

Održivi razvoj kroz nastavu matematike

NADA ROGULJIĆ¹, JULIJA MARDEŠIĆ² I ARIJANA BURAZIN MIŠURA³

Sažetak

Matematika kao znanstvena disciplina, ali i kao nastavni predmet, mora imati svoju društvenu ulogu i odgovornost. U 21. stoljeću pitanje održivosti života na planetu Zemlji zapljusnulo je sve sfere života. Svijet, naš globalni dom, divno je mjesto, ali ograničenih prirodnih resursa. Ujedinjeni su narodi 2000. godine donijeli rezoluciju kojom je postavljeno 17 ciljeva održivog razvoja. Danas kao nikad prije uloga matematike u obrazovanju mora biti i promicanje tih ciljeva kroz matematičke teme i sadržaje. Uključivanje tema održivosti u nastavu matematike na svim razinama upravo daje potrebni kontekst matematičkim sadržajima, koji često učenicima nedostaje ili im pak nije blizak, angažirajući u njima i onu emocionalno-iskustvenu razinu.

Na međunarodnoj sceni vidljivi su pomaci u stvaranju integriranih kurikuluma i mnogi se edukatori u području matematike bave tom problematikom tako da stvaraju sadržaje koji se mogu koristiti u nastavi matematike. Brojne su inicijative zaživjele u raznim obrazovnim sferama, poglavito u matematičkom obrazovanju i srodnim prirodnim i tehničkim disciplinama. Matematika planeta Zemlje 2013. (MPE 2013) inicijativa je matematičkih znanstvenih organizacija u svijetu s ciljem iznalaženja načina na koji matematičke discipline mogu biti korisne u rješavanju globalnog svjetskog problema. Također, Ministarstvo znanosti i obrazovanja prepoznalo je taj trenutak i dalo smjernice u dokumentu „Kurikulum međupredmetne teme Održivi razvoj za osnovne i srednje škole” objavljenom 2019. godine.

Svrha je rada prikazati mogućnosti integriranja tema održivosti u kurikulume matematike na više nivoa školovanja i više područja matematike. Na više primjera pokazat ćemo mogućnosti integracije u matematičke kolegije na stručnim studijima [1], zatim i u nastavne teme matematike u srednjim i osnovnim školama. Ponudit ćemo nastavne scenarije kojima je konačna svrha potaknuti nastavnike na njihovo osmišljavanje i trajno razmišljanje o mogućnostima integracije u svoju nastavu.

¹Nada Roguljić, Sveučilišni odjel za stručne studije, Sveučilište u Splitu

²Julija Mardešić, Sveučilišni odjel za stručne studije, Sveučilište u Splitu

³Arijana Burazin Mišura, Sveučilišni odjel za stručne studije, Sveučilište u Splitu

Duboko vjerujemo da je integracija teme održivosti korisna matematici jer joj daje smisleni kontekst, ali i značajan korak u postizanju ciljeva održivog razvoja kroz razvoj matematičkih kompetencija. Doslovno sva pitanja u održivom razvoju zahtijevaju matematičke vještine: mjerenje, procjena, pretvorba jedinica, skaliranje, matematičko modeliranje rasta ili pada, korištenje numeričkih podataka u različitim analizama i razumijevanje ograničenja, kreiranje tablica, stvaranje i razumijevanje grafova... Nadamo se da ćemo ovim radom potaknuti interes onih koji vjeruju da je nastavni proces bitan korak u stvaranju bolje budućnosti.

1. Uvod

Tema održivosti (eng. *sustainability*) i održivog razvoja sveprisutna je u medijima. Definicija održivosti ima mnogo, a ovdje ćemo istaknuti jednu: „Održivost je upravljanje resursima kako bi se zadovoljile trenutne potrebe, a bez stavljanja budućih potreba u rizik, uzimajući u obzir socijalni i ekonomski razvoj i brigu o okolišu.” U 21. stoljeću pitanje održivosti života na planetu Zemlji zapljusnulo je sve sfere života. Svijet, naš globalni dom, divno je mjesto, ali ograničenih prirodnih resursa. Ujedinjeni su narodi 2000. godine donijeli rezoluciju kojom je postavljeno 17 ciljeva održivog razvoja (Slika 1.), [2].



Slika 1. Ciljevi održivog razvoja

Važno je spomenuti i poznati Pariški sporazum o klimatskim promjenama – klimatski sporazum potpisan na 21. zasjedanju Konferencije stranaka (COP 21) Okvirne konvencije Ujedinjenih naroda o promjeni klime (UNFCCC) u Parizu 2015. godine. Glavni je cilj sporazuma održati povećanje temperature ispod 2 °C s obzirom na predindustrijsko doba i provesti mjere ograničavanja rasta globalne prosječne temperature iznad 1,5 °C s obzirom na isto razdoblje.

Problem globalnog zatopljenja, emisije CO₂ i ostalih stakleničkih plinova te niz drugih postali su globalni problemi koji su kapilarno ušli u sve pore društvenog

života, pa tako i u područje obrazovanja. Nama, kao predavačima matematičkih kolegija, posebno je zanimljivo da su matematičke znanstvene organizacije u svijetu svojevremeno pokrenule inicijativu Matematika planeta Zemlje 2013. (MPE 2013) s ciljem pronalaženja načina na koji matematičke discipline mogu biti korisne u rješavanju globalnog svjetskog problema. Danas na mrežnim stranicama ima mnoštvo drugih izvora na kojima su dostupni materijali kojima se u nastavi obrađuju teme održivog razvoja.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja prepoznalo je taj trenutak i dalo smjernice u dokumentu „Kurikulum međupredmetne teme Održivi razvoj za osnovne i srednje škole” objavljenom 2019. godine [3].

2. Motivacija

Matematika kao znanstvena disciplina, ali i kao nastavni predmet, ima svoju društvenu ulogu i odgovornost. Uloga matematike u obrazovanju stoga mora biti i promicanje ciljeva održivog razvoja kroz matematičke teme i sadržaje. Prirodna je to integracija jer mnoga pitanja i problemi održivog razvoja zahtijevaju matematičke vještine: mjerenje, procjena, pretvorba jedinica, skaliranje, matematičko modeliranje rasta ili pada, korištenje numeričkih podataka u različitim analizama i razumijevanje ograničenja, kreiranje tablica, stvaranje i razumijevanje grafova... Upravo uključivanje tema održivosti u nastavu matematike na svim razinama daje potreban kontekst matematičkim sadržajima, koji često učenicima nedostaje ili im pak nije blizak, angažirajući u njima i onu emocionalno-iskustvenu razinu.

