

Trigonometrija trokuta na elipsoidu

DAVOR DEVALD¹

Sažetak. U radu se proučava trigonometrija trokuta na elipsoidu čije su stranice dijelovi glavnih elipsa tog elipsoida. Radi se o poopćenju sferne trigonometrije iz srednje škole na elipsoid. Proučavaju se teoremi sferne trigonometrije i analogoni račun za trokut na elipsoidu. Razmatra se model planeta Zemlje kao rotacijski elipsoid (sferoid) i primjena teorema na praktične probleme izvan matematike. Diskutira se najkraći put između točaka na elipsoidu i geodetski trokut.

1. Uvod

Trigonometrija je dio geometrije unutar kojega se proučavaju odnosi između duljina stranica i unutarnjih kuteva (ravninskog) trokuta pomoću trigonometrijskih funkcija. Sferna trigonometrija bavi se proučavanjem sfernog trokuta, dijela sfere omeđenog trima lukovima glavnih kružnica sfere. Taj dio matematike bio je uključen u starija izdanja udžbenika iz matematike za 3. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije, ali je iz novijih izdanja izostavljen zajedno s krivuljama drugog reda.

Zanimljivo je da su se sferna geometrija i trigonometrija povijesno razvile prije ravninske geometrije, uglavnom za potrebe astronomije i pomorstva². Sferna geometrija je najstarija neeuclidiska geometrija u povijesti. Ona se razlikuje od euklidske geometrije po tome što u njoj ne vrijedi Euklidov peti postulat o paralelama. Za male udaljenosti možemo koristiti ravninsku (euklidsku) geometriju, ali kod velikih udaljenosti moramo uzeti u obzir zakrivljenost Zemljine površine.

Najjednostavniji model Zemlje je sfera polumjera $R = 6400$ km. Precizniji model našeg planeta bi bio rotacijski elipsoid (sferoid), čiji je ekvator kružnica polumjera $R = 6378$ km, a udaljenost od središta do sjevernog ili južnog pola $h = 6356$ km. Prosječni polumjer Zemlje je $(2R + h) / 3 = 6371$ km.

U ovom ćemo radu poopćiti sfernu trigonometriju, koja se nekad poučavala u školi, na elipsoid s nekoliko primjera primjene tih rezultata. Za proučavanje sferne trigonometrije prikladnije je kao ambijent koristiti trodimenzionalni euklidski pro-

¹Davor Devald, Ekonomski fakultet, Sveučilište u Zagrebu

²B. Dakić, N. Elezović: Matematika 3, dodatak za 3. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije, Element, 2006.

stor (tj. koordinatni sustav) $\mathbb{R}^3$ iako se radi o geometriji na plohi, dakle dvodimenzionalnoj geometriji. Naime, prilikom proučavanja takve geometrije moramo, zbog zakrivljenosti plohe, koristiti i neke točke ambijentalnog prostora koje se nalaze izvan plohe.

Elipsoid je skup svih točaka (x, y, z) u prostoru $\mathbb{R}^3$ koje zadovoljavaju implicitnu jednadžbu

$$\frac{x^2}{R_1^2} + \frac{y^2}{R_2^2} + \frac{z^2}{R_3^2} = 1 \quad (1)$$

gdje su $R_1, R_2, R_3 > 0$ poluosi elipsoida. Neprazni presjek elipsoida i ravnine je elipsa (ili jedna točka u slučaju tangencijalne ravnine). Ako ravnina prolazi središtem elipsoida, tj. ishodištem O koordinatnog sustava, takvu elipsu zovemo glavna *elipsa*.

Svaku poluelipsu od sjevernog do južnog pola, koja leži u ravnini koja sadrži z -os, zovemo *meridijan*. Meridijan koji leži u xz -ravnini, a sve točke na njemu imaju koordinatu $y > 0$, zovemo *nulti meridijan*. Elipsu koja leži u ravnini paralelnoj s xy -ravninom zovemo *paralela*. Samu xy -ravninu zovemo *ekvatorijalna ravnina*, a elipsu koja leži u toj ravnini zovemo *ekvator*.

