

Nogomet u nastavi matematike

4. razreda srednje škole

FRANKA MIRIAM BRÜCKLER¹ I FILIP MIJAČ²

Uvod

I tako, došli smo do kraja našeg malog serijala u kojemu smo pratili poveznice matematike i nogometa kroz osnovnu i srednju školu. Na kraju srednjoškolskog obrazovanja (kao i u prethodna tri nastavka orijentiramo se na programe zajedničke svim gimnazijama) učenici zaokružuju prethodna znanja i vještine osnovama više matematike. Uz neke druge sadržaje koji se obrađuju u svim gimnazijama, ističemo sljedeće koji će naći prirodnu i stvarnu primjenu u najljepšem sportu na svijetu, nogometu: aritmetički i geometrijski nizovi, svojstva funkcija i njihovih grafova, limesi, derivacije funkcija, neodređeni i određeni integrali, vjerojatnost i statistika. U većini programa potonje uključuje i uvjetnu vjerojatnost, a u programima sa 128 i više sati godišnje obrađuje se i binomna formula [1]. Sve ovo daje nam vrlo bogat raspon poveznica s nogometom, a ovdje ćemo dati odabir nekolicine nama posebno zanimljivih ideja za korištenje nogometa kao motivacije za učenje navedenih pojmova. Podijelit ćemo ih u dvije glavne kategorije – matematičku analizu (grafovi funkcija, limesi, derivacije, integrali) i kombinatoriku, vjerojatnost i statistiku (uključivo binomne formule).

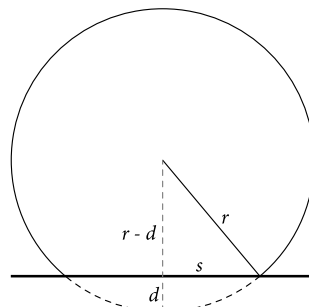
Nogomet u matematičkoj analizi 4SS

Jedna od najvažnijih poveznica matematike i fizike je brzina i njezina veza s derivacijom, što je dio predviđenog nastavnog sadržaja u 4. razredima gimnazija [1]. Vjerujem da je svima očigledno da se u tu poveznicu uklapa i nogomet, stoga dajemo jedan primjer na tu temu. Pritom se moramo ograničiti na kretanja koja su ili pravocrtna ili unutar jedne ravnine jer bi uključivanje svih triju dimenzija (primjerice, za kretanje lopte s utjecajima bočnog vjetrova i Magnusovog efekta) zahtijevalo baratanje funkcijama više varijabli i parcijalnim derivacijama te naprednija znanja iz mehanike fluida. Ovaj primjer prilagođeni je primjer iz [2] (odakle je bio preuzet i u [3], ali uz manje precizno objašnjenje od ovoga).

¹Franka Miriam Brückler, PMF – Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu

²Filip Mijač, X. gimnazija Ivan Supek, Zagreb

Primjer 1. Uzmimo da nogometna lopta mase m koja je prema službenim pravilima [4] unutar raspona 410 g – 450 g, opsega $O = 2r\pi$ u rasponu 68 cm – 70 cm i tlaka p u rasponu 600 g/cm² – 1100 g/cm² (misli se na višak tlaka u odnosu na okolinu) vertikalno padne na tlo. Time će se ona malo deformirati u području kontakta, no s obzirom na to da u nogometu pad lopte na tlo sigurno nije nekom ekstremno velikom brzinom, ta deformacija (Slika 1.) neće bitno promijeniti tlak, pa možemo uzeti da je p konstantan, a konstantni su naravno i m i r . Područje kontakta lopte s tлом bit će kružno, polumjera s ; dubinu deformacije označimo s d (Slika 1). Očigledno je $0 < d \leq r$ i $0 < s \leq r$. Ako znamo da je lopta o tlo udarila brzinom v_0 , koliko će trajati dodir lopte i tla?