Zbog svega navedenog svrha je ovoga rada prikazati mogućnosti integriranja tema održivosti u kurikulare matematike na više nivoa školovanja i više područja matematike. Na više primjera pokazat ćemo mogućnosti integracije u matematičke kolegije na stručnim studijima [1], zatim i u nastavne teme matematike u srednjim i osnovnim školama. Ponudit ćemo nastavne scenarije kojima je konačna svrha potaknuti nastavnike na njihovo osmišljavanje i trajno razmišljanje o mogućnostima integracije u svoju nastavu.

3. Primjeri za nastavnu praksu

3.1. Razina mora

CILJEVI ODRŽIVOG RAZVOJA: 13 ZASTITA KLIME  14 OČUVANJE VODENOG SVIJETA 	MATEMATIČKE TEME: - linearna funkcija - modeliranje - primjena linearne funkcije - problemski zadatci
---	--

Na osnovi podataka dobivenih sa stranice [4] izrađeni su grafovi koji pokazuju promjenu prosječne razine mora (u milimetrima) tijekom vremena, od 1992. do 2021. godine.

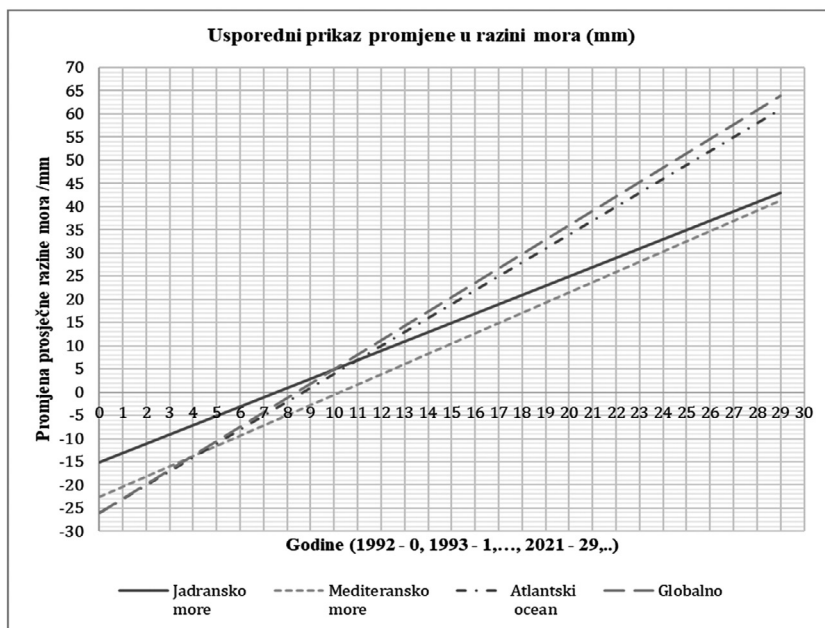
Koristeći podatke iz Tablice 1, upotrebom MS Excela napravljen je usporedni prikaz promjene u razini mora prikazan na Slici 2:

godina	x:	Jadransko more y1	Mediteransko more y2	Atlantski ocean y3	Globalno y4
1992	0	-15	-22,5	-26	-26
1993	1	-13	-20,3	-23	-22,9
1994	2	-11	-18,1	-20	-19,8
1995	3	-9	-15,9	-17	-16,7
1996	4	-7	-13,7	-14	-13,6
1997	5	-5	-11,5	-11	-10,5
1998	6	-3	-9,3	-8	-7,4
1999	7	-1	-7,1	-5	-4,3
2000	8	1	-4,9	-2	-1,2
2001	9	3	-2,7	1	1,9
2002	10	5	-0,5	4	5
2003	11	7	1,7	7	8,1
2004	12	9	3,9	10	11,2
2005	13	11	6,1	13	14,3
2006	14	13	8,3	16	17,4
2007	15	15	10,5	19	20,5
2008	16	17	12,7	22	23,6
2009	17	19	14,9	25	26,7
2010	18	21	17,1	28	29,8
2011	19	23	19,3	31	32,9
2012	20	25	21,5	34	36
2013	21	27	23,7	37	39,1
2014	22	29	25,9	40	42,2
2015	23	31	28,1	43	45,3
2016	24	33	30,3	46	48,4
2017	25	35	32,5	49	51,5
2018	26	37	34,7	52	54,6
2019	27	39	36,9	55	57,7
2020	28	41	39,1	58	60,8
2021	29	43	41,3	61	63,9

Tablica 1. Promjena razine mora (mm)

Odgovori na sljedeća pitanja:

- Što je nezavisna varijabla x , a što zavisna y ?
- Koristeći navedene grafove, odredite ovisnost promjene prosječne razine mora o vremenu.
- Kojom je funkcijom modelirana ta ovisnost?
- Za koje more je stopa godišnjeg rasta najveća?
- Koliko ona iznosi?



Slika 2. Usporedni prikaz razine mora (mm)

- f) Odredi jednadžbe kojima modeliramo godišnji porast razine mora za svako od navedenih mora. Koristi podatke s grafa.
- g) Ako se nastavi ovakav trend, koliki se porast razine Jadranskog mora može očekivati 2050. godine?
- h) Koja se godina koristi kao referentna za Jadransko more?

3.2. Ulov srdele



MATEMATIČKE TEME:

- eksponencijalna funkcija
- modeliranje
- rad s podacima

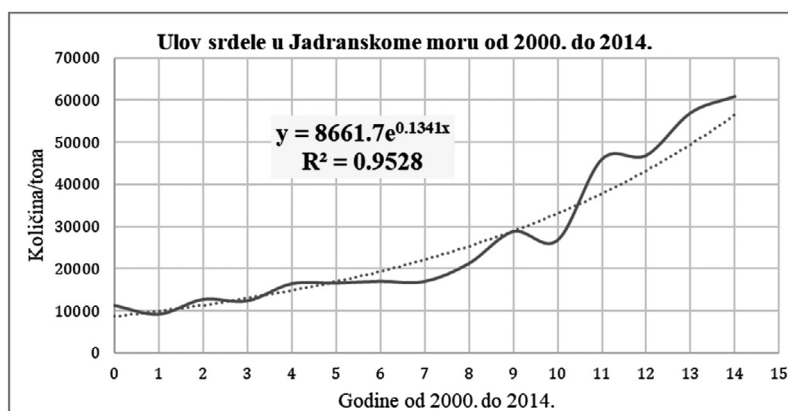
Praćenje godišnjeg ulova ribe i drugih morskih organizama (izraženo u tonama) važno je zbog racionalnog gospodarenja bioresursima. U ovom se primjeru fokusiramo na ulov srdele koja dominira ulovom plave ribe u Jadranskom moru. Podatci su dohvaćeni sa stranica Državnog zavoda za statistiku i organizirani u Excel tablicu.