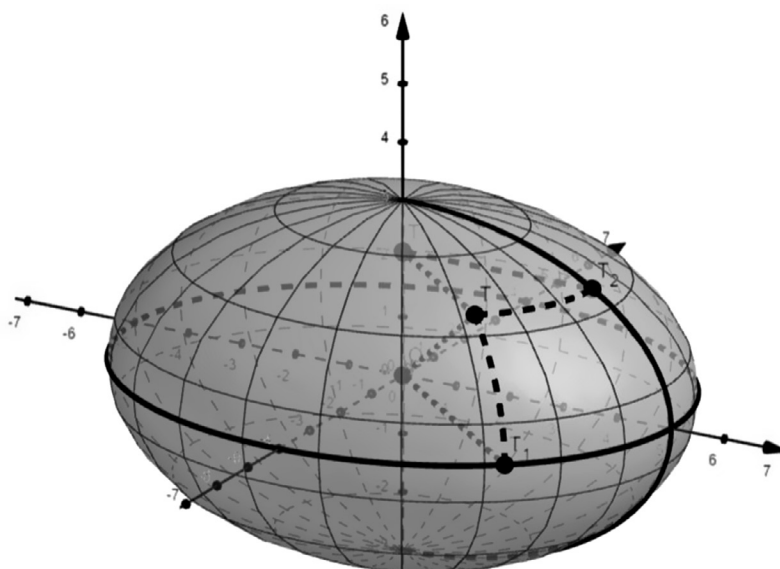
Točku $T = (x, y, z)$ na elipsoidu možemo jedinstveno prikazati pomoću dvaju koordinata: geografske širine $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ i geografske dužine $\lambda \in \langle -\pi, \pi \rangle$. Geografska širina je kut koji polumjer $\overline{OT}$ zatvara s ekvatorijalnom ravninom, a geografska dužina kut koji polumjer $\overline{OT}$ zatvara s ravninom nultog meridijana. Pri tome vrijede formule

$$\begin{aligned} x &= R_1 \cos \varphi \cos \lambda \\ y &= R_2 \cos \varphi \sin \lambda . \\ z &= R_3 \sin \varphi \end{aligned} \quad (2)$$

Geografske koordinate (φ, λ) možemo dobiti iz Kartezijevih pomoću jednakosti

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{z}{R_3} \\ \operatorname{tg} \lambda &= \frac{R_1 y}{R_2 x} \end{aligned}$$

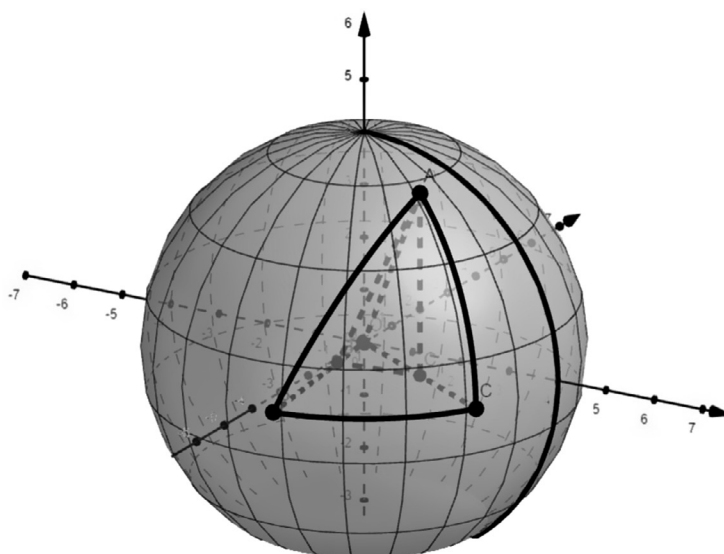
u slučaju kad je $x \neq 0$.



Slika 1. Točka T s geografskom širinom $\varphi = \pi/4 = \angle T_1OT$ i geografskom dužinom $\varphi = -\pi/4 = \angle T_2T'T$ na elipsoidu s poluosima $R_1 = 5, R_2 = 4, R_3 = 3$.

2. Teoremi za sferni trokut

Ako je $R_1 = R_2 = R_3 =: R$, elipsoid postaje sfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ i tada su svi polumjeri (udaljenost od središta do neke točke na elipsoidu) jednaki R . Najkraća krivulja koja spaja dvije točke u ravni je dužina, a na sferi je to luk glavne kružnice.



Slika 2. Pravokutni trokut s vrhovima $A(\pi/3, -\pi/6)$, $B(0, -7\pi/15)$ i $C(0, -\pi/6)$ na sferi polumjera $R = 4$

Neka su A, B, C tri točke na sferi. Dio sfere omeđen lukovima glavnih kružnica, koji spajaju te točke, zovemo *sferni trokut*. Te lukove zovemo *stranice sfernog trokuta* ABC , a kutove $a = \angle BOC$, $b = \angle COA$, $c = \angle AOB$ zovemo *središnji kutovi*.

Ako je sfera jedinična, tj. $R = 1$, onda je duljina luka između vrhova točno jednaka pripadnom središnjem kutu (u radijanima), a ako je $R \neq 1$, onda treba kut pomnožiti brojem R jer je $l = R\alpha$, gdje je l duljina luka, a α pripadni središnji kut u radijanima.

Ako iz npr. vrha A povučemo okomice na dužine $\overline{OB}$ i $\overline{OC}$, dobivamo ravninski trokut AB_1C_1 , čiji su unutarnji kutovi $\angle AB_1C_1$ i $\angle B_1C_1A$ jednaki unutarnjim kutovima β i γ sfernog trokuta ABC . Pri tome kut $\angle B_1AC_1$ ne mora odgovarati kutu α . Naime, zbog Talesova teorema o tangenti na kružnicu, stranice trokuta AB_1C_1 paralelne su s tangentama na lukove trokuta ABC u vrhovima B i C . Iz tog svojstva slijede svi teoremi za sferni trokut¹ koje ćemo sada navesti. Talesov teorem ne vrijedi za tangentu na elipsu.

