

Nogomet u nastavi matematike

3. razreda srednje škole

FILIP MIJAČ¹ I FRANKA MIRIAM BRÜCKLER²

Uvod

Prema trenutnom kurikulumu [1], u 3. razredima svih gimnazija obrađuju se sljedeće matematičke teme: potencije i opći korijeni, eksponencijalna i logaritamska funkcija, vektori, pravac i kružnica te, na kraju, kombinatorika kao novi dio obveznog kurikuluma. Nakon prethodnih nastavaka, zasigurno vas neće začuditi da se gotovo sve te teme mogu prirodno i realistično povezati s nogometom. I dalje se trudimo predložiti vezu između matematike i najljepšeg sporta na svijetu – nogometa. Budući da se gradivo iz matematike širi, ni nama ne preostaje ništa drugo nego proširiti samu primjenu i zaključiti kako je matematika uistinu gotovo svugdje prisutna. Matematičke metode i koncepti u 3. razredu omogućuju preciznu analizu kretanja igrača i lopte, optimizaciju treninga te bolji uvid u dinamiku igre. Kao i obično, organizirat ćemo ih po matematičkim disciplinama, a ne po redoslijedu gradiva.

Analiza u 3. razredu SŠ

Učenici se u ovom razredu prvi put susreću s eksponencijalnom i logaritamskom funkcijom. Za njih one su nešto novo i nepoznato. Vrlo brzo shvaćaju njihovu korisnost te ih kasnije upotrebljavaju u rješavanjima raznih jednažbi, nejednažbi i drugog.

Eksponencijalne i logaritamske funkcije igraju ključnu ulogu u analizi različitih aspekata nogometa, od modeliranja rasta popularnosti kluba do analize fizičkih performansi igrača, a eksponencijalna se funkcija pojavljuje i u vjerojatnosti (Poissonova distribucija često se koristi kao temeljni model za predviđanje ishoda nogometnih utakmica). Ove matematičke funkcije omogućuju nam razumijevanje složenih procesa koji se odvijaju u nogometu, poput procjene dugoročnih učinaka treninga ili praćenja promjena u performansima tijekom vremena. Korištenjem eksponencijalnih i logaritamskih funkcija možemo bolje predvidjeti i analizirati razvoj situacija na terenu, kao i strategije momčadi u dugoročnom planiranju.

¹Filip Mijač, X. gimnazija Ivan Supek, Zagreb

²Franka Miriam Brückler, PMF – Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu

Primjer 1. Tijekom priprema za sezonu, kondicijski trener prati izdržljivost igrača Marka Pjace. Na početku priprema Pjaca može kontinuirano trčati u visokom intenzitetu 10 minuta. Nakon svakog tjedna treninga njegova izdržljivost raste za 20 %. Trener koristi eksponencijalnu funkciju za praćenje napretka i izračunava koliko će Pjaca moći trčati nakon 4 tjedna. Eksponencijalna funkcija koja opisuje rast izdržljivosti je

$$T(t) = T_0 \cdot (1 + r)^t,$$

gdje je T_0 početna izdržljivost (10 minuta), r stopa rasta (0,20 ili 20 %) i t broj tjedana treninga. Ovdje naravno treba naglasiti da ovakav model vrijedi za kraća vremenska razdoblja, inače bi se izdržljivost neograničeno povećavala.

Rješenje. Izračunajmo izdržljivost nakon 4 tjedna:

$$T(4) = 10 \cdot (1 + 0.20)^4 = 10 \cdot 1,20^4 \approx 10 \cdot 2,0736 \approx 20,74 \text{ min}.$$

Dakle, nakon 4 tjedna treninga trener očekuje da će Pjaca moći trčati 20,74 minuta.

Pokušajmo sada u istom primjeru izračunati za koliko će tjedana njegova izdržljivost (u smislu maksimalnog trajanja trčanja visokim intenzitetom) premašiti 40 minuta. Postavimo nepoznanicu t (vrijeme u tjednima) i riješimo:

$$\begin{aligned} 40 &\leq 10 \cdot 1,20^t \\ 4 &\leq 1,20^t \\ \log 4 &\leq t \cdot \log(1,20) \\ t &\geq \frac{\log 4}{\log(1,20)} \approx 7,6. \end{aligned}$$

Dakle, izdržljivost Pjace premašit će 40 minuta nakon približno 7,6 tjedana.

