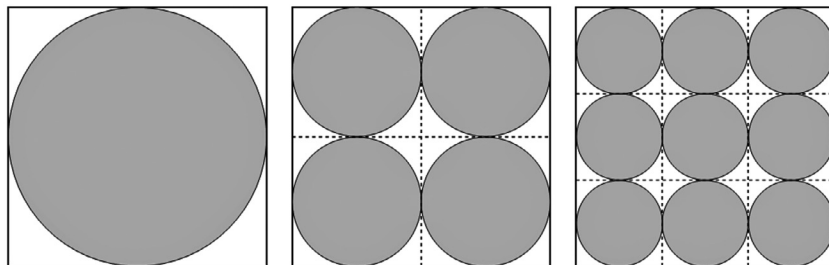


Problem pakiranja krugova

ALEKSANDAR HATZIVELKOS¹

Započnimo jednim pitanjem. Na Slici 1. prikazani su krugovi u kvadratu duljine stranice a . Prikazane situacije nazivat ćemo pakiranjima krugova u kvadrat: svaki od krugova pravi je podskup prikazanog kvadrata, a unutrašnjosti svih prikazanih krugova međusobno su disjunktni skupovi.²



Slika 1. Pakiranje krugova u kvadrat stranice a u slučaju jednog, četiri odnosno

devet krugova polumjera $r_1 = \frac{a}{2}$, $r_2 = \frac{a}{4}$ i $r_3 = \frac{a}{6}$.

U kojemu od te tri situacije krug(ovi) pokriva(ju) najveći dio kvadrata? Odgovor je, naravno, da u sva tri slučaja krugovi pokrivaju jednak dio kvadrata.

U prvom slučaju pokriven je dio kvadrata koji je jednak površini kruga polumjera $r_1 = \frac{a}{2}$, dakle površina $P_1 = r_1^2 \pi = \frac{1}{4} a^2 \pi$. U drugom slučaju pokriven je dio kvadrata koji je jednak četiri površine kruga polumjera $r_2 = \frac{a}{4}$, dakle površina $P_2 = 4 \cdot r_2^2 \pi = 4 \cdot \frac{1}{16} a^2 \pi = \frac{1}{4} a^2 \pi$. I konačno, u trećem slučaju pokriven je dio kvadrata koji je jednak devet površina kruga polumjera $r_3 = \frac{a}{6}$, dakle površina $P_3 = 9 \cdot r_3^2 \pi = 9 \cdot \frac{1}{36} a^2 \pi = \frac{1}{4} a^2 \pi$.

¹Aleksandar Hatzivelkos, Veleučilište Velika Gorica

²Kako krug definiramo kao skup točaka ravnine čija je udaljenost od središta kruga manja ili jednaka od zadanog polumjera, tako ćemo unutrašnjošću kruga nazivati sve točke ravnine čija je udaljenost od središta strogo manja od zadanog polumjera.

Drugi način da iskažemo tu informaciju jest da izrazimo *gustoću* ili *iskoristivost pakiranja*, odnosno omjer površine koju pokrivaju krugovi u odnosu na ukupnu površinu kvadrata. Taj se omjer uobičajeno označava grčkim slovom *eta*:

$$\eta_k = \frac{P_{krugovi}}{P_{kvadrat}} = \frac{\frac{1}{4}a^2\pi}{a^2} = \frac{1}{4}\pi \approx 0.7854.$$

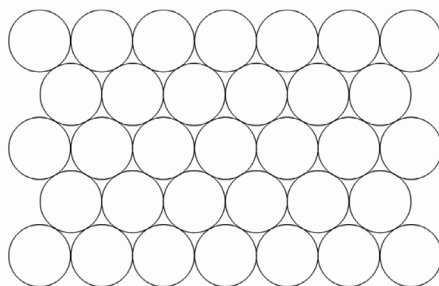
Dobiveni rezultat nije teško intuitivno prihvatiti. Ako promotrimo drugo ili treće prikazano pakiranje, vidimo kako su (svi) gradivni dijelovi tog pakiranja slični prvom slučaju – radi se opet o (manjem) krugu upisanom u (manji) kvadrat. Zato je očekivan rezultat da je gustoća pakiranja ista za prvi slučaj i za svaki od gradivnih blokova u drugom i trećem slučaju.