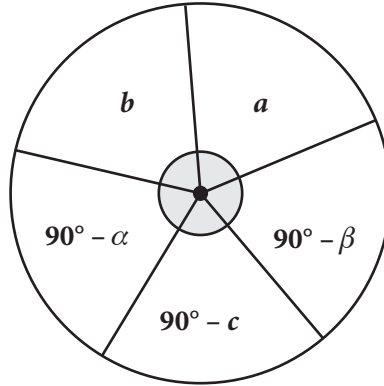
Ako je sferni trokut ABC pravokutan s pravim kutem γ , onda vrijede sljedeće Napierove formule:

$$\begin{aligned}\sin a &= \sin \alpha \sin c \\ \sin b &= \sin \beta \sin c \\ \cos c &= \cos \alpha \cos b \\ \cos \alpha &= \sin \beta \cos a \\ \cos \beta &= \sin \alpha \cos b\end{aligned}\tag{3}$$

gdje su $a = \angle BOC$, $b = \angle COA$, $c = \angle AOB$ središnji kutevi lukova BC , CA i AB , te α, β, γ unutarnji kutevi trokuta redom nasuprot tim lukovima. Pri tome se kut između lukova (tj. općenito krivulja na plohi) koje se sijeku definira kao kut između tangenti na te lukove u točki sjecišta.

Ovdje treba napomenuti da sferni trokut može imati dva, pa čak i sva tri prava kuta. Unatoč tome, u formulama (3) je c hipotenuza, a a i b su katete trokuta, mada se te uloge mijenjaju ako je neki od kuteva α i β također pravi i ako gledamo Napierove formule s obzirom na taj kut.

Postoji još pet formula s tangensom i kotangensom koje nećemo navoditi, ali ćemo spomenuti mnemotehničko pravilo, tzv. Napierovo pravilo, kako zapamtiti sve formule: podijelimo krug polumjerima na pet dijelova i redom u njih napišemo izraze $b, a, 90^\circ - \beta, 90^\circ - c, 90^\circ - \alpha$. Tada je sinus svakog dijela jednak umnošku tangensa susjednih ili umnošku kosinusa nesusjednih dijelova.



Slika 3. Napierovo pravilo za pravokutni sferni trokut s pravim kutem γ

U svakom sfernom trokutu vrijedi sljedeći analogon teorema o sinusima:

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma . \quad (4)$$

Vidimo da središnje kutove sfernog trokuta možemo poistovjetiti sa stranicama, s time da se, za razliku od ravninskog trokuta, ovaj put u formulama pojavljuje sinus ili kosinus stranice.

Konačno, u svakom sfernom trokutu vrijedi teorem o kosinusu, kojim računamo duljinu stranice pomoću nasuprotnog kuta i preostalih dviju stranica:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma \end{aligned} \quad (5)$$

Uočimo da se u trećoj formuli u (3) pojavljuju samo stranice, odakle slijedi da je to analogon Pitagorina teorema za sferni trokut. Ista se formula dobije ako u treću formulu u (5) uvrstimo

$$\gamma = \pi / 2 .$$

Primjer 1. Zagreb leži $45^{\circ}48'$ sjeverno i $15^{\circ}58'$ istočno, a Dublin $53^{\circ}20'$ sjeverno i $6^{\circ}15'$ zapadno od ekvatora, odnosno nultog meridijana (London). Let avionom između Zagreba i Dublina traje 2 sata i 45 minuta. Izračunajmo prosječnu brzinu aviona tijekom čitavog leta.

Rješenje. Kako je zadano vrijeme putovanja $t = 2 \text{ h } 45 \text{ min} = 2.75 \text{ h}$ trebamo samo izračunati put s , tj. duljinu kružnog luka između Zagreba i Dublina. Duljina luka je $s = Rc$, gdje je $R = 6371$ polumjer Zemlje te $c = \angle AOB$ središnji kut za točke $A = (45^{\circ}48', 15^{\circ}58')$ i $B = (53^{\circ}20', 6^{\circ}15')$ u radijanima.

Jedan način je da pomoću (2) odredimo Kartezijeve 3D koordinate točaka A i B te zatim računamo kut između vektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$. No, možemo koristiti i teoreme za

sferni trokut tako da primijenimo teorem o kosinusu na trokut ABC , gdje je C sjeverni pol². Naime, kut uz taj vrh je upravo

$$\gamma = \gamma_A - \gamma_B = 15^\circ 58' - (-6^\circ 15') = 22^\circ 13'.$$

Poznate su i dvije stranice (tj. središnja kuta) $a = 90^\circ - \varphi_B = 36^\circ 40'$ i $b = 90^\circ - \varphi_A = 44^\circ 12'$ jer te dobivamo stranice leže na meridijanima kroz točku B , odnosno A . Sada primjenom zadnje formule (5) dobivamo