Kako su autorice već ranije pratile ove podatke [1], zanimljivo je vidjeti promjenu trenda uočenog na podacima do 2014. godine i kasnije na podacima do 2020. godine [5].

Podatci do 2014. godine dani su u Tablici 2, a grafički prikaz i odgovarajući model na Slici 3:

Godina	xt	Srdela/tona y
2000	0	11226
2001	1	9097
2002	2	12626
2003	3	12271
2004	4	16357
2005	5	16521
2006	6	16950
2007	7	16900
2008	8	21194
2009	9	28815
2010	10	26749
2011	11	46051
2012	12	46960
2013	13	57106
2014	14	61036

Tablica 2. Ulov srdele u Jadranskom moru od 2000. do 2014.



Slika 3. Ulov srdele u Jadranskom moru (2000. - 2014.) modeliran eksponencijalnom funkcijom

Za dane podatke izrađen je odgovarajući graf, a podatci su modelirani eksponencijalnom funkcijom koja je bila najbolji izbor sudeći po dobivenom koeficijentu determinacije.

Pitanja pogodna za analizu ovog problema su:

1. Kojom smo funkcijom modelirali godišnju količinu ulovljene srdele?
2. Prema dobivenom modelu, kolika je količina ulovljene srdele u 2000. godini? Kolika je izmjerena vrijednost?
3. Odakle dolazi ta razlika?

4. Kad bi ulov nastavio ovaj eksponencijalni trend, koliki bi bio 2020. godine?
5. Predstavlja li ovakav trend ulova odgovorno gospodarenje morskim resursima?

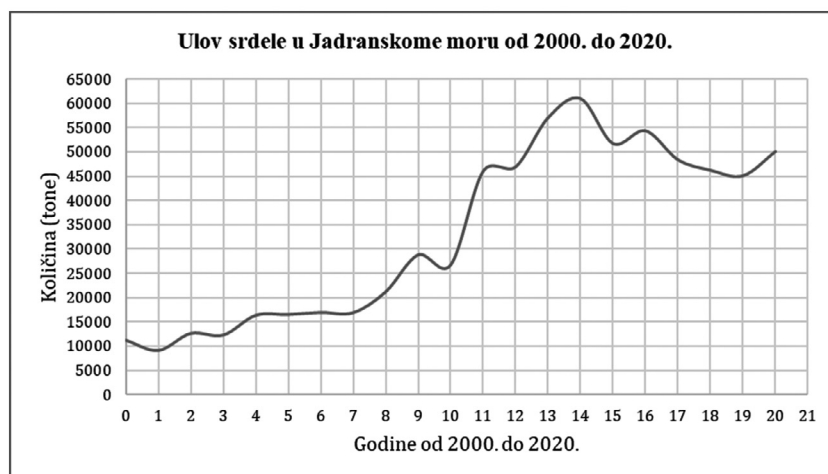
Nakon analize stanja u izlovu srdele do 2014. godine, analiziramo aktualnije podatke do 2020. godine.

Godina	t	Srdela/tona
2000	0	11226
2001	1	9097
2002	2	12626
2003	3	12271
2004	4	16357
2005	5	16521
2006	6	16950
2007	7	16900
2008	8	21194
2009	9	28815
2010	10	26749
2011	11	46051
2012	12	46960
2013	13	57106
2014	14	61036
2015	15	51777
2016	16	54412
2017	17	48420
2018	18	46267
2019	19	45134
2020	20	50134

Ponovno iz podataka prikazanih u Tablici 3. napravimo odgovarajući graf i promatrajući dobiveni graf (Slika 4.) postavljamo dodatna pitanja:

6. Je li ulov srdele slijedio u prethodnom primjeru uočeni trend?
7. Koliki je ulov srdele zabilježen 2020. godine?
8. Koje je godine promijenjen trend izlova srdele?
9. Razmisli koji su mogući razlozi za smanjeni izlov i istraži zašto je došlo do smanjenja ulova?

Tablica 3. Ulov srdele u Jadranskom moru (u tonama) od 2000. do 2020.



Slika 4. Ulov srdele u Jadranskom moru (2000. - 2020.)

Potruga za uzrocima promjene trenda izlazi iz okvira nastave matematike, no nije na odmet povesti raspravu o tome s učenicima/studentima. Ako postoji moguć-

nost uključivanja nastavnika Biologije/Politike i gospodarstva/Ekonomije, s ovim je podacima moguće napraviti i interdisciplinarni učenički projekt.

3.3. Naftne mrlje na moru



MATEMATIČKE TEME:

- problemski zadatci
- aritmetika
- procjenjivanje
- pretvaranje mjernih jedinica

Poznato je da ponekad dođe do incidenata na pomorskim putovima i uz morske bušotine u vidu (ne)namjernog istjecanja većih količina nafte koja poput velike mrlje ostaje na površini mora (istraži zašto i koje su moguće posljedice po riblji fond, potraži pomoć profesora biologije, fizike i kemije) [6].

ODREĐIVANJE POVRŠINE I VOLUMENA NAFTNE MRLJE

1. PROCJENA ILI MJERENJE POVRŠINE MRLJE

Ako je moguće, koristimo satelitske slike pribavljene s nekih od besplatnih platformi [7]. Većina ih omogućava crtanje poligona i automatsko određivanje njegove površine, a ako satelitska slika ne postoji, moguće je na osnovi novinskog izvješća o duljini i širini naftne mrlje grublje je aproksimirati pravokutnikom.

2. PROCJENA DEBLJINE NAFTNOGA SLOJA

Ako raspoložemo satelitskom slikom, moguće je prema boji odrediti približnu debljinu sloja koja ne mora biti uniformna na cijeloj površini, no za potrebe nastave moguće je koristiti minimalnu debljinu sloja naftne mrlje procijenjenu na 1 μm .

3. IZRAČUN VOLUMENA

Volumen nafte koja je iscurila određujemo matematički jednostavno: množenjem površine mrlje i debljine sloja.

Primjer:

1. Došlo je do incidenta pri iskrcaju tankera koji je prevozio naftu. Prije nego je kvar otklonjen, istekla je određena količina nafte. Ako je izmjerena naftna mrlja u luci površine 258 m^2 , uz pretpostavku da je debljina sloja nafte 1 μm , odredi koliko je nafte pri tom incidentu iscurilo. Izrazi taj volumen i u galonima (1 galon = 3,785411784 L).

$$V = S \cdot d$$

$$V = 258 \text{ m}^2 \cdot 1 \mu\text{m}$$

$$V = 258 \text{ m}^2 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$V = 2,58 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$V = 2,58 \cdot 10^{-4} 10^3 \text{ dm}^3$$

$$V = 2,58 \cdot 10^{-1} \text{ L}$$

$$V = 0,06816 \text{ galona}$$

2. Kolika bi bila površina naftne mrlje u slučaju izlivanja 120 galona nafte? Koristi ranije procijenjenu debljinu sloja nafte od $1 \mu\text{m}$.