Svaki trening visokog intenziteta zahtijeva dobru i kvalitetnu rekuperaciju te isto tako odmor kako ne bi došlo do preopterećenosti mišića te samim time i ozljeda igrača. U sljedećem primjeru proučavat ćemo upravo navedeno koristeći logaritamsku funkciju da bismo modelirali kako se izdržljivost sportaša poboljšava tijekom vremena. Ova funkcija odražava stvarnost da sportaš brzo napreduje na početku treninga, a zatim se napredak usporava kako se približava svom punom kapacitetu. Takav obrazac često nalazimo u fiziološkim procesima, što nam omogućuje da preciznije predvidimo i analiziramo napredak sportaša. Među znanstvenim radovima koji se bave takvim modelima možemo izdvojiti istraživanja iz područja sportske fiziologije i oporavka, gdje se koriste logaritamski modeli za praćenje oporavka mišića, srčane frekvencije, razine laktata u krvi i drugih parametara koji se normaliziraju tijekom vremena. Konkretni izvori primjene logaritamskih funkcija u kontekstu sporta mogu se pronaći u knjigama ili radovima o sportskoj fiziologiji i biomehanici ([4] i [5]).

Primjer 2. Nakon utakmice igrač se oporavlja, a brzina oporavka može se opisati logaritamskom funkcijom. Pretpostavimo da se igrač oporavlja prema funkciji

$$\ln(t + 1),$$

gdje je T vrijeme potrebno za potpuni oporavak, a t vrijeme provedeno u oporavku u satima. Koliko je sati potrebno igraču da se oporavi do 90 % svoje maksimalne energije ako je maksimalno vrijeme oporavka 24 sata?

Rješenje. Prvo postavimo jednadžbu, a onda je riješimo koristeći vezu eksponencijalnog i logaritamskog zapisa:

$$0,9 \cdot 24 = \ln(t + 1)$$

$$21,6 = \ln(t + 1)$$

$$e^{21,6} = t + 1$$

$$t = e^{21,6} - 1$$

Izračunavanjem dobijemo da je t vrlo velik broj, što znači da oporavak do 90 % traje praktički zauvijek. Ovdje možemo vidjeti koliko je važno upravljati opterećenjem igrača.

Primjer 3. Temeljni model za predviđanje ishoda utakmica, primjerice za određivanje koeficijenata u kladionicama, poznat je pod nazivom Poissonova razdioba. Prema Poissonovoj razdiobi, ako se nešto – recimo pogotci – pojavljuje m puta u jedinici vremena, onda je vjerojatnost da se u sljedećoj jedinici vremena – recimo utakmici – to nešto dogodi n puta ($n = 0, 1, 2, \dots$) jednaka

$$p_n = \frac{m^n}{n!} e^{-a}.$$

Primjerice, u zadnjih godinu dana reprezentacija Hrvatske odigrala je ukupno 13 utakmica na kojima je postigla ukupno 22 pogotka, odnosno prosječno $m = \frac{22}{13} \approx 1,6923$ pogotka po utakmici. Prema Poissonovoj razdiobi, vjerojatnost da na sljedećoj utakmici s Portugalom (5. rujna 2024., ta utakmica još nije odigrana u trenutku pisanja ovog članka) Hrvatska ne postigne pogodak jednaka je

$$p_0 = \frac{\left(\frac{22}{13}\right)^0}{0!} e^{-22/13} = e^{-22/13} \approx 0,184 = 18,4\%.$$

Analitička geometrija u 3. razredu SŠ

U 3. razredu srednje škole učenici se susreću s vektorima. Prvi ih put uče još u 7. razredu osnovne škole, kada postavljaju temeljna načela, dok sada svoje znanje i gradivo svakako proširuju, a ono što je najveća razlika je kut između dvaju vektora.

U nogometu, vektori igraju ključnu ulogu u analizi kretanja lopte i igrača na terenu. Matematika kroz vektore omogućuje precizno određivanje smjera, brzine i pozicije, što su ključni elementi u strategiji igre. Koristeći vektore možemo analizirati kako vanjski faktori poput vjetera utječu na kretanje lopte, kako se igrači međusobno pozicioniraju te kako dodavanje lopte rezultira promjenom pozicije na terenu. Ovi

matematički koncepti pomažu u razumijevanju i optimizaciji kretanja u igri, čime se poboljšava taktičko djelovanje momčadi.