Slika 1. Kontakt lopte s tлом pri vertikalnom padu

Prvo razmotrimo geometriju kontakta lopte s tлом. Primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut na slici 1. dobivamo da je $s^2 = 2dr - d^2$. Zapravo, d će u svim normalnim situacijama biti jako mali, pa je $d^2 < d$, štoviše, možemo ga zanemariti u odnosu na $2dr$, odnosno zaključujemo $s^2 \approx 2dr$, pa je površina kontakta P

$$P = s^2\pi \approx 2dr\pi = O \cdot d.$$

Drugo, povežimo se s fizikom. Uočimo da je dubina deformacije zapravo funkcija vremena: $d = d(t)$. Tijekom dodira lopte i tla trenutna brzina $v(t)$ središta lopte u trenutku t povezana je s dubinom deformacije:

$$v(t) = -d'(t).$$

Prema drugom Newtonovu zakonu iznos sile u svakom je trenutku jednak $m \cdot v'(t)$, a s obzirom na to da je jedina sila koja u ovom modelu djeluje na loptu jednaka $p \cdot P(t) = pO \cdot d(t)$, zaključujemo:

$$m \cdot d''(t) = -pO \cdot d(t),$$

odnosno funkcija $d = d(t)$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu oblika $d'' = -C \cdot d$, gdje je $C = pO/m$ konstanta iznosa potpuno određenog pravilima nogometa, tj. opsegom, tlakom i masom lopte. Zgodan zadatak, koji uključuje baratanje algebarskim izrazima (mjerne se jedinice ponašaju kao multiplikativne konstante), ovdje je argumentirati da se iznosi C temeljem navedenih pravila kreću između (zaokruženo na jednu decimalu) $-187,8 \text{ cm}^{-1}$ i $-90,7 \text{ cm}^{-1}$. Naravno, ne očekuje se da bi učenici bili u stanju rješavati diferencijalne jednadžbe na ovoj razini školovanja, no u ovom slučaju može im se postaviti pitanje tipa: „Koja je funkcija, dvaput derivirana, jednaka svojoj suprotnoj funkciji?”. Temeljem iskustva s osnovama deriviranja, učenici bi trebali biti u stanju pogoditi da se radi o kosinusu ili sinusu. Zbog veze sinusa i kosinusa možemo odabrati jedan od njih, recimo sinus, i upitati učenike: „Što se dobije deriviranjem $\sin(5t)$ dva puta? A deriviranjem $3\sin(5t)$? A deriviranjem $3\sin(5t) + 8$? A deriviranjem $c \cdot \sin(at) + b$?”. Tako će uočiti da je $(\sin(at))'' = -a^2\sin(at)$. Usporedbom

s diferencijalnom jednačbom zaključujemo da je $d(t) = c \cdot \sin(at) + b$ uz $C = a^2$, tj. $a = \sqrt{C}$.

Što predstavlja konstanta b ? Ako uvrstimo trenutak dodira lopte i tla ($t = 0$), vidimo da je $b = d(0)$, tj. početna dubina deformacije, a ta je naravno 0. Dakle,

$$d(t) = c \cdot \sin(\sqrt{C}t).$$

Deriviramo li $d(t)$ jednom, dobit ćemo

$$d'(t) = c\sqrt{C} \cdot \cos(\sqrt{C}t).$$

Dakle, $d'(0) = c\sqrt{C}$ i to mora biti početna brzina središta lopte, a to je v_0 . Zaključujemo da je dubina deformacije u svakom trenutku

$$d(t) = \frac{v_0}{\sqrt{C}} \sin(\sqrt{C}t),$$

pri čemu nam je v_0 poznato, a C ima iznos određen nogometnim pravilima. Dodir lopte i tla traje od trenutka $t = 0$ do prve nultoeke funkcije d , a po svojstvima sinusa to je onaj T za koji je $\sqrt{C}T = \pi$. Dakle, trajanje dodira lopte i tla je

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{C}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{pO}{m}}} = \sqrt{\frac{\pi m}{pO}}.$$

Slično kao gore, moglo bi se od učenika tražiti da odrede raspon mogućih vrijednosti za T , no puno važnije bilo bi ovakav primjer zaključiti opažanjem, vjerujemo mnogima neočekivanim, naime da trajanje dodira lopte s tlom ne ovisi o početnoj brzini lopte.

Klasičniji primjer matematičke analize prikladne za 4. razred gimnazija bilo bi razmatranje putanje ispucane lopte u vertikalnoj ravnini kojim bismo izveli formulu parabole koju smo koristili u [5]. Taj primjer nećemo ovdje dati jer je vrlo standardan i nije specifičan za nogomet, a lako ćete ga naći u literaturi, primjerice [2,3]. Umjesto toga, pogledajmo jedan primjer u kojem učenici vježbaju razumijevanje grafa funkcije. Pritom, primjer se tiče vjerojatnosti, ali smo ga svrstali u ovaj odjeljak jer primjer pripada analizi, samo se zaključak odnosi na vjerojatnost.