$$\cos c = \cos(36^\circ 40') \cos(44^\circ 12') + \sin(36^\circ 40') \sin(44^\circ 12') \cos(22^\circ 13') = 0.96046$$

odakle slijedi da je $c = 16^\circ 10'$. Dakle, duljina puta je

$$s = 6371 \cdot \frac{16^\circ 10'}{180^\circ} \cdot \pi = 1798 \text{ km}$$

pa je prosječna brzina aviona

$$v = \frac{s}{t} = \frac{1798}{2.75} = 654 \text{ km/h.}$$

3. Preslikavanje elipsoida u jediničnu sferu. Konjugirani polumjeri elipse

Neka su $A = (\varphi_A, \lambda_B)$ i $B = (\varphi_B, \lambda_B)$ dvije točke na elipsoidu. Tada postoji jedinstvena ravnina ρ koja prolazi kroz točke A , B i središte O elipsoida. Luk između točaka A i B dio je glavne elipse od točke A do točke B u kojoj ravnina ρ siječe elipsoid.

Općenito je teško odrediti veliku i malu os takve elipse. Zato ćemo umjesto njih odrediti jedan par tzv. konjugiranih promjera (ili polumjera): promjeri konike su konjugirani ili spregnuti ako svaki od njih raspolavlja tetive paralelne s drugim promjerom.

U slučaju elipse, dva promjera (tj. tetive koje prolaze kroz središte) su konjugirana ako su tangente na elipsu u krajnjim točkama jednog od njih paralelne s drugim³. Taj rezultat je poopćenje Talesovog teorema za elipsu. Općenito, konjugirani promjeri elipse nisu okomiti, ali postoji točno jedan par okomitih konjugiranih promjera i to su upravo velika i mala os elipse. U slučaju kružnice, svaka dva konjugirana promjera su okomita.

Definirajmo sada afino preslikavanje $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ formulom

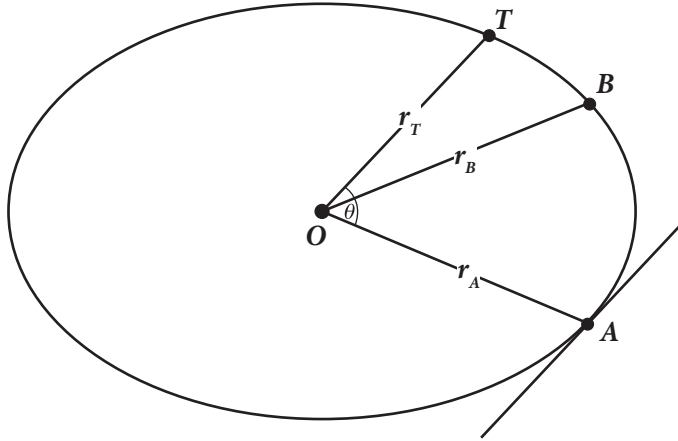
$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{R_1}, \frac{y}{R_2}, \frac{z}{R_3} \right) = (\cos \varphi \cos \lambda, \cos \varphi \sin \lambda, \sin \varphi)$$

Preslikavanje F je homotetija prostora $\mathbb{R}^3$ koje preslikava³ elipsoid (1) u jediničnu sferu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Uočimo da preslikavanje F čuva geografske koordinate točke:

³B. Odehnal, H. Stachel, G. Glaeser: The Universe of Quadrics, Springer-Verlag, 2020.

ako je $T = (\varphi, \lambda)$ točka na elipsoidu i $T' = F(T)$ njena slika na sferi, onda točka T' ima iste geografske koordinate (φ, λ) kao T .

Nadalje, homotetija F preslikava trokut ABC na elipsoidu u sferni trokut $A'B'C'$ na jediničnoj sferi. Trokut $A'B'C'$ ima jednake središnje kutove a, b, c kao trokut ABC jer homotetija F čuva pravce koji prolaze kroz središte, tj. $OA' = OA$, $OB' = OB$ i $OC' = OC$. Ono što se mijenja su kutovi α, β, γ među stranicama trokuta.



Slika 4. Presjek elipsoida i ravnine OAB

Za točku S na elipsi, neka je $\vec{r}_S = \overrightarrow{OS}$ njen radijvektor. Za glavnu elipsu kroz točke A i B želimo odrediti konjugirani polumjer $\vec{r}_T$ polumjera $\vec{r}_A$, tj. pripadnu točku $T = (\varphi_T, \lambda_T)$ na elipsi. Njegova slika $\vec{r}_{T'}$ na jediničnoj sferi leži u ravnini razapetoj vektorima $\vec{r}_A$ i $\vec{r}_B$, pa mora biti

$$\vec{r}_{T'} = \lambda \vec{r}_A + \mu \vec{r}_B,$$

za jedinstvene skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Vektor $\vec{r}_{T'}$ mora biti i jedinični, pa je

$$\vec{r}_{T'} \cdot \vec{r}_{T'} = 1 \Rightarrow \lambda^2 (\vec{r}_A \cdot \vec{r}_A) + 2\lambda\mu (\vec{r}_A \cdot \vec{r}_B) + \mu^2 (\vec{r}_B \cdot \vec{r}_B) = 1,$$

odakle zbog $\vec{r}_A \cdot \vec{r}_A = \vec{r}_B \cdot \vec{r}_B = 1$ i $\vec{r}_A \cdot \vec{r}_B = \cos c$ slijedi jednačba

$$\lambda^2 + 2\lambda\mu \cos c + \mu^2 = 1 \quad (6)$$

Drugu jednačbu za λ i μ dobivamo iz činjenice da je $\vec{r}_{T'}$ konjugirani polumjer (ovaj put kružnice) od $\vec{r}_A$, pa su oni okomiti, tj.