3.4. Emisija CO₂ iz automobila

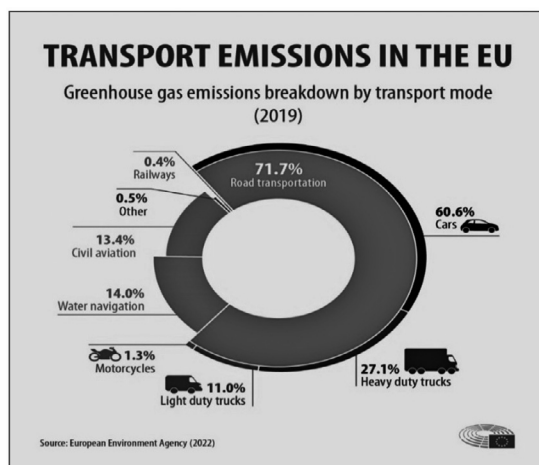
CILJEVI ODRŽIVOG RAZVOJA:			MATEMATIČKE TEME: - problemski zadatci - aritmetika - procjenjivanje - računanje s postotcima
7 PRISTUPAČNA ENERGIJA IZ ČISTIH IZVORA 	11 ODRŽIVI GRADOVI I ZAJEZNICE 	13 ZAŠTITA KLIME 	

Primjer projekta u strukovnoj školi:

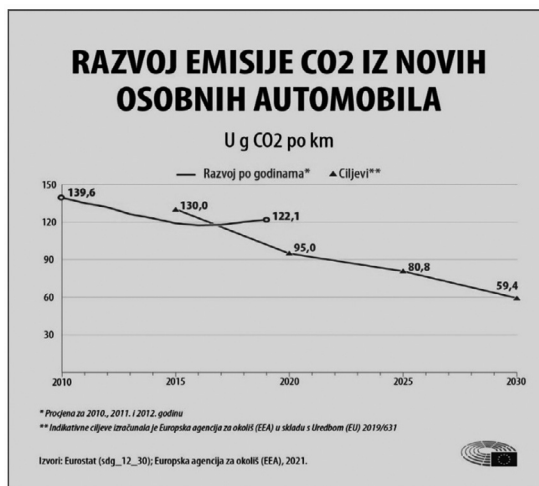
Mate je učenik Srednje tehničke prometne škole u Splitu. Jako voli prirodu, a kako na sreću živi u prigradskom području Splita gdje još nije sve betonirano, rado provodi vrijeme na otvorenom. Vikende provodi kod bake u obližnjem selu Dugobabe igrajući nogomet s prijateljima 'sa sela', uživajući na čistom zraku i u bakinoj spizi. Na satu biologije čuo je o zagađenju zraka, kao i da je glavni krivac za emisiju CO₂ upravo cestovni promet. Matin tata vozi Hyundai i30, ali planira u dogledno vrijeme promijeniti automobil. Želi kupiti model PEUGEOT 3008, ali se premišlja između dizelskog, benzinskog ili hibridnog pogona. Želja mu je električni automobil, ali ga cijenom još ne može sebi priuštiti. Pitao je sina za mišljenje o odabiru vozila. Matu je to motiviralo da potraži informacije i to iskoristi za izradu izvještaja u školskom listu povodom Dana planeta Zemlje 22. 4. o emisiji CO₂ u SD županiji i gradu Splitu. Naravno, da i tati pomogne u odluci. Malo je istražio podatke na internetu i evo što je doznao:

MODEL	vrsta pogona	EMISIJA CO ₂ g/km
Hyundai i 30	B	175
PEUGEOT 3008	B	140
PEUGEOT 3008	D	130
PEUGEOT 3008	H	30

Tablica 4. Emisija CO₂ (u g/km) nekoliko izabranih modela prema različitoj vrsti pogona



Slika 5. Udio emisije stakleničkih plinova različitih prijevoznih sredstava u ukupnoj emisiji uzrokovanoj prometom



Slika 6. Razvoj emisije CO₂ iz novih osobnih automobila (u g/km) od 2010. (s ciljanom projekcijom do 2030.)

Matin tata putuje svaki dan do posla 5 km i nazad. Auto vozi svaki dan jer žive u pri-gradskom naselju. Osim na posao, Mate je procijenio da tata dodatno tjedno prođe 50 km. Svako ljeto odu u posjet drugoj baki koja živi u Hrvatskom zagorju, a udaljenost do nje Mate je procijenio uz pomoć Google mape doznajući da ona iznosi oko 450 km u jednom smjeru. Radi lakšeg izračuna, Mate je odlučio koristiti prosječnu godišnju emisiju koju je izračunao za automobil svoga tate, bez putovanja baki u Zagorje.

1. Što će Mate savjetovati svome tati?

Za potrebe izvještaja za školski list Mate je istražio da je u Splitsko-dalmatinskoj županiji registrirano 160 903 vozila, a u samom gradu Splitu 78 783 vozila.

2. Pomozite Mati napraviti izvještaj za školski list o emisiji CO₂ u Splitsko-dalmatinskoj županiji.

3.5. Prosječna globalna temperatura

CILJEVI ODRŽIVOG RAZVOJA:

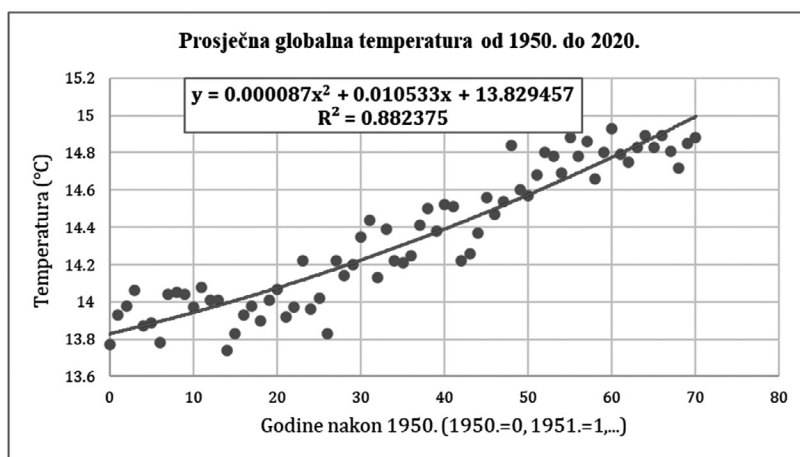


MATEMATIČKE TEME:

- linearna i kvadratna funkcija
- kvadratna jednadžba
- modeliranje
- derivacija funkcije
- jednadžba tangente u točki
- primjena derivacija
- rad s podacima

Svjedoci smo neobičnih vremenskih pojava, ekstremnih vrućina, dugotrajnih suša, snažnih oluja, promjena staništa, isušivanja rijeka, smanjenja šuma... Sve se one smatraju posljedicama klimatskih promjena. Jedan od osnovnih uzroka klimatskih promjena je povećanje globalne temperature. U ovom primjeru modeliramo podatke o prosječnoj globalnoj temperaturi [8].