Primjer 4. Recimo da je na utakmici Hrvatske protiv Albanije Andrej Kramarić udario loptu brzinom od 20 m/s prema jugu. Istovremeno, vjetar puše prema istoku brzinom od 10 m/s. Kolika je resultantna brzina lopte i u kojem se smjeru lopta kreće?

Rješenje. Brzinu lopte možemo predstaviti kao vektor $\vec{v}_1$ prema jugu, a brzinu vjetra kao vektor $\vec{v}_2$ prema istoku. Važno je uočiti da su ta dva smjera međusobno okomita. Rezultatna brzina je vektor $\vec{v}_r = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ čiji iznos dobivamo koristeći Pita-gorin poučak:

$$v_r = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \frac{\sqrt{20^2 + 10^2} \text{ m}}{\text{s}} = \sqrt{500} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 22,36 \text{ m/s}.$$

Smjer resultantne brzine određen je kutom

$$\theta = \arctg \frac{v_2}{v_1} = \arctg \frac{10}{20} \approx 26,57^\circ.$$

Dakle, resultantna brzina lopte koju je udario Kramarić je 22,36 m u smjeru 26, 57° od juga prema istoku.

Primjer 5. Joško Gvardiol i Mateo Kovačić stoje na terenu, Gvardiol na poziciji (2,3) u koordinatnom sustavu terena (određenim koordinatnim osima duž rubova terena, s ishodištem u jednom od kutova te uz jedinicu na koordinatnim osima iznosi 1 m), a Kovačić na poziciji (8,7). Gvardiol dodaje loptu Kovačiću. Koji je vektor premještaja lopte i koja je udaljenost između Gvardiola i Kovačića?

Rješenje. Vektor premještaja lopte od Gvardiola do Kovačića razlika je koordinata Gvardiola i Kovačića:

$$\vec{d} = (8 - 2, 7 - 3) = (6, 4).$$

Udaljenost između Gvardiola i Kovačića stoga je:

$$d = \sqrt{36 + 16} \text{ m} \approx 7,21 \text{ m}.$$

Kombinatorika u 3. razredu SŠ

Glavna je novina u trećem razredu srednje škole uvođenje gradiva kombinatorike u kojoj možemo pronaći izvrsne poveznice sa stvarnim životom pa tako i s nogometom. Prije se ovo gradivo provodilo samo u školama s pet ili više sati matematike tjedno, tj. mogli bismo reći u matematičkim gimnazijama, no došlo je do promjene i sada je to neizostavan dio kurikuluma. Kombinatorika i nogomet naizgled su dvije različite sfere, ali zapravo se često isprepleću, i to ne u onom smislu u kojem izraz *kombinatorika* krivo koriste sportski komentatori. Kombinatorika, grana matematike koja se bavi proučavanjem broja mogućih načina na koje se mogu odabrati ili rasporediti objekti, ima mnoge primjene u nogometu: od planiranja taktike, odabira formacija pa do rasporeda igrača na terenu, kombinatorika omogućava trenerima i igra-

čima da izračunaju i optimiziraju različite strategije koje bi mogle dovesti do pobjede. Primjena ovih matematičkih principa može značajno utjecati na ishode utakmica.

Primjer 6. Trener nogometne momčadi mora odabrati početnih 11 igrača iz grupe od 18 igrača. Na koliko različitih načina trener može odabrati početnu postavu?

Rješenje. Broj kombinacija možemo izračunati pomoću binomnog koeficijenta $\binom{n}{k}$, gdje je n broj ukupnih igrača (18), a k broj igrača koje treba odabrati (11):

$$\binom{18}{11} = \frac{18!}{11!(18-11)!} = \frac{18!}{11!7!} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 31824.$$

Dakle, trener ima 31 824 različita načina za odabir početne postave od 11 igrača iz grupe od 18 igrača.

Naizgled isti, ali ipak ponešto drugačiji sljedeći je primjer u kojem razlikujemo igrače obrane, vezne igrače i igrače napada.