$$\vec{r}_{T'} \cdot \vec{r}_A = 0 \Rightarrow \lambda^2 (\vec{r}_A \cdot \vec{r}_A) + \mu (\vec{r}_B \cdot \vec{r}_A) = 0,$$

odakle slijedi $\lambda = -\mu \cos c$. Uvrštavanjem u (6) dobivamo

$$\mu^2 \cos^2 c - 2\mu^2 \cos^2 c + \mu^2 = 1,$$

odakle slijedi da je rješenje (do na predznak) $\mu = 1/\sin c$, $\lambda = -\operatorname{ctg} c$. Dakle,

$$\vec{r}_{T'} = (-\operatorname{ctg} c)\vec{r}_{A'} + \frac{1}{\sin c}\vec{r}_{B'}, \quad (7)$$

Iz toga slijedi da su Kartezijeve koordinate točke T' :

$$\begin{aligned} x_{T'} &= -\frac{\cos \varphi_A \cos \lambda_A}{\operatorname{tg} c} + \frac{\cos \varphi_B \cos \lambda_B}{\sin c} \\ y_{T'} &= -\frac{\cos \varphi_A \sin \lambda_A}{\operatorname{tg} c} + \frac{\cos \varphi_B \sin \lambda_B}{\sin c} \\ z_{T'} &= -\frac{\sin \varphi_A}{\operatorname{tg} c} + \frac{\sin \varphi_B}{\sin c} \end{aligned} \quad (8)$$

Konačno, geografske koordinate $(\varphi_{T'}, \lambda_{T'})$ točke T' , koje su ujedno i koordinate točke T , dobivamo iz (2) za $R_1 = R_2 = R_3 = 1$, tj.

$$\begin{aligned} \sin \varphi_T = z_{T'} &= \frac{\sin \varphi_B - \cos c \sin \varphi_A}{\sin c} \\ \operatorname{tg} \lambda_T = \frac{y_{T'}}{x_{T'}} &= \frac{\cos \varphi_B \sin \lambda_B - \cos c \cos \varphi_A \sin \lambda_A}{\cos \varphi_B \cos \lambda_B - \cos c \cos \varphi_A \cos \lambda_A} \end{aligned} \quad (9)$$

Zamjenom A i B dobivamo koordinate konjugiranog polumjera od $\overline{OB}$ luka AOB elipse.

Sad kad imamo polumjer $\vec{r}_T$ (nazovimo ga $\vec{r}_{AB}$), unutarnji kut α trokuta ABC na elipsoidu je dan formulom

$$\cos \alpha = \frac{Q(\vec{r}_{A'B'}, \vec{r}_{A'C'})}{\sqrt{Q(\vec{r}_{A'B'}, \vec{r}_{A'B'}) \cdot Q(\vec{r}_{A'C'}, \vec{r}_{A'C'})}} \quad (10)$$

gdje je $Q: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ bilinearna forma

$$Q(\vec{r}_S, \vec{r}_T) = R_1^2 x_S x_T + R_2^2 y_S y_T + R_3^2 z_S z_T.$$

Pri tome su Kartezijeve koordinate točaka T'_{AB} i T'_{AC} dane jednakostima (8). Geografske koordinate nisu pogodne za računanje kuta α jer kut ovisi i o duljinama vektora $\vec{r}_{AB}$ i $\vec{r}_{AC}$ koje nisu uvijek iste na elipsoidu.

Za sferni trokut $A'B'C'$ na jediničnoj sferi vrijede Napierove formule (3) ako je trokut pravokutan, teorem o sinusima (4) i teorem o kosinusu (5), samo što sada koristimo preslikane kutove α', β', γ' .

Uočimo da u slučaju sferoida ($R := R_1 = R_2$ polumjer i $h = R_3$ visina) duljina vektora $\vec{r}_S$ ovisi samo o geografskoj širini točke S jer iz (2) slijedi da je

$$\|\vec{r}_S\|^2 = R^2 \cos^2 \varphi_S + h^2 \sin^2 \varphi_S$$

No, vektorski produkt $\vec{r}_{AB} \cdot \vec{r}_{AC}$ i dalje je jednostavnije izračunati u Kartezijevim koordinatama.