Za potrebe ovoga primjera dobavljeni su podatci o vrijednosti godišnjih prosjeka globalne temperature od 1950. do 2020. [9]. U radnom listu MS Excela kreira se točkasti dijagram. Uz pomoć opcije Trendline izabere se odgovarajuća funkcija koja najbolje modelira podatke. Kriterij odabira je iznos koeficijenta determinacije R^2 . Slika 7. prikazuje dobiveni model:



Slika 7. Kretanje prosječne globalne temperature od 1950. do 2020. godine

Od studenata/učenika možemo očekivati da nađu rješenja sljedećih problema [10]:

1. *Odredite matematički model koji dobro opisuje kretanje prosječne globalne temperature kao funkcije vremena.*

Dane podatke sa zadovoljavajućim iznosom koeficijenta determinacije R^2 modelira kvadratna funkcija

$$f(x) = 0,000087 \cdot x^2 + 0,010533 \cdot x + 13,829457.$$

2. Upotrebom dobivenog modela prognozirajte globalnu prosječnu temperaturu po dobivenom modelu za navedeni niz godina, kao i porast temperature u odnosu na 2020. godinu.

Tablica 5. prikazuje tražene prognoze:

godina	x /vrijeme od 1950.	prognozirana temperatura °C	promjena temperature u odnosu na 2020.
2025	75	15,11	0,23
2030	80	15,23	0,35
2050	100	15,75	0,87
2100	150	17,37	2,49

Tablica 5. Prognozirane prosječne globalne temperature po dobivenom modelu i promjena u odnosu na 2020.

3. Odredite godišnju stopu promjene prosječne globalne temperature u 2020. godini. Kada se stopa promjene ne bi mijenjala, tj. kada bi ostala na nivou one u 2020. godini, izvršite predviđanja iz gornje tablice.

U sklopu nastavne jedinice Primjena diferencijalnog računa, koja je sastavni dio svakog kurikula visokoškolskog kolegija Matematike (Analize ili sličnog naziva), studenti mogu primijeniti naučeno na ovom primjeru. Odgovarajuće rješenje nalazi se određivanjem nagiba tangente na krivulju u danoj točki. Stoga je potrebno odrediti prvu derivaciju dobivene funkcije i njezinu vrijednost za 2020. godinu ($x = 70$):

$$f'(x) = 0,000174 \cdot x + 0,010533$$

$$f(70) = 0,022713.$$

Možemo reći da je 2020. prosječna globalna temperatura bila 14,88 °C, uz stopu godišnjeg rasta 0,022713 °C. Kada bi stopa ostala ista onoj iz 2020., rast temperature bio bi linearan po modelu:

$$y = 0,022713 \cdot x + 14,88.$$

Predviđanje po tom modelu dano je u Tablici 6.:

godina	x /vrijeme od 2020.	očekivana temperatura	promjena temperature u odnosu na 2020.
2025.	5	14,99	0,11
2030.	10	15,11	0,23
2050.	30	15,56	0,68
2100.	80	16,70	1,82

Tablica 6. Prognozirane prosječne globalne temperature u slučaju linearnog rasta stopom iz 2020.

Poželjno je diskutirati koji je od navedena dva scenarija povoljniji i obrazložiti razlog koristeći znanje o funkcijama.

4. Prema dobivenom modelu iz pitanja 1, odredite koje bi godine očekivana prosječna globalna temperatura dosegla 18 °C.

Ovaj se problem svodi na rješavanje kvadratne jednadžbe

$$0,000087 \cdot x^2 + 0,010533 \cdot x + 13,829457 = 18$$

$$0,000087 \cdot x^2 + 0,010533 \cdot x - 4,170543 = 0$$

$$x_1 = 166,63 \approx 167, x_2 < 0$$

Rješavanjem kvadratne jednadžbe dolazimo do rješenja $x = 166,63$ (2117. godina) i zaključujemo da kad bi se nastavio ovaj trend porasta, prosječna globalna temperatura dosegla bi 18 °C 2117. godine. No, to bi već bilo globalno zatopljenje s katastrofalnim posljedicama za život na zemlji pa se nadamo da će ostati samo u sferi matematičkog zadatka.

Nakon obrade ovakvog sadržaja može slijediti kraća rasprava o uzrocima globalnog zatopljenja, posljedicama na okoliš i život na zemlji, o mogućim scenarijima, o osobnoj odgovornosti pojedinca za moguće promjene. Zainteresirane studente može se uputiti na daljnje proučavanje problematike ili organizirati interdisciplinarni projekt s kolegama iz drugih predmetnih područja.

3.6. Koncentracija CO₂ u zraku

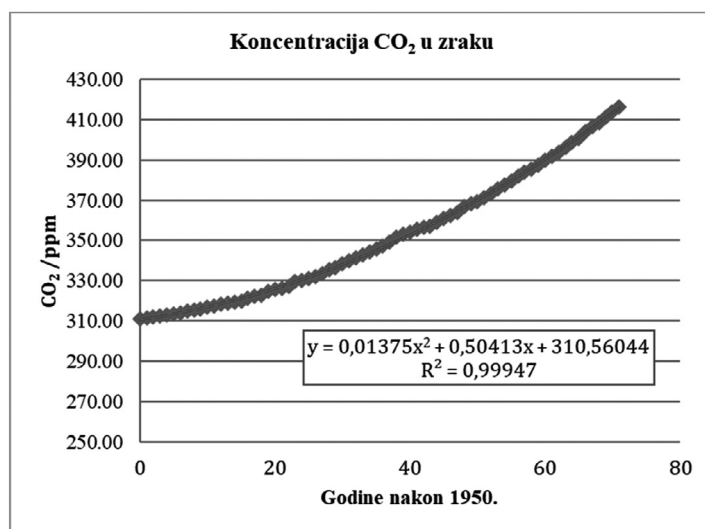
Klimatske promjene posljedica su ekstenzivne potrošnje fosilnih goriva, a praćenje koncentracije CO₂ u zraku jedan je od najznačajnijih pokazatelja onečišćenja

CILJEVI ODRŽIVOG RAZVOJA:			MATEMATIČKE TEME: - linearna i kvadratna funkcija - modeliranje - derivacija funkcije - jednadžba tangente u točki - primjena derivacija - rad s podacima
9 INDUSTRIJA INOVACIJE I INFRASTRUKTURA 	13 ZAŠTITA KLIME 	15 OČUVANJE ŽIVOTA NA ZEMLJI 	

atmosfere. Za potrebe ovog primjera dobavljeni su podaci o vrijednosti godišnjih prosjeka koncentracije CO₂ u zraku u jedinicama ppm ($\text{ppm} = \frac{\text{mg}}{\text{m}^3}$). Podaci su mjereni u atmosferskom opservatoriju na Havajima, Mauna Loa, i dohvaćeni s web stranice [11] za razdoblje od 1959. do 2021, a od 1950. do 1958. povijesni podaci sa [12] (godišnje prosječne vrijednosti CO₂).