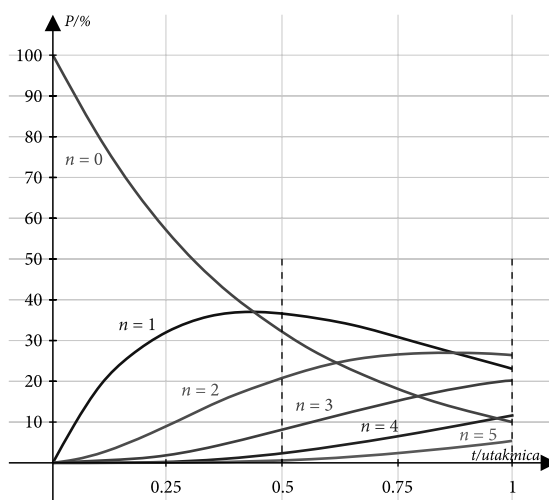
Primjer 2. Kao jedan od temeljnih vjerojatnosnih modela u vjerojatnosnoj analizi i predviđanjima rezultata nogometnih utakmica koristi se tzv. Poissonova razdioba. Prema njoj, vjerojatnost da momčad koja u prosjeku postiže A pogodaka po utakmici, u sljedećoj utakmici do trenutka t postigne neki broj pogodaka n , opisana je funkcijom

$$P_n(t) = \frac{1}{n!} (At)^n e^{-At}.$$

Pritom se t kreće unutar segmenta $[0,1]$, tj. kao mjernu jedinicu vremena uzimamo nepreciznu, ali praktičnu mjeru „1 utakmica”. Primjerice, vjerojatnost da je spomenuta momčad dala 3 pogotka do poluvremena jednaka je

$$P_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{48} A^3 e^{-A/2}.$$

Sada učenicima možemo dati da pomoću derivacija zaključimo kako izgledaju grafovi funkcija $P_0, P_1, P_2, \dots$. Taj posao možemo rasporediti tako da svatko crta samo jedan od grafova, a možemo i ubrzati ako dopustimo korištenje grafičkih kalkulatora (što je u ovom slučaju opravdano jer želimo iz tih grafova izvesti neke zaključke, a uz to, ovisno o iznosu A , grafovi malo variraju – za $0 < n < A$ će prvo rasti pa onda padati, a za $n \geq A$ rast će na cijelom segmentu $[0,1]$).³ Ako želimo koristiti grafički kalkulator, treba zadati vrijednost A . Umjesto zadavanja „napamet”, zgodnije je odabrati momčad za koju ćemo crtati grafove. Mi ćemo ovdje upravo tako učiniti. Uzmimo turskog prvoligaša, istambulski Fenerbahçe. Od početka sezone (9. kolovoza 2024.) do danas (27. studenog 2024.) oni su odigrali 18 utakmica, od kojih je jedna bila prijateljska. Budući da imamo razumno velik broj utakmica u razumno kratkom periodu (oko tri i pol mjeseca) iz kojih možemo uzeti podatke, zanemarit ćemo prijateljsku utakmicu, ali uzeti u obzir sve ostale. Prema podacima iz [6], u ovom je razdoblju Fenerbahçe postigao 39 pogodaka, odnosno prosjek pogodaka po utakmici mu je $A = 39/17 \approx 2,29$. Stoga ćemo crtati grafove za n od 0 do 5 (malo više od dvostrukog prosječnog broja pogodaka Fenerbahçe). Dobit ćemo grafove kao na Slici 2.



Slika 2. Ovisnosti vjerojatnosti da Fenerbahçe na sljedećoj utakmici (nakon 27.11.2024.) postigne 0, 1, 2, 3, 4, 5 pogodaka o vremenu

Sada možemo diskutirati što sve možemo zaključiti iz grafova poput ovih na Slici 2. Ovdje navodimo samo neke od mnogih mogućnosti (u zagradama su dani odgovori za našu konkretnu situaciju):

- Zašto je neovisno o A funkcija P_0 sigurno padajuća? (Zato jer svaki klub, neovisno o tome kako slab bio, tijekom utakmice ipak bar povremeno postiže pokoji pogodak pa se s vremenom smanjuje vjerojatnost da ne dade ni jedan.)

³Dokaz posljednje tvrdnje zgođan je zadatak za naprednije učenike.