Napierove formule i teorem o sinusima nemaju svoj analogon za trokut na elipsoidu, ali može se poopćiti teorem o kosinusu sličnim izvodom kao za Napierove formule², uz korištenje kutova $\theta_{AB} = \angle(\vec{r}_A, \vec{r}_T)$ (kut θ na Slici 3.), koji su u slučaju sfere uvijek $\pi / 2$ zbog Talesovog teorema. No, ti kutovi kod elipsoida opet ovise o udaljenosti od ishodišta, pa ih ne možemo računati bez funkcije Q .

Primjer 2. Phoenix se nalazi na $33^\circ 27'$ sjeverne zemljopisne širine i $112^\circ 4'$ zapadne dužine. Odredimo stranice i kutove trokuta ABC na sferoidnom modelu Zemlje, čiji su vrhovi Zagreb (točka A), Dublin (točka B) i Phoenix (točka C). Odredimo i preslikane kutove na jediničnoj sferi.

Rješenje. Iz Primjera 1 imamo da je $c = 16^\circ 10'$. Na isti način odredimo preostale stranice a i b . U trokutu CBN , gdje je N sjeverni pol, unutarnji kut uz vrh N je

$$\lambda_B - \lambda_C = -6^\circ 15' - (-112^\circ 4') = 105^\circ 49'$$

a stranice uz taj vrh su $90^\circ - \varphi_C = 56^\circ 33'$ i $90^\circ - \varphi_B = 36^\circ 40'$. Iz teorema o kosinusu slijedi da je

$$\cos a = \cos(56^\circ 33') \cos(36^\circ 40') + \sin(56^\circ 33') \sin(36^\circ 40') \cos(105^\circ 49') = 0.30633,$$

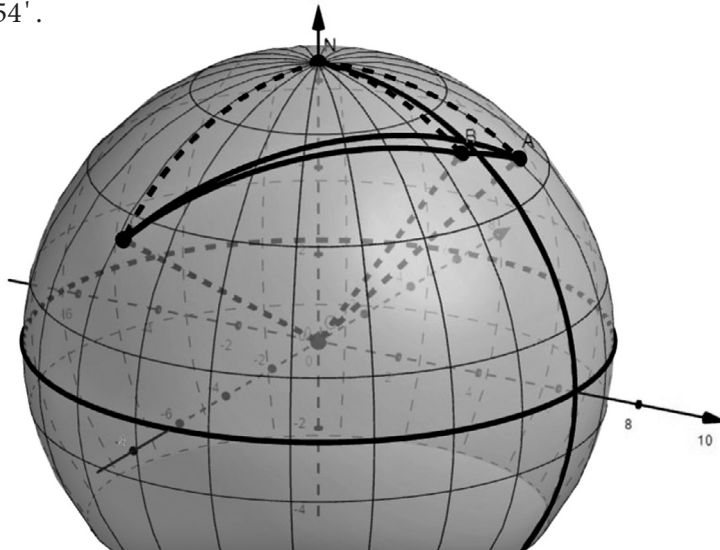
odakle je $a = 72^\circ 10'$. Za trokut CAN , unutarnji kut uz N je

$$\lambda_A - \lambda_C = 15^\circ 58' - (-112^\circ 4') = 128^\circ 2'$$

a stranice uz taj kut su $90^\circ - \varphi_C$ i $90^\circ - \varphi_A$. Dakle,

$$\cos b = \cos(56^\circ 33') \cos(44^\circ 12') + \sin(56^\circ 33') \sin(44^\circ 12') \cos(105^\circ 49') = 0.03678$$

pa je $b = 87^\circ 54'$.



Slika 5. Trokut ABC na Zemlji (približno sfera $R = 6.4$ u umanjenom mjerilu)

Odredimo sada preslikane kutove. Jedan kut, recimo α' možemo odrediti iz stranica trokuta ABC pomoću teorema o kosinusu:

$$\cos \alpha' = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \frac{\cos(72^\circ 10') - \cos(87^\circ 54') \cos(16^\circ 10')}{\sin(87^\circ 54') \sin(16^\circ 10')} = 0.97416.$$

Iz toga slijedi da je $\alpha' = 13^\circ 3'$. Sada iz teorema o sinusima (4) dobivamo

$$\sin \beta' = \frac{\sin b}{\sin a} \sin \alpha' = \frac{\sin(87^\circ 54')}{\sin(72^\circ 10')} \sin(13^\circ 3') = 0.23704,$$

odakle slijedi da je $\beta' = 180^\circ - 13^\circ 43' = 166^\circ 17'$. Na isti način iz teorema o sinusima pomoću a i c dobivamo $\gamma' = 3^\circ 47'$.