Slaganje uzoraka u ravni

Zbog te sličnosti, indeks gustoće za kvadratnu rešetkastu konstrukciju načinjenu od gradivnih blokova u obliku kvadrata s upisanim krugom uvijek je isti i iznosi $\eta_k = \frac{1}{4}\pi \approx 0.7854$. Rešetkasti uzorak koji formiraju krugovi nazivamo *kvadratnim uzorkom* (eng. *square pattern*), pri čemu središta četiriju susjednih krugova formiraju kvadrat stranice $2r$, kao što je prikazano na Slici 1. Isti zaključak vrijedi i za slaganje neograničenog kvadratnog uzorka u ravni.

No to nije jedini način slaganja krugova.

Drugi rasprostranjeni način formiranja (minimalne) disjunktne unije krugova je slaganje krugova u *heksagonalni uzorak* (eng. *hexagonal pattern*), odnosno uzorak kakav formiraju pčele prilikom konstrukcije saća. U tom uzorku formiramo blokove po tri međusobno tangencijalna kruga, čija središta formiraju jednakokranični trokut, stranice duljine $2r$. Heksagonalni uzorak prikazan je na Slici 2.



Slika 2. Prikaz heksagonalnog uzorka

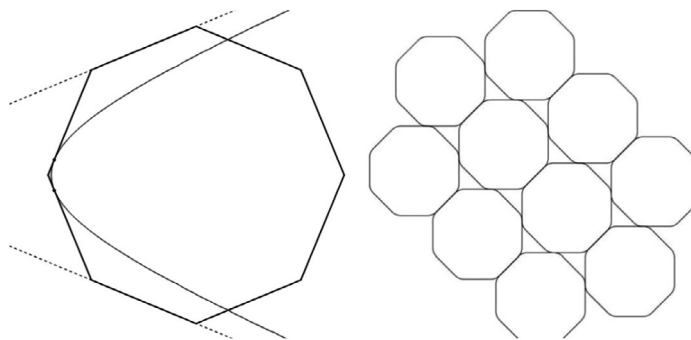
Promatramo li neomeđeni slučaj, Lagrange je 1773. godine dokazao da heksagonalni uzorak (slaganja krugova) ima najveći indeks gustoće među svim rešetkastim uzorcima, te da on iznosi

$$\eta_h = \frac{\pi}{\sqrt{12}} \approx 0.9069.$$

Jedno stoljeće kasnije, norveški matematičar Axel Thue dokazao je da je heksagonalni uzorak najgušći uzorak općenito, a ne samo među rešetkastim uzorcima. Po njemu se taj rezultat i danas često naziva Thueovim teoremom. No uskoro su se pojavile kritike kako Thueov dokaz nije dovoljno rigorozan, tako da se danas mađarskog matematičara L. Fejes Tótha smatra tvorcem prvog formalno rigoroznog dokaza o maksimalnoj gustoći heksagonalnog uzorka među svim mogućim načinima pokrivanja Euklidske ravnine jednakim krugovima [3].

Kao što vidimo, gustoća pakiranja bitno se razlikuje ovisno o slaganju krugova u rešetku. Nadalje, faktor η_h daje nam apsolutnu gornju među za iskoristivost prostora prilikom slaganja krugova jednog pored drugog u ravnini.

No, zanimljiv je podatak da krug *nije* ravninski oblik s najgorom iskoristivošću prilikom slaganja. Njemački matematičar Karl Reinhardt konstruirao je 1934 godine *zaglađeni oktogon* (eng. *smoothed octagon*). Zaglađeni oktogon dobiva se *zaglađivanjem* kutova na način da se kut zamijeni dijelom hiperbole kojoj su stranice toga kuta tangente, a sljedeće dvije stranice asimptote (vidi Sliku 3.).



Slika 3. Konstrukcija i rešetkasti uzorak zaglađenog oktogona ³

Neovisno od Reinhardta, zaglađeni oktogon konstruirao je i njemački matematičar Kurt Mahler koji je 1947. odredio maksimalni indeks gustoće slaganja zaglađenih oktogona (vidi [5]):

$$\eta_o = \frac{8 - 4\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - 1} \approx 0.902414.$$

Vidimo kako je maksimalna gustoća slaganja uzorka zaglađenih oktogona η_o manja od maksimalne gustoće slaganja uzorka krugova η_h . Štoviše, sadržaj Reinhardtove hipoteze (koja je do danas neriješeni matematički problem) je da upravo

