

Više načina rješavanja jednog zadatka

JENS CARSTENSEN¹ I ALIJA MUMINAGIĆ²

Počnemo citatom iz [1]: „Zašto razmatrati više načina rješavanja? Zar nije dovoljan samo jedan budući da on vodi do onoga što se traži, a to je rješenje zadatka? Naravno da je dovoljan jedan način rješavanja ako je cilj samo rješenje zadatka. No ako se želi postići više, onda nije dovoljan. Što je to *više*? Za nalaženje rješenja zadatka potrebno je određeno znanje koje se sastoji od teorijskih činjenica koje su u najužoj vezi sa zadatkom. Za jedan način rješavanja potrebne su jedne činjenice, za drugi način neke druge činjenice, za treći treće. Zaključujemo da će za rješavanje na više načina trebati više teorijskih činjenica i metoda nego za rješavanje na samo jedan način. Time se za samo jedan zadatak aktivira, analizira i primjenjuje veća količina stečenog znanja. Osim toga, znanja se produbljuju i proširuju novim znanjima, a najvažnije je da zadatci s više načina rješavanja povećavaju aktivnost učenika i njihov interes za matematiku.”

Da je upravo tako, uvjerit ćemo se rješavajući ovaj zadatak iz geometrije (iz kategorije ne baš lakih).

Zadatak. Treba dokazati da u svakom trokutu vrijedi

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} + \frac{\cos \beta}{\sin \gamma \sin \alpha} + \frac{\cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} = 2,$$

gdje su α, β, γ unutarnji kutovi trokuta.

Dokaz 1. Kako su α, β, γ kutovi u trokutu, vrijedi $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Sada imamo

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} + \frac{\cos \beta}{\sin \gamma \sin \alpha} + \frac{\cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} &= \frac{\sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta + \sin \gamma \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} \\ &= \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin \beta \cos \beta + 2 \sin \gamma \cos \gamma}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} \\ &= \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}. \end{aligned}$$

Za dovršetak dokaza treba provjeriti točnost jednakosti

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

¹Jens Carstensen, Danska

²Alija Muminagić, Danska

Imamo:

$$\begin{aligned}
 \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma &= 2\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + 2\sin\gamma\cos\gamma \\
 &= 2\sin\gamma\cos(\alpha - \beta) - 2\sin\gamma\cos(\alpha + \beta) \\
 &= 2\sin\gamma(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\
 &= 2\sin\gamma(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \\
 &= 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.
 \end{aligned}$$

Pritom smo primijenili da je $\sin(\alpha + \beta) = \sin(180^\circ - \gamma) = \sin\gamma$ i $\cos(\alpha + \beta) = \cos(180^\circ - \gamma) = -\cos\gamma$.

Dokaz 2. Imamo

$$\begin{aligned}
 &\frac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} + \frac{\cos\beta}{\sin\gamma\sin\alpha} + \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta} \\
 &= \frac{\cos(180^\circ - (\beta + \gamma))}{\sin\beta\sin\gamma} + \frac{\cos(180^\circ - (\alpha + \gamma))}{\sin\gamma\sin\alpha} + \frac{\cos(180^\circ - (\alpha + \beta))}{\sin\alpha\sin\beta} \\
 &= \frac{-\cos(\beta + \gamma)}{\sin\beta\sin\gamma} + \frac{-\cos(\alpha + \gamma)}{\sin\gamma\sin\alpha} + \frac{-\cos(\alpha + \beta)}{\sin\alpha\sin\beta} \\
 &= \frac{\sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} + \frac{\sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\gamma\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} \\
 &= 1 - \frac{\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} + 1 - \frac{\cos\gamma\cos\alpha}{\sin\gamma\sin\alpha} + 1 - \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} \\
 &= 3 - \left(\frac{1}{\tan\beta\tan\gamma} + \frac{1}{\tan\gamma\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\alpha\tan\beta} \right) \\
 &= 3 - \frac{\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma}{\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}.
 \end{aligned}$$

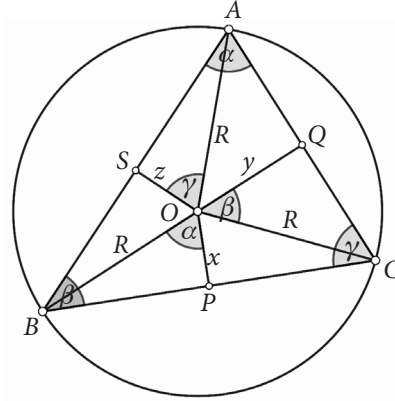
Zbog $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$ (dokažite), slijedi tvrdnja zadatka.

Dokaz 3. Primijenit ćemo sinusni poučak

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Tako dobijemo

$$\begin{aligned}
 &\frac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} + \frac{\cos\beta}{\sin\gamma\sin\alpha} + \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta} \\
 &= \frac{4R^2\cos\alpha}{bc} + \frac{4R^2\cos\beta}{ca} + \frac{4R^2\cos\gamma}{ab} \\
 &= \frac{4R^2(a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)}{abc}. \tag{1}
 \end{aligned}$$



Slika 1.

Neka je, kao što je i označeno na Slici 1., O središte i R polumjer kružnice opisane trokutu $\triangle ABC$. Tada su kutovi označeni istim oznakama jednaki (središnji i obodni kutovi). Neka su P , Q i S redom projekcije točke O na stranice trokuta BC , CA i AB (to jest, polovišta tih stranica) i neka je $|OP| = x$, $|OQ| = y$ i $|OS| = z$.