Za kutove α, β, γ na sferoidu moramo koristiti formulu (10). Iz (8) imamo

$$\begin{aligned} \vec{r}_{A'B'} &= (-0.18013, -0.89502, 0.40786) \\ \vec{r}_{A'C'} &= (-0.33825, -0.78080, 0.52529) \end{aligned}$$

Možemo provjeriti da je duljina ovih vektora jednaka 1 (približno, zbog zaokruživanja). Uvrštavanjem tih komponenti u (10), uz $R_1 = R_2 = 6378$ i $h = 6356$, dobivamo

$$\cos \alpha = \frac{39561431.1297}{\sqrt{40626480.507} \cdot \sqrt{40601228.4275}} = 0.97409,$$

odakle slijedi da je $\alpha = 13^\circ 4'$. Na isti se način dobiju preostali konjugirani polumjeri, tj. tangencijalni vektori $\vec{r}_{B'A'}$, $\vec{r}_{B'C'}$, $\vec{r}_{C'A'}$ i $\vec{r}_{C'B'}$, te zatim kutovi $\beta = 166^\circ 16'$ i $\gamma = 3^\circ 48'$.

Vidimo da je odstupanje za kutove α, β, γ , kad umjesto sferoida koristimo sferni model Zemlje, najviše $1'$ i to uz zaokruživanje.

4. Duljina luka na elipsoidu. Najkraći put i geodetski trokut.

Ako su $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$ radijvektori koji leže na konjugiranim promjerima glavne elipse kroz točke A i B , onda se elipsa može parametrizirati preslikavanjem²

$$f(t) = (\cos t)\vec{r}_1 + (\sin t)\vec{r}_2,$$

za $t \in [0, 2\pi)$.

Tada je duljina luka⁴ glavne elipse između točaka A i B jednaka

$$l(c) = \int_{t_1}^{t_2} \|f'(t)\| dt,$$

²M. P. do Carmo: *Differential Geometry of Curves and Surfaces* (Prentice-Hall Inc., 1976.)

gdje je $A = f_1(t)$, $B = f_2(t)$ i bez smanjenja općenitosti $t_1 < t_2$. Budući da je

$$f'(t) = -(\sin t)\vec{r}_1 + (\cos t)\vec{r}_2,$$

slijedi da je

$$\|f'(t)\|^2 = f'(t) \cdot f'(t) = (\sin^2 t)(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1) - (\sin 2t)(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2) + (\cos^2 t)(\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_2).$$

Ako su polumjeri $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$ okomiti (to je slučaj ako i samo ako su $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$ poluosi elipse), onda zbog $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = 0$ slijedi da je

$$l(c) = \|\vec{r}_2\|^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{\|\vec{r}_2\|^2 - \|\vec{r}_1\|^2}{\|\vec{r}_2\|^2} \sin^2 t} dt.$$

Ovaj zadnji integral je tzv. eliptički integral druge vrste i on se ne može izraziti pomoću elementarnih funkcija. Općenito definiramo integral

$$E(\varphi, k) := \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt$$

za neku konstantu $0 < k < 1$ te $\varphi \geq 0$. Takav se integral može izračunati približno pomoću prvih nekoliko članova Taylorova reda jer vidimo da je prva derivacija po φ

upravo podintegralna funkcija, tj. $E'(\varphi, k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$.

Posebno zanimljiv slučaj je tzv. potpuni eliptički integral druge vrste $E(k)$, koji se dobije za $\varphi = \pi/2$. Vrijednost toga integrala je četvrtina duljine čitave elipse te se može približno izračunati i bez korištenja redova pomoću tzv. aritmetičko-geometrijske sredine⁵. Taj se pojam definira na sljedeći način: za brojeve $x, y > 0$ definirajmo $a_0 := x$ i $g_0 := y$ te rekurzivno nizove

$$\begin{aligned} a_{n+1} &:= \frac{a_n + g_n}{2}, \\ g_{n+1} &:= \sqrt{a_n g_n} \end{aligned}$$

Tada nizovi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oba konvergiraju prema istom broju

$$M(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$$

koji zovemo aritmetičko-geometrijska sredina brojeva x i y . Taj se broj nalazi između aritmetičke i geometrijske sredine brojeva x i y , tj.

$$\sqrt{xy} \leq M(x, y) \leq \frac{x+y}{2}.$$

⁵<https://mathworld.wolfram.com/Arithmetic-GeometricMean.html> (lipanj 2024.)

Može se pokazati sljedeća formula za potpuni eliptički integral druge vrste:

$$E(k) = \frac{\pi}{2M(1, \sqrt{1-k^2})} \left(1 - \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n-1} c_n^2 \right), \quad (11)$$

gdje je $c_n = \sqrt{|a_n^2 - g_n^2|}$ niz koji konvergira k 0. Dakle, približnu vrijednost integrala možemo dobiti tako da izračunamo prvih nekoliko članova nizova $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, za što nam trebaju samo elementarne operacije.

Zanimljivo je da ti nizovi jako brzo konvergiraju prema zajedničkom limesu: broj točnih decimala broja $M(x, y)$ (prvih nekoliko koje se podudaraju kod brojeva a_n i g_n) otprilike se udvostručuje nakon svake iteracije.

Primjer 3. Da bismo putovali avionom od Zagreba do Phoenixa, moramo presjedati u nekoj od zračnih luka u zapadnoj Europi (recimo u Dublinu). Izračunajmo koliko bi približno bio dugačak put kada bi postojao izravan let od Zagreba do Phoenixa.