³Slika uzorka zaglađenih oktogona preuzeta je iz [6].

zaglađeni oktogoni, među svim konveksnim centralno simetričnim likovima, ima najnižu maksimalnu gustoću.⁴

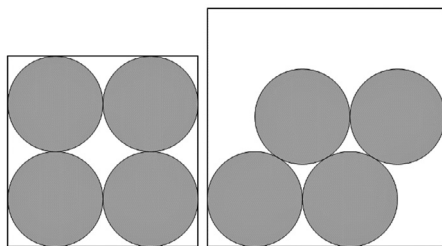
U praksi, umjesto analize gustoće uzorka slaganja u neograničenom Euklidskom prostoru, zanimljivija je analiza pakiranja krugova u nekom ograničenom prostoru, poput kvadrata, pravokutnika ili druge kružnice. Takve analize imaju i neposrednu primjenu – primjerice, određivanje dimenzija paketa u koji će se pakirati boce, ili određivanje maksimalnog broja diskova koje je moguće izrezati iz zadane (pravokutne, kvadratne...) ploče.

1. Pakiranje krugova u kvadrat

Ograničavanje prostora u koji pakiramo krugove donosi u analizu novu dozu složenosti. Prvo treba istaknuti kako se problem može analizirati na dva (ekvivalentna) načina: moguće je tražiti minimalne dimenzije kvadrata u koje je moguće upakirati određen broj krugova (zadanog polumjera) ili, alternativno, moguće je odrediti maksimalan broj (i veličinu) krugova koje možemo pakirati u kvadrat zadane duljine stranice.

Obje se analize svode na određivanje optimalne (što je moguće veće) vrijednosti gustoće η . U ovom ćemo se radu orijentirati na problem konstrukcije što manjeg kvadrata u koji možemo pakirati zadani broj krugova polumjera 1.

Iako je dokazano kako u neomeđenom slučaju heksagonalni uzorak slaganja krugova ima najveću moguću gustoću, to ne mora biti optimalno pakiranje. Naime, pakiranje krugova u kvadrat kod heksagonalnog uzorka rezultira nepravilnim nepopunjenim prostorima uz rubove kvadrata, a koji posljedično smanjuju gustoću pakiranja. Ilustrirajmo to na primjeru pakiranja četiriju krugova polumjera 1.



Slika 4. Usporedba pakiranja četiriju krugova u kvadrat s kvadratnim i heksagonalnim uzorkom

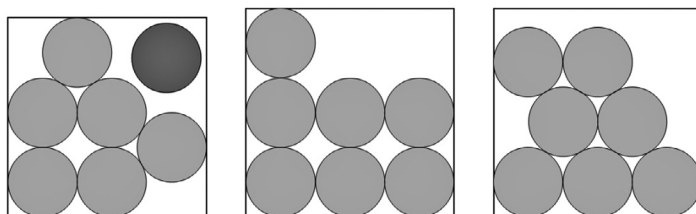
Na Slici 4. vidimo usporedbu pakiranja u kvadrat krugova polumjera 1 pomoću kvadratnog i heksagonalnog uzorka. Kvadratni uzorak može se spakirati u kvadrat stranice 4 te ima standardnu gustoću pakiranja za kvadratni uzorak, $\eta_{k4} \approx 0.7854$.

⁴Ako se izostavi zahtjev centralne simetrije, hipoteza je da najnižu maksimalnu gustoću ima pravilni sedmerokut, s gustoćom $\eta_o = 0.8927$ [6].

S druge strane, heksagonalni uzorak u ovom se slučaju pakira u kvadrat stranice 5 te ima gustoću $\eta_{h4} \approx 0.5027$.

Može se pokazati kako je kvadratni uzorak u slučaju pakiranja četiri kruga ujedno i optimalan izbor, odnosno pakiranje s najvećom gustoćom [1].

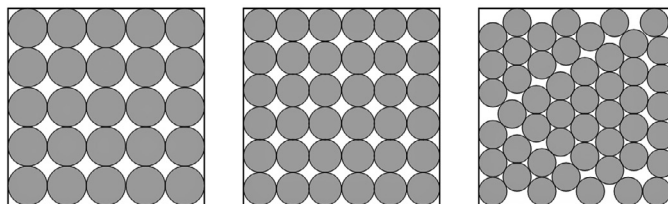
U većini slučajeva, kod pakiranja kod kojih je dokazan optimalan raspored krugova, taj raspored ne odgovara niti kvadratnoj niti heksagonalnoj rešetki. Na primjer, u slučaju sa sedam krugova, na Slici 5. možemo vidjeti izgled optimalnog rasporeda, te pripadne kvadratne i heksagonalne rešetke.



