlaniti na dijelove, a kod posljednjega zadatka „Božićna večera” jasno je vidljiva potreba za pažljivim planiranjem metode ili pristupa rješavanju. Rješenja učenika za navedeni zadatak jasno su pokazala potrebu za razmatranjem i promišljanjem o svakom dijelu zadatka i njegovoj ulozi u konačnom modelu ili rješenju (English, 2007). Napredak je također vidljiv kod tvrdnje T7 koja se odnosi na korištenje sličnih problema koje je učenik već riješio pri rješavanju zadanoga problema. Naš prvi zadatak, „Razvrstavanje otpada” i treći zadatak „Lunapark” povezani su s predkonceptom funkcije, dok se drugi zadatak „Kupnja električnoga romobila” i posljednji, četvrti zadatak, „Božićna večera” fokusiraju na izbor i važnost odabira različitih kriterija (Lipovec i Sabo Junger, 2023). Zbog međusobne povezanosti i sličnosti zadanih problema, učenici su se prilikom rješavanja trećega i četvrtoga zadatka mogli prisjetiti metoda i pristupa koje su koristili u prvom i drugom zadatku. Daljnji napredak vidljiv je kod posljednje dvije tvrdnje, T12 i T13, koje se odnose na refleksiju o metodi rješenja kako bi se provjerilo ima li smisla za zadani zadatak te na provjeru točnosti rješenja analizom teksta zadatka. To je jasno pokazano u rješenjima učenika za drugi zadatak „Kupnja električnoga romobila”. U ovom zadatku učenici su morali rangirati svoje ideje, odmjeriti i odlučiti koji je kriterij važniji. Neprestano

su se vraćali na tekst zadatka kako bi na kraju odabrali najvažniji i najučinkovitiji model za dobivanje rješenja. Tijekom toga procesa kontinuirano su provjeravali točnost svojega modela i obrazloženja (English, 2004). Nalazi sugeriraju da pažljivo odabrani zadatci matematičkoga modeliranja doprinose razvoju određenih vještina rješavanja tekstualnih zadataka. Međutim, važno je napomenuti da ova poboljšanja nisu bila statistički značajna.

U analizi rezultata istraživanja uočene su statistički značajne razlike u dvije ključne tvrdnje: T2 (*Podcrtavam važne riječi u tekstualnom zadatku.*) i T9 (*Stalno provjeravam je li metoda rješavanja ispravna.*).

Za tvrdnju T2 zabilježen je statistički značajan pad što ukazuje na to da strategija podcrtavanja ključnih riječi, često nazivana „strategijom ključnih riječi“, nije učinkovita u zadacima matematičkoga modeliranja. Ovo zapažanje slaže se s našim rezultatima te potvrđuje skepticizam drugih istraživača o učinkovitosti ove strategije čak i kod tekstualnih zadataka (za pregled vidjeti Xin, 2019). Powell i sur. (2022) navode kako je kod jednostavnih, rutinskih tekstualnih zadataka strategija ključnih riječi rezultirala točnim rješenjem u manje od 50 % slučajeva, dok je kod rutinskih problema s više koraka uspješnost pala ispod 10 %.

Nasuprot tome, vještina identificirana u tvrdnji T9 pokazala je statistički značajan porast, naglašavajući njezinu važnost u matematičkom modeliranju. Ova vještina, koja uključuje stalnu provjeru ispravnosti metode rješavanja, temeljna je značajka matematičkoga modeliranja što je u skladu s njegovom iterativnom prirodom. Kako su Stohlmann i Albarracín definirali: *Matematičko modeliranje je iterativni proces koji uključuje otvorene, stvarne, praktične probleme koje učenici razumiju koristeći matematiku uz pretpostavke, aproksimacije i različite prikaze. Također se mogu koristiti i drugi izvori znanja osim matematike.* (Stohlmann i Albarracín, 2016, str. 1). Ta definicija naglašava iterativni proces kao srž matematičkoga modeliranja, sugerirajući da je porast vještine u T9 ne samo značajan, već i ključan za uspješno suočavanje s kompleksnim matematičkim problemima iz stvarnoga svijeta.