- Koji je najvjerojatniji broj pogodaka koje će promatrana momčad dati do poluvremena? (Poluvrijeme imamo za $t = \frac{1}{2}$ i za Fenerbahçe vidimo da je tad najveći iznos funkcije P_1 , dakle najvjerojatnije je da će do poluvremena postići 1 pogodak.)
- Kolika je vjerojatnost da će promatrana momčad unutar nekog vremena dati najviše neki broj pogodaka, npr. da unutar prve šestine utakmice postigne najviše 1 pogodak? (Odgovor na to je zbroj $P_0(1/6) + P_1(1/6)$, što bismo mogli izračunati uvrštavanjem u formulu funkcija P_n , ali zgodnije je jednostavno približno očitati s grafova. Za slučaj Fenerbahçe ta će vjerojatnost biti približno 69 % (vjerojatnost da za $t = 1/6$ još nisu postigli pogodak) plus približno 25 % (vjerojatnost da su do $t = 1/6$ postigli točno jedan pogodak), dakle 94 %.)
- Kada će postati vjerojatnije da promatrana momčad postigne više od određenog broja pogodaka, primjerice, kada će postati vjerojatnije da postigne barem dva pogotka? (Za Fenerbahçe gledamo t za koji će P_2 postati veći od P_1 , a to je otprilike 0,87, dakle ako uzmemo da utakmica traje 90 minuta, nakon $0,87 \cdot 90$ minuta, tj. približno nakon 78. minute sljedeće po redu utakmice.)

Nogomet u vjerojatnosti i statistici 4SS

Binomni poučak temelj je jedne važne vjerojatnosne razdiobe koja nalazi niz primjena u analizi i predviđanju ishoda nogometnih utakmica. Radi se o binomnoj razdiobi. Promotrimo slučajni pokus „igrač momčadi ♥ puca prema protivničkim vratima”. Taj pokus ima dva moguća ishoda – ili je momčad ♥ dala gol (to će se dogoditi s nekom vjerojatnosti p) ili nije (što će se dogoditi s vjerojatnosti $1 - p$). U tom smislu, spomenuti pokus je bar približno ono što u vjerojatnosti zovemo Bernoullijevim pokusom. Tijekom utakmice, igrači momčadi ♥ ponavljaju taj pokus neki broj puta. Naravno, u strogom smislu pokušaji postizanja zgoditka nisu međusobno nezavisni niti je u svakom pokušaju vjerojatnost postizanja zgoditka ista (tj. p nije konstanta), štoviše, gađanje vrata nije sasvim slučajni događaj, ali za jednostavni model (koji će čak i dati dosta dobra podudaranja sa stvarnosti) možemo uzeti da sve to vrijedi. Stoga je vjerojatnost $\heartsuit(n, k)$ da momčad ♥ tijekom utakmice postigne k zgoditaka u n pokušaja bar približno opisana formulom binomne razdiobe

$$\heartsuit(n, k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{n-k}.$$

Glavni problem ovdje nije taj što se ne radi egzaktno o binomnoj razdiobi, nego kako procijeniti iznos p za konkretnu momčad ♥ s konkretnim protivnikom. No, upravo razmišljanje o tome kako razumno dobro procijeniti p izvrstan je uvod u ozbiljniju vjerojatnost i statistiku.

Prvo primijetimo da se p ne može egzaktno odrediti, ali da je razumno za njegovu procjenu koristiti statističke podatke o momčadi ♥. Koji su podatci važni? Budući da se radi o vjerojatnosti davanja zgoditka u nekom broju pokušaja, razumno je reći

da su nam bitni podatci o brojevima danih zgoditaka i brojevima udaraca prema vratima iz utakmica u prethodnom razdoblju. Koliko dugo prethodno razdoblje je razumno uzeti, tj. koliko prethodnih utakmica uzeti u obzir? Odgovor na ovo pitanje nije jednoznačan, ali svakako treba biti bar nekoliko prethodnih utakmica, ali opet ne predugo razdoblje – ako uzmemo u obzir premalo utakmica, podatci mogu biti potpuno irelevantni, a ako pak uzmemo razdoblje od više godina, onda pak uzimamo u obzir igre s potpuno drugačijom momčadi od aktualne.

Nastavit ćemo to razmišljanje na konkretnom primjeru koji se lako generalizira ili prilagodi osobnim preferencijama. U ovom slučaju, primjer nam nije jednostavno riješen zadatak, već potpun uvod u ovu tematiku, inspiriran izvorom [7]. Uz to, skupljanje statističkih podataka može biti zabavan zadatak koji lako rasporedimo na učenike tako da svatko obavi dio posla.