Primjer je ovo integriranja teme održivosti u sadržaj kolegija Analiza [8] ili u kurikulum matematike u 4. razredu srednje škole. U radnom listu *MS Excela* kreira se točkasti dijagram. Uz pomoć opcije Trendline izabere se odgovarajuća funkcija koja najbolje modelira podatke. Kriterij odabira je iznos koeficijenta determinacije R^2 . U Tablici 7. prikazani su podaci, a na Slici 8. njihov prikaz s dobivenim modelom.

Godina	Godine nakon 1950. x	CO ₂ ppm y	Godina	Godine nakon 1950. x	CO ₂ ppm y	Godina	Godine nakon 1950. x	CO ₂ ppm y
1950	0	311,26	1975	25	331,08	2000	50	369,52
1951	1	311,74	1976	26	332,05	2001	51	371,13
1952	2	312,22	1977	27	333,78	2002	52	373,22
1953	3	312,70	1978	28	335,41	2003	53	375,77
1954	4	313,22	1979	29	336,78	2004	54	377,49
1955	5	313,73	1980	30	338,68	2005	55	379,80
1956	6	314,25	1981	31	340,10	2006	56	381,90
1957	7	314,77	1982	32	341,44	2007	57	383,76
1958	8	315,28	1983	33	343,03	2008	58	385,59
1959	9	315,98	1984	34	344,58	2009	59	387,37
1960	10	316,91	1985	35	346,04	2010	60	389,85
1961	11	317,64	1986	36	347,39	2011	61	391,63
1962	12	318,45	1987	37	349,16	2012	62	393,82
1963	13	318,99	1988	38	351,56	2013	63	396,48
1964	14	319,62	1989	39	353,07	2014	64	398,61
1965	15	320,04	1990	40	354,35	2015	65	400,83
1966	16	321,38	1991	41	355,57	2016	66	404,30
1967	17	322,16	1992	42	356,38	2017	67	406,60
1968	18	323,04	1993	43	357,07	2018	68	408,60
1969	19	324,62	1994	44	358,82	2019	69	411,50
1970	20	325,68	1995	45	360,80	2020	70	414,00
1971	21	326,32	1996	46	362,59	2021	71	416,10
1972	22	327,45	1997	47	363,71			
1973	23	329,68	1998	48	366,65			
1974	24	330,17	1999	49	368,33			

 Tablica 7. Koncentracija CO₂ u zraku od 1950. do 2021. godine

 Slika 8. Koncentracija CO₂ u zraku od 1950. do 2021. godine, podatci modelirani kvadratnom funkcijom

Od studenata možemo očekivati da odgovore na sljedeća pitanja:

1. *Odredite matematički model koji dobro opisuje kretanje koncentracije CO₂ kao funkcije vremena.*

Dane podatke s vrlo visokim iznosom koeficijenta determinacije R^2 modelira kvadratna funkcija:

$$f(x) = 0,01375 \cdot x^2 + 0,50413 \cdot x + 310,56044$$

2. *Upotrebom dobivenog modela prognozirajte kolika bi bila očekivana vrijednost koncentracije CO₂ 2050. godine.*

Potrebno je uočiti da je 2050. godina supstituirana vremenskom varijablom $x = 100$, a jednostavnim uvrštavanjem u model dobiva se

$$f(100) = 498,47 \text{ ppm.}$$

Dakle, nastavi li kretanje CO₂ ovakav trend, 2050. može se očekivati koncentracija od 498,47 ppm.

3. *Odredite godišnju stopu promjene koncentracije CO₂ u 2021. godini. Kada se stopa promjene ne bi mijenjala, odnosno kada bi ostala na nivou one u 2021. godini, izvršite predviđanja očekivane vrijednosti koncentracije CO₂ 2050. godine.*

Godišnja stopa promjene koncentracije CO₂ odgovara vrijednosti prve derivacije u točki $x = 71$ (2021. godina)

$$f'(x) = 0,0275 \cdot x + 0,504$$

$$f'(71) = 2,4566.$$

Predviđanje za 2050. godinu na bazi stope rasta iz 2021. dobit ćemo uvrštavanjem dobivenih podataka u jednadžbu tangente

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0,$$

gdje je $f'(x_0)$ stopa promjene (nagib tangente) u $x_0 = 71$ (2021. godina), $y_0 = 416,10$ ppm koncentracija CO₂ u 2021. godini, a $x = 100$ (2050. godina), y tražena koncentracija u 2050. godini:

$$y(x) = 2,4566 \cdot (x - 71) + 416,10$$

$$y(x) = 2,4566 \cdot x + 241,68$$

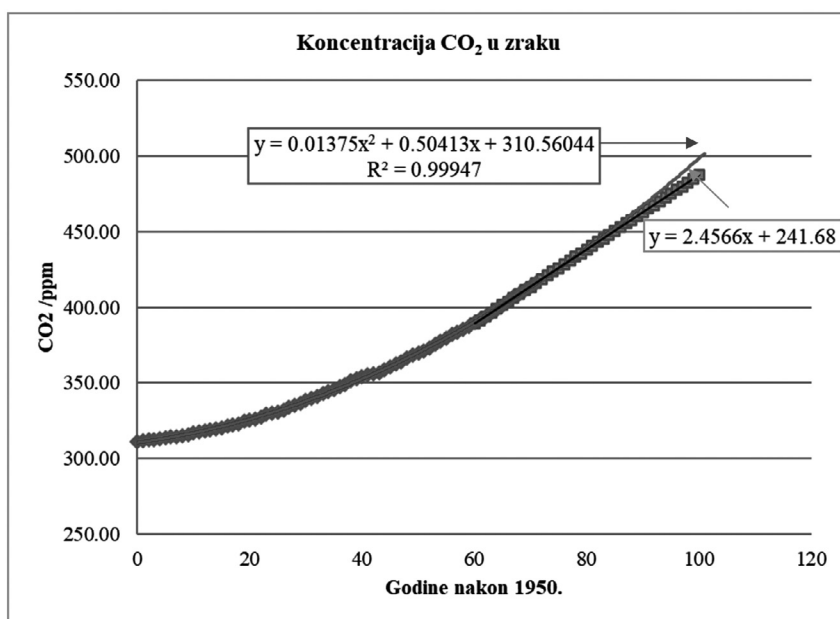
$$y(100) = 2,4566 \cdot 100 + 241,68$$

$$y(100) = 487,34 \text{ ppm.}$$

Tako bi uz istu stopu promjene iz 2021. koncentracija CO₂ 2050. iznosila 487,34 ppm. *Koji je scenarij rasta povoljniji za okoliš i život na zemlji?*

Prethodna razmatranja moguće je obogatiti vizualizacijom scenarija rasta prema kvadratnom modelu ili pak konstantnom stopom iz 2021. (linearni model) Oba su scenarija prikazana na Slici 9.