Rješenje. Budući da je Zemlja elipsoid koji je gotovo sfera, svaka je glavna elipsa približno kružnica. S obzirom na to da smo u Primjeru 2 dobili središnji kut između Zagreba i Phoenixa $b = 87^\circ 54'$, što je skoro $\pi/2$, za očekivati je da je konjugirani polumjer $\vec{r}_{AC}$ polumjera $\vec{r}_A$ približno jednak $\vec{r}_C$. Da je stvarno tako, možemo provjeriti pomoću formula (9):

$$\sin \varphi_T = z_{T'} = \frac{\sin(33^\circ 27') - \cos(87^\circ 54') \sin(45^\circ 48')}{\sin(87^\circ 54')} = 0.52529$$

$$\operatorname{tg} \lambda_T = \frac{\cos(33^\circ 27') \sin(-112^\circ 4') - \cos(87^\circ 54') \cos(45^\circ 48') \sin(15^\circ 58')}{\cos(33^\circ 27') \cos(-112^\circ 4') - \cos(87^\circ 54') \cos(45^\circ 48') \sin(15^\circ 58')} = 2.30837$$

Iz toga slijedi da je $\varphi_T = 31^\circ 41'$ i $\lambda_T = 66^\circ 35' - 180^\circ = -113^\circ 25'$, što su približno koordinate upravo Phoenixa. Već smo izračunali u Primjeru 2 da je $\|\vec{r}_{AC}\|^2 = 40601228.4275$. Još nam treba

$$\vec{r}_{A'} = (0.67027, 0.19177, 0.71691) \Rightarrow \|\vec{r}_{A'}\|^2 = Q(\vec{r}_{A'}, \vec{r}_{A'}) = 40534799.6438.$$

Budući da su polumjeri $\vec{r}_A$ i $\vec{r}_{AC}$ približno okomiti, slijedi da je tražena udaljenost $l(b) \approx \|\vec{r}_{AC}\| E(k)$, gdje je

$$k = \frac{\|\vec{r}_{AC}\|^2 - \|\vec{r}_A\|^2}{\|\vec{r}_{AC}\|^2} \Rightarrow \sqrt{1-k^2} = 0.99999866154.$$

Računamo jednu iteraciju aritmetičko-geometrijskih nizova:

$$a_1 = \frac{1 + 0.99999866154}{2} = 0.99999933077$$

$$g_1 = \sqrt{1 \cdot 0.99999866154} = 0.99999933077$$

Dalje više ni ne moramo jer imamo čak 11 točnih decimala. Sada iz (11) slijedi da je duljina puta od Zagreba do Phoenixa

$$l(b) \approx \|\vec{r}_{AC}\| \cdot \frac{\pi}{2a_1} \left(1 - \frac{1}{2}(a_0 - g_0)\right)$$

$$= \sqrt{40601228.4275} \cdot \frac{\pi}{2 \cdot 0.99999933077} \left(1 - \frac{1}{2}(1 - 0.99999866154)\right)$$

$$= 10009 \text{ km}$$

Za razliku od sfere, najkraći put od točke A do točke B na elipsoidu nije luk glavne elipse. Taj put općenito na plohi mora biti tzv. geodetska krivulja plohe (Hopf-Rinow teorem⁴), tj. krivulja $(x(t), y(t), z(t))$ čiji je vektor akceleracije $f''(t)$ kolinearan s normalom $\vec{n}$ plohe, koja je u slučaju elipsoida

$$\vec{n}(x, y, z) = \left(\frac{2x}{R_1^2}, \frac{2y}{R_2^2}, \frac{2z}{R_3^2} \right).$$

Ako elipsoid nije sfera, onda normale u točkama (x, y, z) , koje leže na najkraćoj krivulji od A do B , ne leže sve u istoj ravnini, pa ta krivulja ne može biti ravninska, tj. elipsa. Geodetske krivulje na elipsoidu općenito nisu zatvorene, odnosno nemaju konačnu duljinu. U slučaju sferoida, jedine zatvorene geodetske krivulje su svi meridijani (elipse) te ekvator (kružnica).

Za geodetsku krivulju $f(t)$ na rotacijskoj plohi vrijedi Clairutova relacija⁴: $R(t)\sin\theta(t) = \text{const}$, gdje je $R(t)$ udaljenost točke $f(t)$ od osi rotacije, a $\theta(t)$ kut koji tangencijalni vektor $f'(t)$ zatvara s meridijanom kroz točku $f(t)$.

Geodetski trokut ABC je trokut na plohi čije su stranice najkraće krivulje koje spajaju točke A, B, C i taj je pojam poopćenje ravninskog trokuta. S druge strane, trokut čije su stranice lukovi glavnih elipsa poopćava (na drugi način) sferni trokut. Geodetski trokut koristi se za dokaz Gauss-Bonnetovog teorema⁴, fundamentalnog rezultata diferencijalne geometrije, koji daje vezu Gaussove zakrivljenosti plohe s topologijom plohe.