Primjer 3. Turski prvoligaš Fenerbahçe trenutno igra u dva natjecanja: turskoj prvoj ligi Süper Lig i u UEFA Europskoj ligi (nakon neuspješnih kvalifikacija za Ligu prvaka). Sljedeća im je utakmica, u trenutku pisanja ovog članka, utakmica UEFA Europske lige 28. 11. 2024. kad će im protivnik biti češka Slavia Praha (kad budete čitali ovaj članak, već će biti poznat rezultat te utakmice). Koja je vjerojatnost da Fenerbahçe na toj utakmici postigne najviše 2 pogotka?

Već smo u prethodnom primjeru vidjeli da je Fenerbahçe (FB) u razdoblju 9. 8. – 27. 11. 2024. u prosjeku postizao $39/17 \approx 2,29$ pogodaka po utakmici. Također, na [6] možemo naći podatke o brojevima upućenih udaraca prema protivničkim vratima. Podatke o tim pokušajima i postignutim zgoditcima zapisali smo u tablici 1 te vidimo da je FB u prosjeku po utakmici uputio $253/17 \approx 14,88$ udaraca prema protivničkim vratima. Možemo reći i ovako: uspješnost udaraca prema protivničkim vratima bila je $39/253 \approx 15,42\%$.

Zamislimo na tren da Fenerbahçe u svakoj utakmici upućuje točno 6 udaraca na protivnička vrata i da u prosjeku u 1 od tih 6 pokušaja postigne zgoditak. Tada bismo mogli simulirati sljedeću utakmicu (točnije, samo stranu Fenerbahçe) tako da bacamo kockicu 6 puta („6 puta Fenerbahçe gađa protivnička vrata”) i zabilježimo koliko je puta pala jedinica (koliko je puta „Fenerbahçe postigao zgoditak”). No, u ovom slučaju mogli bismo i teorijski lako zaključiti da je najvjerojatnije da Fenerbahçe u sljedećoj postigne 1 zgoditak, a vjerojatnosti za sve moguće brojeve zgoditaka ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$) računali bismo koristeći formulu binomne raspodjele s $n = 6$ i $p = 1/6$.

Naša situacija nije puno drugačija – Fenerbahçe u 39 od 253 udaraca postigne zgoditak, što je kao da bacamo kockicu s 253 strane, a gledamo kad će pasti neki od brojeva 1 – 39. Dakle, za Fenerbahçe za sljedeću utakmicu možemo uzeti da je $p = 39/253 \approx 15,42\%$, što ćemo radi jednostavnosti računa zaokružiti na 15 %. Dakle, ako na utakmici sa Slavijom Praha Fenerbahçe uputi n udaraca, vjerojatnost da će postići 0 zgoditaka je

$$FB(n,0) = \binom{n}{0} 0,15^0 \cdot 0,85^n = 0,85^n,$$

vjerojatnost da će postići 1 zgoditak je

$$FB(n,1) = \binom{n}{1} 0,15^1 \cdot 0,85^{n-1} = \frac{15}{85} n \cdot 0,85^n = \frac{3}{17} n \cdot 0,85^n,$$

a vjerojatnost da će postići 2 zgoditka je

$$FB(n,2) = \binom{n}{2} 0,15^2 \cdot 0,85^{n-2} = \frac{15^2}{85^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \cdot 0,85^n = \frac{9}{578} n(n-1) \cdot 0,85^n.$$

Utakmica	Broj upućenih udaraca	Broj pogodaka
FB – Adana DS	12	1
FB – Lille	15	1
Göztepe – FB	14	2
Rizespor – FB	19	5
FB – Alanyaspor	19	3
Kasımpaşa – FB	6	2
FB – Galatasaray	25	1
FB – USG	10	2
Antalyaspor – FB	14	2
Twente – FB	6	1
Samsunspor – FB	12	2
FB – Man Utd	10	1
FB – Bodrum	19	2
Trabzonspor – FB	20	3
AZ – FB	11	1
FB – Sivasspor	24	4
Kayserispor – FB	17	6

Tablica 1. Brojevi pogodaka i brojevi upućenih udaraca prema protivničkim vratima za Fenerbahçe (FB) u razdoblju 9. 8. – 27. 11. 2024.