U trokutima $\triangle BOP$, $\triangle COQ$ i $\triangle AOS$ je $\cos \alpha = \frac{x}{R}$, $\cos \beta = \frac{y}{R}$ i $\cos \gamma = \frac{z}{R}$. Odavde je $a \cos \alpha = \frac{ax}{R}$, $b \cos \beta = \frac{by}{R}$ i $c \cos \gamma = \frac{cz}{R}$, pa nakon zbrajanja dobivamo

$$a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma = \frac{ax + by + cz}{R}. \quad (2)$$

Dalje je, kada s $P(\triangle XYZ)$ označimo površinu trokuta $\triangle XYZ$, $P(\triangle BOP) = \frac{xa}{4}$,

$$P(\triangle COQ) = \frac{yb}{4} \text{ i } P(\triangle AOS) = \frac{zc}{4} \text{ i}$$

$$P(\triangle ABC) = 2(P(\triangle BOP) + P(\triangle COQ) + P(\triangle AOS)) = \frac{ax + by + cz}{2}. \quad (3)$$

Sada iz (2) i (3), uz pomoć formule $4RP = abc$ (gdje je P površina trokuta $\triangle ABC$), dobivamo

$$a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma = \frac{2P}{R} = \frac{4RP}{2R^2} = \frac{abc}{2R^2},$$

a iz (1) je konačno

$$\frac{4R^2(a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma)}{abc} = \frac{4R^2}{abc} \cdot \frac{abc}{2R^2} = 2.$$

Napomena. Da je $a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma = \frac{abc}{2R^2}$ možemo dokazati i ovako:

$$\begin{aligned} a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma &= \frac{a \cos \alpha \sin \alpha}{\sin \alpha} + \frac{b \cos \beta \sin \beta}{\sin \beta} + \frac{c \cos \gamma \sin \gamma}{\sin \gamma} \\ &= a \cot \alpha \sin \alpha + b \cot \beta \sin \beta + c \cot \gamma \sin \gamma \end{aligned}$$

pa koristeći sinusni poučak dalje dobijemo

$$\begin{aligned}
 &= a \cot \alpha \cdot \frac{a}{2R} + b \cot \beta \cdot \frac{b}{2R} + c \cot \gamma \cdot \frac{c}{2R} \\
 &= \frac{1}{2R} (a^2 \cot \alpha + b^2 \cot \beta + c^2 \cot \gamma) \\
 &= \frac{4P}{2R} = \frac{abc}{2R^2}.
 \end{aligned}$$

Pritom smo koristili $a^2 \cot \alpha + b^2 \cot \beta + c^2 \cot \gamma = 4P$.

Posljednju jednakost dobijemo iz Slike 1.:

$$\cot \alpha = \frac{x}{a/2} = \frac{2x}{a} \Leftrightarrow a^2 \cot \alpha = 2ax = 4P(\Delta OBC)$$

i tako redom za ostala dva slučaja.

Dokaz 4. Jednakost $\frac{\cos \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} + \frac{\cos \beta}{\sin \gamma \sin \alpha} + \frac{\cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} = 2$ zapišemo u obliku

$$\sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta + \sin \gamma \cos \gamma = 2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma,$$

a kako je $\sin \gamma = \sin(180^\circ - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta)$ i $\cos \gamma = \cos(180^\circ - (\alpha + \beta)) = -\cos(\alpha + \beta)$, dobivamo

$$\begin{aligned}
 &\sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta + \sin \gamma \cos \gamma \\
 &= \sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta - \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) \\
 &= \sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta - (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \\
 &= \sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta - \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin \beta \cos \beta - \cos^2 \alpha \sin \beta \cos \beta + \\
 &\quad + \sin^2 \beta \sin \alpha \cos \alpha \\
 &= \sin \alpha \cos \alpha (1 - \cos^2 \beta + \sin^2 \beta) + \sin \beta \cos \beta (1 + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \\
 &= \sin \alpha \cos \alpha (\sin^2 \beta + \sin^2 \beta) + \sin \beta \cos \beta (\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \\
 &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \beta + 2 \sin \beta \cos \beta \sin^2 \alpha \\
 &= 2 \sin \alpha \sin \beta (\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) \\
 &= 2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta) \\
 &= 2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.
 \end{aligned}$$

Dokaz 5. Promatranu jednakost podijelimo s $4R^2$ i dobijemo

$$\frac{\cos \alpha}{2R \sin \beta \cdot 2R \sin \gamma} + \frac{\cos \beta}{2R \sin \gamma \cdot 2R \sin \alpha} + \frac{\cos \gamma}{2R \sin \alpha \cdot 2R \sin \beta} = \frac{2}{4R^2},$$

pa primijenimo prvo sinusni poučak na izraze u nazivnicima

$$\frac{\cos \alpha}{bc} + \frac{\cos \beta}{ac} + \frac{\cos \gamma}{ab} = \frac{1}{2R^2},$$

a zatim kosinusni poučak na izraze u brojnicima

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b^2c^2} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a^2c^2} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a^2b^2} = \frac{1}{2R^2}.$$

Svođenjem na zajednički nazivnik dobijemo

$$\frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4)}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{R^2}.$$

Heronovu formulu za površinu trokuta $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, pri čemu je s polupseg, zapišemo u obliku

$$P = \frac{1}{4} \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4)},$$

odnosno

$$16P^2 = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4).$$

Sada nastavimo s transformacijom naše jednakosti. Uvrštavanjem u brojnik slijedi

$\frac{16P^2}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{R^2}$, odnosno $\frac{4P}{abc} = \frac{1}{R}$, što je dobro poznata formula $P = \frac{abc}{4R}$ za površinu trokuta.

Literatura:

1. Z. Kurnik: Posebne metode rješavanja matematičkih problema, Prvo izdanje, Element d.o.o., Zagreb, 2010.
2. A. Marić, Trokut (definicije, poučci, formule, problemi, jednakosti, nejednakosti), Element, Zagreb, 2007.