Slika 5. Usporedba pakiranja sedam krugova u kvadrat s optimalnim, kvadratnim i heksagonalnim uzorkom

Gustoća pakiranja optimalnog uzorka iznosi $\eta \approx 0.66931$, dok kvadratni i heksagonalni uzorak imaju istu gustoću $\eta_{k7} = \eta_{h7} \approx 0.61087$. Uočimo također kako kod kvadratnog i heksagonalnog uzorka imamo nekoliko rješenja (primjerice, gornji krug u kvadratnom uzorku može biti pozicioniran i na vrhu drugog ili trećeg stupca), dok kod optimalnog uzorka imamo neprebrojivo mnogo rješenja jer središte najtamnijeg kruga može biti bilo koja točka područja određenog uvjetom tangiranja toga kruga i ostalih krugova, odnosno rubova kvadrata. U ovom slučaju izabrana je jedna od pozicija koja daje simetrično rješenje.

Zanimljivo je vidjeti što se događa s optimalnim rješenjima za pakiranje n^2 krugova, tj. kako izgleda optimalno pakiranje za 4, 9, 16, 25... krugova. Na Slici 6. tako su prikazana optimalna pakiranja za 25, 36 i 49 krugova.⁵



Slika 6.
Optimalna
pakiranja za 25,
36 i 49 krugova

Kao što vidimo, kod pakiranja 25 i 36 krugova optimalno rješenje je pakiranje u kvadratnu rešetku, sa standardnom gustoćom za kvadratnu rešetku $\eta_{k25} = \eta_{k36} \approx 0.7854$. U slučaju pakiranja 49 krugova, prikazano optimalno rješenje ima $\eta_{o49} \approx 0.7912$.

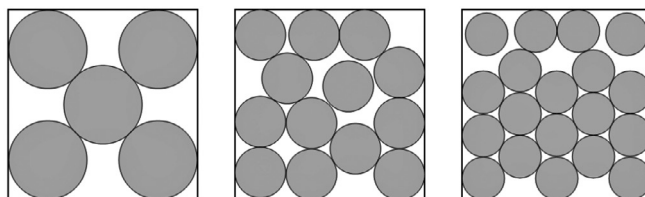
⁵Rješenja su normirana u smislu da je kvadrat pakiranja u sva tri slučaja sveden na kvadrat stranice 1 kako bi opisane slučajeve lakše vizualno usporedili. Pri tome su, naravno, polumjeri pakiranih krugova različiti.

Ova situacija pokazuje nam kako s rastom broja krugova, čak i u situaciji pakiranja n^2 krugova, optimalno pakiranje počinje sve više odstupati od kvadratnog uzorka i kretati se k heksagonalnom uzorku (čije dijelove možemo prepoznati i u optimalnom uzorku za pakiranje 49 krugova na Slici 6).

Time, s porastom broja krugova, asimptotski raste i gustoća pakiranja, što je vidljivo na Slici 11. Prikazani graf pokazuje kretanje gustoće optimalnog pakiranja u odnosu na broj pakiranih krugova. Na istom grafu možemo usporediti i gustoće pakiranja optimalnih uzoraka s heksagonalnim i kvadratnim uzorcima, o kojima će više riječi biti u sljedećim odlomcima.

Pri tome treba istaknuti kako određivanje optimalnog pakiranja krugova nije jednostavan zadatak. U slučaju pakiranja do 20 krugova u kvadrat optimalna pakiranja su dokazana [2,7], dok se u većini ostalih slučajeva govori o „najboljem poznatom rješenju”.

Tako se na mrežnoj-stranici [1] vodi evidencija o najboljim poznatim rješenjima za pakiranje do 10 000 krugova u kvadrat. Poznata se rješenja kontinuirano testiraju i unaprjeđuju raznim metodama optimizacije. Ilustrativno, na Slici 7. prikazana su optimalna pakiranja za 5, 13 i 19 krugova u kvadrat.