Zaključak

U sažetku rezultata našega istraživanja, uočeni su značajni napredci u određenim aspektima sposobnosti učenika za rješavanje tekstualnih zadataka zahvaljujući korištenju zadataka matematičkoga modeliranja, unatoč općenitom izostanku statistički značajnoga poboljšanja u većini područja mjerenih Inventarom vještina za rješavanje matematičkih problema (MPSSI). Ključno otkriće istraživanja jest statistički značajan pad u korištenju strategije ključnih riječi (tvrdnja T2), što dodatno potvrđuje da je ovaj pristup manje učinkovit u rješavanju zadataka matematičkoga modeliranja. Ovi rezultati u skladu su s raširenim akademskim skepticizmom prema učinkovitosti strategije ključnih riječi u složenim scenarijima rješavanja problema. Nasuprot tome, zabilježen je značajan porast u tvrdnji T9 koja se fokusira na iterativnu provjeru rješenja. Ovo ističe ključnu važnost kontinuirane evaluacije i prilagodbe u procesu matematičkoga modeliranja što

rezonira s iterativnom prirodom rješavanja matematičkih problema, kako su naglasili Stohlmann i Albarracín (2016). Povećanje te vještine naglašava vrijednost zadataka matematičkoga modeliranja u poticanju dubljega i analitičnijega pristupa rješavanju problema što je od suštinske važnosti za primjenu u stvarnim situacijama. Sveukupno, naši rezultati sugeriraju da, iako se ne poboljšavaju sve tradicionalne vještine rješavanja tekstualnih zadataka putem matematičkoga modeliranja, određene vještine, posebno one koje uključuju kritičku evaluaciju i iterativno usavršavanje, značajno se razvijaju. To pruža vrijedne uvide za buduće obrazovne prakse i razvoj kurikula u matematici.

Rješavanje matematičkih problema igra ključnu ulogu u obrazovnom procesu. Potiče motivaciju, pruža priliku za učenje i razvoj vještina, doprinosi psihološkom razvoju te omogućava praktičnu primjenu matematičkoga znanja čineći ga neizostavnim dijelom matematičkoga obrazovanja (Ovčar, 1987). Zanimljivo je da je čak i relativno kratak i ograničen program (koji uključuje samo četiri zadatka matematičkoga modeliranja) rezultirao blagim, iako statistički neznčajnim, napretkom u rješavanju takvih zadataka. To nam sugerira da bi sustavni i dugotrajniji pristup neminovno imao veći utjecaj na sposobnost rješavanja tekstualnih zadataka s elementima matematičkoga modeliranja. Tijekom programa učenici su redovito pratili propisani kurikulum te su ukupno posvetili između 6 i 8 školskih sati rješavanju zadataka, ovisno o učitelju. Stoga bi dulje vrijeme za rješavanje ovakvih zadataka vjerojatno imalo značajniji utjecaj. Nema sumnje da matematika predstavlja potencijalni alat za jačanje sposobnosti učenika u kritičkom mišljenju i matematičkom zaključivanju kroz rješavanje matematičkih problema (Osman i sur., 2018). Tekstualni zadatci ne samo da procjenjuju matematičko znanje učenika, već također služe kao alat za razvoj interpretacijskih vještina i praktične primjene matematike čineći ih ključnim dijelom matematičkoga obrazovanja.

Rezultati našega istraživanja, zajedno s njegovim ograničenjima, otvaraju dodatna istraživačka pitanja koja bi se mogla obraditi u budućim studijama. Primjerice, mogao bi se provesti dugoročniji program u kojem učenici rješavaju veći broj zadataka matematičkoga modeliranja što bi potencijalno imalo veći utjecaj na njihove vještine rješavanja tekstualnih zadataka. Nadalje, buduće studije mogle bi uključiti evaluaciju točnosti rješenja i mjerenje učinka vještina rješavanja tekstualnih zadataka kako bi se dopunila samoprocjena učenika.