Primjer 7. Trener planira odabrati formaciju 4 – 3 – 3, gdje 4 igrača čine obranu, 3 čine vezni red, a 3 čine napad. Ako trener ima na raspolaganju 7 obrambenih, 6 veznih i 5 napadačkih igrača, koliko različitih formacija može odabrati?

Rješenje. Broj načina za odabir obrambenih igrača (4 od 7):

$$\binom{7}{4} = 35.$$

Broj načina za odabir veznih igrača (3 od 6):

$$\binom{6}{3} = 20.$$

Broj načina za odabir napadača (3 od 5):

$$\binom{5}{3} = 10.$$

Ukupan broj različitih formacija produkt je svih mogućnosti, stoga je $35 \cdot 20 \cdot 10 = 7000$.

Kombinatorikom možemo dosta toga dokazivati, tj. tvrditi zašto nešto vrijedi, a da imamo valjano pokriće. Ponekad standardni matematički dokaz možemo učiniti zabavnijim i razumljivijim koristeći nogometnu interpretaciju ili analogiju. Jedan od takvih primjera slijedi.

Primjer 8. Za $0 \leq k \leq n$ vrijedi $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. Dokaži tvrdnju.

Dokaz. Lijeva strana jednadžbe kaže da od n nogometaša biramo nogometnu ekipu od k nogometaša. Na desnoj strani razlikujemo dva slučaja ovisno o tome uzimamo li u ekipu jednog konkretnog nogometaša, primjerice našeg kapetana – Luku Modrića.

U prvom slučaju Luka Modrić već je izabran u nogometnu ekipu pa je potrebno od preostalih $n - 1$ nogometaša izabrati još $k - 1$ nogometaša. Prema tome, imamo $\binom{n-1}{k-1}$ mogućnosti.

U drugom slučaju Luka Modrić nije dio ekipe jer je, recimo, ozlijeđen pa u ovom slučaju od preostalih $n - 1$ nogometaša trebamo izabrati k nogometaša za nogometnu ekipu, što možemo učiniti na $\binom{n-1}{k}$ načina.

Koristeći princip sume dobivamo upravo zadanu tvrdnju, tj. kombinatorno smo je dokazali.

Zaključak

Analizom primjera iz nogometa u kontekstu matematičkih koncepata 3. razreda srednje škole, jasno je da matematika igra neizostavnu ulogu u modernom sportu. Vektori omogućuju modeliranje putanje lopte i kretanja igrača, dok trigonometrijske funkcije još iz 2. razreda srednje škole pomažu u optimizaciji kutova udaraca i procjeni pozicija na terenu. Eksponencijalne i logaritamske funkcije pružaju alate za analizu fizičkih performansi i dugoročnog napretka igrača. Zaključno, integracija matematike u nogomet nije samo teorijska vježba, već praktičan pristup koji igrači, treneri i analitičari koriste za postizanje vrhunskih rezultata. Ova sinergija naglašava važnost matematičkog obrazovanja kao temelja za inovacije i uspjeh u sportu, čime se jasno pokazuje da matematika nije samo apstraktna disciplina, već i moćno oruđe u razumijevanju i poboljšanju svih aspekata igre. Osim navedenih primjera, još neke primjere prikladne za 3. razred gimnazija možete pronaći i u [3].

Preostao nam je još samo posljednji nastavak ove serije u kojem ćemo vidjeti kako gradivo 4. razreda gimnazije možemo povezati s nogometom. Pritom će se, naravno, pojavljivati i mnogo toga rečenog kroz ovu seriju te će ona postati zaokružena cjelina za koju se nadamo da će biti korisna svim nastavnicima matematike u osmišljavanju zanimljivih zadataka i motivacijskih primjera.

Literatura:

1. Odluka o donošenju kurikulumu za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj. Narodne novine 7/2019. https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html
2. Sofascore, <https://www.sofascore.com/> (2. rujna 2024.)
3. Mijač, F. (2021.), Nogomet u nastavi matematike. Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu
4. Brian J. Sharkley, Steven E. Gaskill (2006.) *Sport Physiology for Coaches*
5. William D. McArdle, Victor L. Katch, Edd, Frank I. Katch (1981.) *Exercise Physiology: Nutrition, Energy and Human Performance*