Dakle, vjerojatnost da će Fenerbahçe na utakmici sa Slavijom Praha postići najviše dva zgoditka je

$$FB(n,0) + FB(n,1) + FB(n,2) = P.$$

No, da bismo to do kraja izračunali, trebali bismo znati koliko puta (n) će Fenerbahçe pucati prema vratima Slavije, što ne možemo znati. Najjednostavnija opcija je

pretpostaviti da će pucati svoj zaokruženi prosječni broj udaraca prema vratima, tj. uzeti $n = 15$. Alternativno, mogao bi se uzeti prosječni broj udaraca u odgovarajućem natjecanju u određenom razdoblju (ovdje u UEFA Europskoj ligi ove jeseni),⁴ a postoje i još neke druge mogućnosti koje ostavljamo za diskusiju. Uz $n = 15$ dobivamo rješenje našeg zadatka: S vjerojatnošću $P \approx 60,42\%$ (da nismo zaokružili p na 15 ispalo bi približno 58,61 %).

Naravno, za bolju procjenu vjerojatnosti pojedinih mogućih rezultata trebalo bi uzeti u obzir i statistiku Slavije Praha. No, za opis toga trebao bi zaseban članak, kakav ćemo zasigurno jednom i napisati, a zasad za odgovor na pitanje kako procijeniti vjerojatnost pojedinog rezultata upućujemo na literaturu [7,8].

Umjesto toga, ovaj odjeljak, a time i popis primjera u našem serijalu, zaključujemo vjerojatnosnim i statističkim dokazom onoga što iskustveno svi znamo:

Nogomet je najuzbudljiviji sport na svijetu!

Primjer 4. Kako bismo mogli dokazati gornju tvrdnju? Jedan način bio bi statistički, a taj su za nas već poodavno obavili znanstvenici *Los Alamos National Laboratory* [9]. Oni su naime 2006. napravili opsežnu analizu rezultata preko 300.000 utakmica tijekom više od stoljeća iz pet popularnih sportova: nogomet (engleska Premier League), bejzbol (sjevernoamerička Major League Baseball), hokej (sjevernoamerička National Hockey League), košarka (NBA) i američki nogomet (NFL). Tako su izračunali da su od tih sportova neočekivani rezultati (u smislu da u nekoj utakmici pobijedi momčad koja je po prethodnim statistikama slabija) najčešći u nogometu. Budući da je nepredvidljivost ishoda značajan faktor u oduševljenju sportom, ovo je svakako nešto što potvrđuje, iako ne dokazuje našu tvrdnju.

No, tvrdnji možemo pristupiti i teorijski. Neka se na nekoj utakmici susretnu dvije momčadi koje su u odabranom prethodnom razdoblju davale u prosjeku A odnosno B pogodaka po utakmici. Uzmimo da je $A \geq B$, tj. da možemo reći da je prva momčad objektivno jača od druge. Konkretno, neka se radi o utakmici Fenerbahçe : Athletic Bilbao koja će se odigrati 11. prosinca 2024. U razdoblju koje smo u prethodnom primjeru razmatrali za Fenerbahçe, Athletic je odigrao 18 službenih utakmica [6], a na njima je postigao 26 pogodaka. Dakle, Fenerbahçe prosječno daje $39/17 \approx 2,29$ pogodaka po utakmici, a Athletic prosječno njih $26/18 \approx 1,44$, odnosno čini se da će u taj susret Fenerbahçe ući kao favorit s $A = 39/17$, dok je $B = 26/18$. Kako bismo iz toga mogli izračunati vjerojatnost p da prvi pogodak na toj utakmici dađe Fenerbahçe (a onda je vjerojatnost da prvi pogodak dađe Athletic jednaka $q = 1-p$)? Možemo jednostavno pretpostaviti da je omjer tih vjerojatnosti jednak omjeru prosjeka pogodaka:

$$p : q = A : B.$$

⁴Prosječan broj upućenih udaraca po utakmici u većini je liga unutar raspona 10 – 20, primjerice nakon prvih 11 kola njemačke Bundeslige tamo je taj broj u trenutku pisanja ovog članka 19,55.

Rješavanjem sustava koji se sastoji od te jednadžbe i jednadžbe $q = 1 - p$ (uočite li-jep lagani zadatak iz algebre) dobivamo da je $p = 27/44 \approx 61,36\%$ i $q = 17/44 \approx 38,64\%$.⁵