Slika 7. Optimalna pakiranja za 5, 13 i 19 krugova u kvadrat⁶

1.1. Pakiranje krugova u kvadratnom rešetkastom uzorku

Iako smo vidjeli kako optimalno pakiranje krugova u kvadrat odstupa od rešetkastih uzoraka, upravo su takvi uzorci pakiranja najinteresantniji u praksi, u prvom redu zbog jednostavnosti izvedbe rešetkastih uzoraka. Zbog toga ćemo ovaj dio teksta posvetiti usporedbi pakiranja krugova u kvadrat u formi kvadratnog i heksagonalnog rešetkastog uzorka.

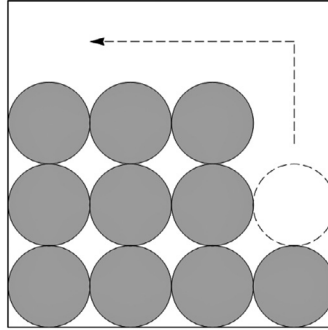
Preciznije, kao cilj ćemo uzeti određivanja minimalne duljine stranice kvadrata u koji se može pakirati n krugova polumjera 1, kako u kvadratnom tako i u heksagonalnom rešetkastom uzorku.

U slučaju kvadratnog uzorka, određivanje minimalnog kvadrata u koji se može pakirati n krugova relativno je jednostavan problem. Kako u slučaju pakiranja punog kvadrata, odnosno $n = k^2$ krugova kvadratni rešetkasti uzorak postiže svoju maksi-

⁶Podaci su preuzeti iz [1].

malnu gustoću $\eta_k \approx 0.7854$, tako proizvoljan broj n krugova pakiramo u kvadrat u koji stane k^2 krugova, gdje je

$$(k-1)^2 < n \leq k^2 \Rightarrow k-1 < \sqrt{n} \leq k \Rightarrow k = \lceil \sqrt{n} \rceil.$$

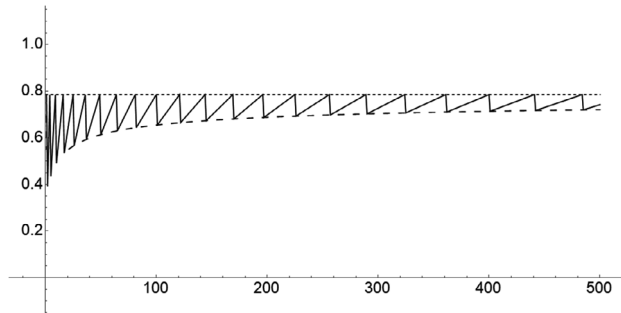


Slika 8. Prikaz popunjavanja optimalnog pakiranja u slučaju kvadratnog uzorka

Dakle, n krugova u kvadratnom rešetkastom uzorku moguće je pakirati u kvadrat stranice $2k = 2\lceil \sqrt{n} \rceil$, odnosno funkcija gustoće optimalnog pakiranja krugova u kvadrat pomoću kvadratnog rešetkastog uzorka dana je s:

$$\eta_k(n) = \frac{n \cdot \pi}{\left(2\lceil \sqrt{n} \rceil\right)^2} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{n}{\left(\lceil \sqrt{n} \rceil\right)^2}.$$

Navedeni izraz u skladu je s poznatom činjenicom kako je maksimalna gustoća kvadratnog rešetkastog uzorka jednaka $\frac{\pi}{4}$, koju dobivamo u slučaju kada je n puni kvadrat jer je izraz $\frac{n}{\left(\lceil \sqrt{n} \rceil\right)^2}$ tada jednak jedan. Na Slici 9. grafički je prikazana vrijednost funkcije $\eta_k(n)$ za $n \leq 500$.⁷



Slika 9. Grafički prikaz gustoće pakiranja kvadratnim rešetkastim uzorkom

⁷Funkcija $\eta_k(n)$ je diskretna funkcija definirana na skupu prirodnih brojeva. No u grafičkom prikazu odlučili smo se za povezivanje diskretnih točaka grafa linijama radi bolje preglednosti rezultata i ponašanja funkcije.