Prema [13] porast temperature od 1°C na današnju vrijednost globalne prosječne temperature značio bi daljnje zakiseljavanje oceana, slom prirodnih ekosustava, a značio bi i novih 18 – 60 milijuna gladnih u nerazvijenim zemljama. Porast od $1,5^{\circ}\text{C}$ mogao bi dovesti do smanjenja ledenog pokrivača na Grenlandu i podizanja razine mora za 7 m te posljedičnog poplavlivanja obalnog pojasa. Porast od 2°C doveo bi do smanjenja poljoprivrednog prinosa u bogatim zemljama i do nedostatka pitke vode za 1 – 3 milijardi stanovništva. Porast od 3°C značio bi propast ekološkog sustava Amazonske prašume. Porast od 4°C značio bi potpuni gubitak poljoprivredne proizvodnje za čitavu Afriku i Australiju.



Slika 9. Koncentracija CO₂ u zraku od 1950. do 2050. godine modelirana i prognozirana kvadratnom funkcijom; tangenta na krivulju u $x = 71$.

Prema [14] pri koncentraciji CO₂ od 450 ppm vjerojatnost globalnog zatopljenja od 2°C iznosi 50 %.

4. Odredite koje bi se godine mogla dosegnuti ta vrijednost prema dobivenom modelu iz pitanja 1.

Rješenje ćemo dobiti rješavanjem jednadžbe.

$$0,01375 \cdot x^2 + 0,50413 \cdot x + 310,56044 = 450$$

$$0,01375 \cdot x^2 + 0,50413 \cdot x - 139,43956 = 0$$

$$x_1 = 84,0258 \approx 84, \quad x_2 < 0$$

Zaključujemo da bi, ako porast CO_2 nastavi trend modeliran gornjim modelom, kritična razina od 450 ppm mogla biti dosegnuta 2034. godine. Možemo zatražiti od studenata da napišu kratki tekst u kojem objašnjavaju dobivene vrijednosti.

Pitanja za zaključak i daljnju raspravu mogla bi biti:

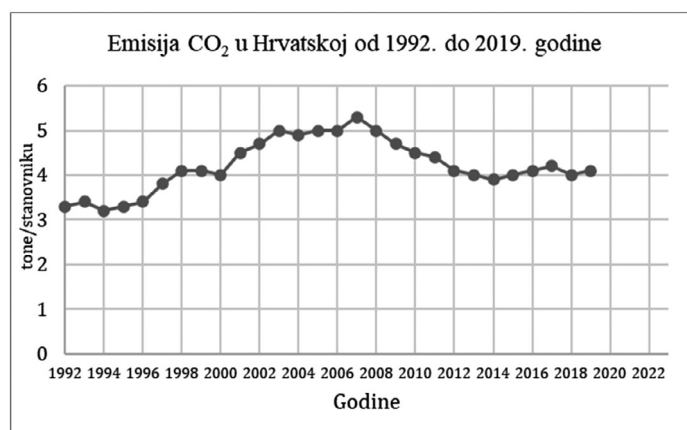
Što mislite bi li se koncentracija 450 ppm dosegnula ranije ili kasnije u scenariju gdje bi rast bio stopom iz 2021. godine? Zašto međunarodna zajednica nastoji ograničiti emisiju CO_2 ? Matematički gledano, što im je za cilj? Kakav bi trebao biti trend promjene koncentracije CO_2 da bismo izbjegli ovakav scenarij?

3.7. Emisija CO_2 u atmosferu (podatci za Hrvatsku)

CILJEVI ODRŽIVOG RAZVOJA:			MATEMATIČKE / STATISTIČKE TEME:
9 INDUSTRIJA INOVACIJE I INFRASTRUKTURA	13 ZAŠTITA KLIME	15 OČUVANJE ŽIVOTA NA ZEMLJI	
			- vremenski nizovi - lančani indeksi - bazni indeksi - rad s podacima

Godina	CO2 emisija tona/stanovniku
1992	3,3
1993	3,4
1994	3,2
1995	3,3
1996	3,4
1997	3,8
1998	4,1
1999	4,1
2000	4
2001	4,5
2002	4,7
2003	5
2004	4,9
2005	5
2006	5
2007	5,3
2008	5
2009	4,7
2010	4,5
2011	4,4
2012	4,1
2013	4
2014	3,9
2015	4
2016	4,1
2017	4,2
2018	4
2019	4,1

Za potrebe ovoga primjera potrebno je dohvatiti podatke o emisiji CO_2 u atmosferu. Kako bi se studenti lakše identificirali s problemom, dobro je preuzeti podatke za Hrvatsku. Podatci su dohvaćeni s web stranice [15]. Obuhvaćena je emisija CO_2 koja nastaje zbog sagorijevanja fosilnih goriva i proizvodnje cementa. Ona uključuje i ugljični dioksid proizveden tijekom potrošnje krutog, tekućeg i plinovitog goriva. Podatci su prikazani tablično (Tablica 8.) i linijskim grafom (Slika 10.):



Slika 10. Emisija CO_2 u RH u tonama po stanovniku

Tablica 8. Emisija CO_2 u RH

Budući ovi podatci ne pokazuju jasan trend tijekom cijelog vremena, moguće je analizirati graf, a i u obradi nastavne teme vremenskih nizova u kolegiju Poslovne statistike koristiti podatke za izračun i interpretaciju baznih i lančanih (verižnih) indeksa. Neka od pitanja koja se mogu postaviti studentima su:

1. *Koje je godine (od početka mjerenja) zabilježena maksimalna emisija CO₂ i koliko je ona iznosila? U usporedbi s 1992. godinom, koliki je porast zabilježen?*

Vidljivo je i iz tabele kao i grafa da je dosadašnji maksimum dosegnut 2007. godine i iznosi 5,3 tona po stanovniku. U odnosu na 1992. zabilježen je porast emisije od 2 tona po stanovniku.