Znamo da će na utakmici pasti neki broj pogodaka n gdje n može biti 0, ali je gotovo nemoguće da bude dvoznamenkast broj. Tabelirajmo vjerojatnosti dobivene formulom binomne razdiobe za n od 0 do 9 uz navedene p i q (Tablica 2. koju je najlakše dobiti koristeći neki program za tabličnu obradu podataka). Primjerice, ako bismo znali⁶ da će na utakmici pasti $n = 3$ pogotka, vjerojatnost da Fenerbahçe dade $k = 2$ od njih, tj. da utakmica završi rezultatom 2:1, jest 43,65 %. Za Athletic su povoljne sve situacije u kojima nije izgubio utakmicu, tj. u kojima je $n - k \geq k$ (osjenčana polja u Tablici 2.). Zbrojimo li sve te vjerojatnosti za pojedine n dobit ćemo ovisnost vjerojatnosti da Athletic ne izgubi utakmicu (tj. iznenadi favorita) o ukupnom broju pogodaka na utakmici (Slika 1.). Uočimo da te vjerojatnosti i nisu tako male, ali imaju tendenciju pada s porastom broja pogodaka – što je ukupan broj pogodaka na nekoj utakmici veći, šanse favorita za pobjedu postaju izrazitije (što objašnjava zašto su, primjerice, u košarci rjeđi neočekivani rezultati nego u nogometu). Razlog tome je što potencije pozitivnih brojeva manjih od 1, a takve su vjerojatnosti p i q , padaju s porastom eksponenta: $0,15^2$ je, primjerice, znatno veće od $0,15^{20}$. Uočimo i da se ne radi o strogom padu s porastom n – uzrok je naravno jednostavan: za svaki neparan n sljedeći veći broj $n + 1$ je paran, a za paran broj pogodaka na utakmici slabiji nije izgubio čak ni kad je rezultat izjednačen.

Sve ovo ovdje izveli smo s konkretnim A i B , no dalo bi se (ne baš jednostavno) dokazati i za sve ostale $A \geq B$. Također, da smo umjesto utakmice s Athletic Bilbaom uzeli utakmicu iz prethodnog primjera (Fenerbahçe – Slavia Praha), u kojoj je Slavia Praha blagi favorit u smislu definiranom u ovom primjeru (prosjeck broj pogodaka po utakmici joj je $37/16 = 2,3125$, znatno veći od Fenerbahçeovog), vjerojatnosti da Fenerbahçe ne izgubi bi bile mnogo bliže vjerojatnostima pobjede Slavije (i za razmatrani raspon ukupnog broja pogodaka ne bi padale ispod 49 %).

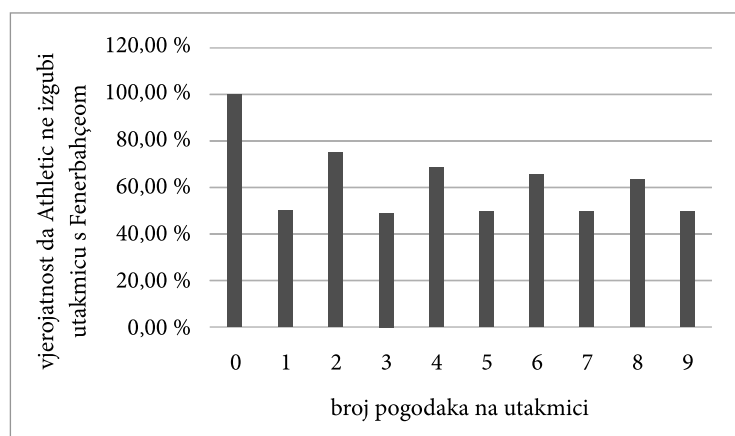
Napominjemo, naravno, da se opisani primjeri nikako ne smiju shvatiti kao „konačni” u smislu da sad na kraju srednje škole znamo računati vjerojatnosti, primjerice, pobjede naše omiljene momčadi u sljedećoj utakmici. Dijelom je to očigledno (uz prosjeke danih pogodaka na takve vjerojatnosti utječu i prosjeci primljenih pogodaka, uloga domaćina i gosta, razlike u ligama iz kojih su podatci uzimani, povijesni ogledi razmatranih momčadi, bolesti ključnih igrača, prognoza vremena, ...). No, važno je uočiti i matematički razlog. Naime, ako pogledamo unatrag kroz naš serijal, vidimo da su postupno, kako se učeničko znanje matematike povećavalo, računani vjerojatnosti postajali sve realističniji. Kao što i matematika kao znanost nikad ne postiže konačno stanje iz kojeg se ne bi dalje razvijala, tako je i ovdje jasno – ako bismo naučili još malo više matematike, mogli bismo još bolje modelirati nogometnu stvarnost, ali što smo bliži realnosti, to je i odgovarajuća matematika kompliciranija.