Najgora situacija, iz perspektive maksimizacije gustoće pakiranja, pojavljuje se u slučaju kada je broj krugova za jedan veći od punog kvadrata, odnosno za $n = k^2 + 1$. Tada je

$$\left(\left\lceil \sqrt{n} \right\rceil\right)^2 = \left(\left\lceil \sqrt{k^2 + 1} \right\rceil\right)^2 = (k+1)^2,$$

pa je u tim slučajevima gustoća dana izrazom

$$\eta_k(n) = \frac{n \cdot \pi}{\left(\left\lceil 2\sqrt{n} \right\rceil\right)^2} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{k^2 + 1}{(k+1)^2}.$$

Tako je i na grafu prikazanom na Slici 9. vidljivo kako je funkcija $f(x) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{x}{(\sqrt{x-1} + 1)^2}$ donja međa za vrijednosti gustoće η_k (graf funkcije označen je na Slici 9. isprekidanom linijom).

Vidimo kako vrijednost donje međe teži ka $\frac{\pi}{4}$ kada n teži u beskonačno, no ta je konvergencija prilično spora. Tako donja međa postiže rezultat od 95 % maksimalne gustoće za kvadratni rešetkasti uzorak tek za $n \geq 1445$.

1.2. Pakiranje krugova u heksagonalnom rešetkastom uzorku

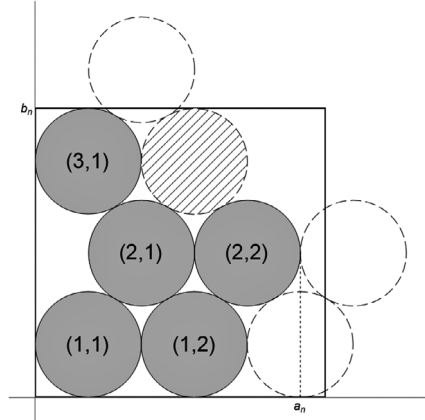
S druge strane pakiranje krugova u heksagonalnom uzorku predstavlja ozbiljniji problem. Za određivanje minimalne veličine kvadrata u ovom smo se članku odlučili za iterativni pristup:

- Neka je K_{n+1} kvadrat minimalne stranice u koji je pomoću heksagonalnog rešetkastog uzorka moguće pakirati n jediničnih krugova, te neka su krugovi u tom kvadratu polagani u rešetkasti heksagonalni uzorak u i_n redova, pri čemu je svaki red popunjen s lijeva na desno.
- U iterativnom koraku konstrukcije kvadrata K_{n+1} analiziramo utjecaje dodavanja novog kruga u svaki od postojećih i_n redova s desne strane, kao i utjecaj dodavanja novog kruga u novi, $i_n + 1$ red na krajnju lijevu moguću poziciju, kao što je prikazano na Slici 10.⁸
- Za svaku od novih mogućih $i_n + 1$ pozicija novog kruga odredimo vrijednosti a_{n+1} i b_{n+1} dosege po x i y osi koje pokriva $n + 1$ krugova, te odredimo duljinu stranice potencijalnog novog kvadrata pakiranja, $k_{n+1} = \max\{a_{n+1}, b_{n+1}\}$.
- Konačno, između $i_n + 1$ vrijednosti k_{n+1} , odaberemo najmanju, te pripadni kvadrat pakiranja označimo s K_{n+1} .

Na primjer, u situaciji s pet krugova, prikazanoj na Slici 10., potencijalni novi krugovi označeni su isprekidanom linijom. Među njima, za novi krug s pseudo-ko-

⁸Na Slici 10. pakirani krugovi označeni su pseudo-koordinatama (i, j) gdje je i redni broj reda u kojem se krug nalazi (brojeno odozdo prema gore), a j redni broj kruga u i -tom redu (brojeno s lijeva na desno).

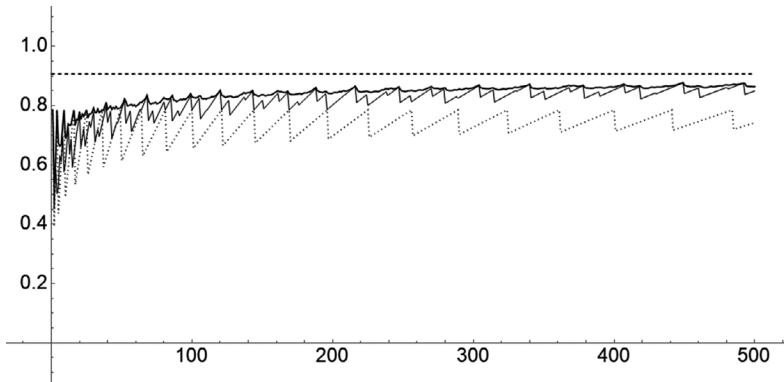
ordinatama $(3, 2)$ odnosno krug označen kosim crtama, vrijedi: $b_6 = b_5$, $a_6 < a_5$, pa je dakle $k_6 = k_5$. Za sve ostale krugove vrijedi $k_6 > k_5$, pa je novo minimalno pakiranje za 6 krugova već postojeći kvadrat K_5 .