2. *Izračunajte postotnu promjenu emisije u svim godinama promatranog perioda u odnosu na početnu 1992. godinu. Interpretirajte stope promjene za 1994. i 2008. godinu.*

Godine 1994. zabilježeno je smanjenje emisije CO₂ za 3,03 % u odnosu na 1992. godinu, a 2008. godine zabilježen je porast emisije CO₂ u odnosu na 1992. godinu za 51,52 %.

3. *Izračunajte postotnu promjenu emisije u nizu uzastopnih godina (lančane indekse) i pronađite te interpretirajte one indekse koji ukazuju na najveće postotno smanjenje, odnosno povećanje emisije u promatranom vremenskom periodu.*

Najveći pad emisije zabilježen je 2012. godine kada je u odnosu na 2011. emisija smanjena za 6,82 %. Najveći se pak skok u emisiji dogodio 2001. godine kada je zabilježen porast emisije za 12,5 % u odnosu na 2000. godinu.

Izračun lančanih i baznih indeksa (1992. = 100) te pripadnih stopa dan je u Tablici 9.

4. *Koristeći dobivene podatke i izračunate indekse, napišite kratko izvješće za školski/ studentski list o kretanju emisije CO₂ u RH od 1992. do 2019.*

Prateći emisiju CO₂ u RH od 1992. do 2019. vidljivo je da je minimalna emisija u iznosu _____ zabilježena _____ godine. Najveća emisija bila je _____ godine, u iznosu _____. Raspon varijacije emisije iznosi _____. Trend porasta emisije primijećen je od _____ do _____ godine, a promjena trenda zabilježena je od _____ godine. Relativno najveći porast emisije zabilježen je _____ godine, kada je _____ za _____ u odnosu na _____ godinu. Relativno najveći pad emisije zabilježen je _____ godine, kada je _____ za _____ u odnosu na _____ godinu.

Godina	CO2 emisija tona/stanovniku	I(t) 1992.=100	S(t)	V(t)	S*(t)
1992	3,3	100,00	0,00	-	-
1993	3,4	103,03	3,03	103,03	3,03
1994	3,2	96,97	-3,03	94,12	-5,88
1995	3,3	100,00	0,00	103,13	3,12
1996	3,4	103,03	3,03	103,03	3,03
1997	3,8	115,15	15,15	111,76	11,76
1998	4,1	124,24	24,24	107,89	7,89
1999	4,1	124,24	24,24	100,00	0,00
2000	4	121,21	21,21	97,56	-2,44
2001	4,5	136,36	36,36	112,50	12,50
2002	4,7	142,42	42,42	104,44	4,44
2003	5	151,52	51,52	106,38	6,38
2004	4,9	148,48	48,48	98,00	-2,00
2005	5	151,52	51,52	102,04	2,04
2006	5	151,52	51,52	100,00	0,00
2007	5,3	160,61	60,61	106,00	6,00
2008	5	151,52	51,52	94,34	-5,66
2009	4,7	142,42	42,42	94,00	-6,00
2010	4,5	136,36	36,36	95,74	-4,26
2011	4,4	133,33	33,33	97,78	-2,22
2012	4,1	124,24	24,24	93,18	-6,82
2013	4	121,21	21,21	97,56	-2,44
2014	3,9	118,18	18,18	97,50	-2,50
2015	4	121,21	21,21	102,56	2,56
2016	4,1	124,24	24,24	102,50	2,50
2017	4,2	127,27	27,27	102,44	2,44
2018	4	121,21	21,21	95,24	-4,76
2019	4,1	124,24	24,24	102,50	2,50

Tablica 9. Emisija u RH u tonama po stanovniku od 1992. do 2019, bazni indeksi na nivou 1992. godine i lančani indeksi te pripadne stope promjene

4. Zaključak

Integracija tema održivog razvoja čini matematiku društveno angažiranom disciplinom i u učeniku budi iskustveno-emocionalnu razinu koja često izostaje na nastavi matematike. Mišljenja smo da ovakvim primjerima postizemo sinergijski učinak: poučavanje matematike kroz održivost i održivog razvoja kroz matematiku. Priказani primjeri predstavljaju poticaj nastavnicima u osmišljavanju vlastitih primjera u nastavnoj praksi, na različitim razinama obrazovanja. Svaki nastavnik najbolje poznaje svoje učenike i vjerujemo da može prilagoditi sadržaj mogućnostima učenika.

Hoće li se globalno zagrijavanje zaustaviti ili barem usporiti? Hoće li se emisije štetnih plinova smanjiti za 50 % do 2030? Hoće li EU do 2050. postati prvo klimatski neutralno gospodarstvo i društvo (Pariški sporazum 2015.)? Hoćemo li u tome uspjeti, vrijeme će pokazati.

No, odgovornost nije samo na nacionalnim i svjetskim čelnicima, nego i na svakome od nas pojedinačno. Koliko god mislili da smo beznačajni i bez mogućnosti utjecaja na globalna zbivanja, svatko vlastitim aktivnostima može pridonijeti postizanju zajedničkog cilja.

Nadamo se da ćemo ovim radom potaknuti interes onih koji vjeruju da je nastavni proces bitan korak u stvaranju bolje budućnosti.

Literatura:

1. Roguljić, N., Burazin Mišura, A., Krčum, J. (2016.): Podučavanje održivosti kroz matematičke kolegije, zbornik radova sa skupa CIET 2016.
2. <https://sdgs.un.org/goals>
3. https://skolazazivot.hr/wp-content/uploads/2020/06/ODR_kurikulum.pdf
4. NOAA / NESDIS / STAR - Laboratory for Satellite Altimetry / Sea Level Rise
5. <https://dzs.gov.hr/>
6. How we Determine Oil Spill Volume – SkyTruth
7. <https://eos.com/blog/free-satellite-imagery-sources/>
8. Pfaff, Thomas J. (2011.). Educating About Sustainability While Enhancing Calculus. *Primus: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies; Volume 21*(Issue 4), 338-350.
9. <https://data.giss.nasa.gov/gistemp/>
10. <http://www.sustainabilitymath.org/>
11. <http://www.esrl.noaa.gov/gmd/ccgg/trends/index.html#mlo>
12. <https://www.earthpolicy.org/>
13. Warren R. (2006.). Impact of global climate change at different annual mean global temperature increases. In H.J. Schellnhuber et al. (eds), *Avoiding Dangerous Climate Change*. (pp. 93-131). Cambridge University Press, Cambridge.
14. IPCC Fourth Assessment Report Ch. 10
15. <https://data.worldbank.org/country/croatia>