⁵Opcenito će p biti jednak $R/(1+R)$, gdje je $R = A/B$.

⁶Uočite vezu s uvjetnom vjerojatnosti!

$n \ k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	100,00 %									
1	38,64 %	61,36 %								
2	14,93 %	47,42 %	37,65 %							
3	5,77 %	27,48 %	43,65 %	23,11 %						
4	2,23 %	14,16 %	33,73 %	35,71 %	14,18 %					
5	0,86 %	6,84 %	21,72 %	34,49 %	27,39 %	8,70 %				
6	0,33 %	3,17 %	12,59 %	26,65 %	31,75 %	20,17 %	5,34 %			
7	0,13 %	1,43 %	6,81 %	18,02 %	28,62 %	27,28 %	14,44 %	3,28 %		
8	0,05 %	0,63 %	3,51 %	11,14 %	22,12 %	28,10 %	22,32 %	10,13 %	2,01 %	
9	0,02 %	0,27 %	1,74 %	6,46 %	15,38 %	24,43 %	25,87 %	17,61 %	6,99 %	1,23 %

Tablica 2. Vjerojatnosti da Fenerbahçe postigne $k = 0 - 9$ zgoditaka na utakmici s Athletic Bilbao ako bismo unaprijed znali ukupan broj pogodaka ($n = 0 - 9$) na toj utakmici (prema podacima od 27. 11. 2024.).



Slika 3. Ovisnost vjerojatnosti da Athletic Bilbao ne izgubi utakmicu s Fenerbahçeom 11. 12. 2024. (temeljem podataka raspoloživih 27. 11. 2024.)

Zaključak

Došavši do kraja srednjoškolskog obrazovanja, poput učenika na maturi, i mi se opraštamo od vas, dragi čitatelji, u nadi da će vam ovaj serijal biti koristan ne samo za preuzimanje „gotovih” ideja, nego da će vas inspirirati za osmišljavanje vlastitih primjera na temu veza nama najdraže znanosti, matematike, i nama najdražeg sporta, nogometa. Sigurni smo da ste uočili da su itekako povezani. Uz primjere koje smo vidjeli kroz ovih dvanaest nastavaka, dodatne primjere možete naći i u [10,11]. Također, postoji niz poveznica (pa čak i znanstvenih istraživanja) između matematike i nogometa koje nisu izravno dijelom kurikuluma, ali nemali broj njih prikladan je za

dodatnu i/ili projektnu nastavu matematike u osnovnoj, a pogotovo srednjoj školi jer ne zahtijevaju sveučilišnu razinu znanja matematike. Poneki takav primjer zasigurno ćemo u budućnosti podijeliti s vama, a zasad se od vas opraštamo uz najbolje želje za Božić i neka u novoj godini vaš omiljeni nogometni klub postane prvak svoje lige 😊

Literatura:

1. Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj. Narodne novine 7/2019.
https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html
2. J. Wesson (2002.), The Science of Soccer. Institute of Physics Publishing, London.
3. F. M. Brückler, D. Cicvarić (2008.), Nogometna matematika i fizika. Školska knjiga, Zagreb.
4. Hrvatski nogometni savez, *Pravila nogometne igre* 21./22. (2021.)
<https://hns-cff.hr/files/documents/21824/PNI%202021-2022.pdf> (27. 11. 2024.)
5. F. M. Brückler, F. Mijač, Nogomet u nastavi matematike 2. razreda srednje škole. Poučak 25(98) (2024.) 28–36
6. Sofascore, <http://sofascore.com> (27. 11. 2024.)
7. M. Ludwig, Die Mathematik hinter Siegwahrscheinlichkeiten (2014.).
http://fussballmathe.de/wm2014/material/Hintergrund_fussballmathe.pdf (27. 11. 2024.)
8. F. Brkić (2021.), Vjerojatnosne razdiobe u nogometu. Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu
9. E. Ben-Naim, F. Vazquez, S. Redner (2006.), What is the Most Competitive Sport?
<https://cnls.lanl.gov/~ebn/pubs/sports/html/> (27. 11. 2024.)
10. F. Mijač (2021.), Nogomet u nastavi matematike. Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu
11. F. M. Brückler, F. Mijač (2022.), A Football Trip Through Mathematics. U: Advances in Research on Teaching Mathematics (ur.: Z. Kolar-Begović, R. Kolar-Šuper, A. Katalenić), str. 127–142. Zagreb: Element, Fakultet za odgojne i obrazovne znanosti, Odjel za matematiku, Osijek.