Slika 10. Prikaz mogućih dodavanja novog kruga u postojeće optimalno rešetkasto heksagonalno pakiranje

Baza iterativnog postupka minimalno je kvadratno pakiranje jednoga kruga, tj. kvadrat stranice opisan krugu polumjera . Opisani algoritam u programskom jeziku *Wolfram Mathematica* dostupan je na platformi *Github* [8].

Koristeći opisanu iterativnu metodu možemo odrediti dimenzije minimalnih kvadrata u koje je moguće pakirati n krugova koristeći heksagonalni uzorak, što potom inducira diskretnu funkciju $\eta_n : \mathbb{N} \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$, čiji je grafički prikaz (za vrijednosti do pet stotina krugova) prikazani na Slici 11.⁹



Slika 11. Grafički prikaz gustoće pakiranja optimalnim (puna linija), heksagonalnim (tanka linija) i kvadratnim (isprekidana linija) rešetkastim uzorkom¹⁰

⁹Kao i u slučaju grafičkog prikaza funkcije η_k na Slici 9., diskretne vrijednosti funkcije η_n povezali smo linijama radi preglednosti i čitljivosti grafičkog prikaza.

¹⁰Podaci o gustoći pakiranja za optimalne uzorke preuzeti su iz [1].

Iz grafa prikazanog na Slici 11. jasno je kako vrlo brzo (točnije kada broj krugova n postane veći od 49)¹¹ gustoća pakiranja krugova u kvadrat pomoću kvadratnog rešetkastog uzorka η_k postaje manja od gustoće pakiranja krugova u kvadrat pomoću heksagonalnog rešetkastog uzorka η_h .

2. Pakiranje krugova u pravokutnik

Osim pakiranja krugova u kvadrat, široku praktičnu primjenu ima i pakiranje krugova u pravokutnik. Traženje optimalnog pakiranja krugova u pravokutnik je, baš kao i u slučaju pakiranja u kvadrat, iznimno složen problem. Stoga ćemo u ovom tekstu, kao i u prošlom poglavlju, pažnju posvetiti pakiranjima krugova u pravokutnik pomoću kvadratnog i heksagonalnog rešetkastog uzorka.

Problem ćemo formulirati na sljedeći način: za dani broj jediničnih krugova n treba odrediti dimenzije pravokutnika a_n i b_n , takvog da je danih n krugova pakirano u taj pravokutnik (pomoću kvadratnog, odnosno heksagonalnog rešetkastog uzorka), a da je površina pravokutnika najmanja moguća, odnosno da je pripadna gustoća pakiranja maksimalna.

U slučaju kvadratnog rešetkastog uzorka rješenje je jednostavno. Naime, znamo kako kvadratni rešetkasti uzorak ima maksimalnu moguću gustoću pakiranja $\eta_k = \frac{\pi}{4}$ koja se postiže kod pakiranja u kojemu gradivni blokovi (kvadrati opisani krugovima) u potpunosti pokrivaju oblik u koji se krugovi pakiraju.

To se u slučaju pakiranja krugova u pravokutnik trivijalno ostvaruje pakiranjem n jediničnih krugova u pravokutnik dimenzija $a_n = 2n$, $b_n = 2$. Ako je n prost broj, takvo je optimalno pakiranje (kod korištenja kvadratnog rešetkastog uzorka) jedinstveno.¹² Ako je n složen broj, te se može zapisati u obliku $n = n_1 \cdot n_2$, tada se optimalno pakiranje ostvaruje i s pravokutnikom dimenzija $a_n = 2n_1$, $b_n = 2n_2$. Svaka faktorizacija broja n na umnožak dvaju prirodnih brojeva pri tome generira dva optimalna rješenja za dimenzije pravokutnika.

Zaključujemo kako kod pakiranja krugova u pravokutnik pomoću kvadratnog rešetkastog uzorka uvijek postoji pravokutnik u koji je moguće n krugova pakirati s gustoćom $\eta_k = \frac{\pi}{4} \approx 0.7854$, što je ujedno i najbolje moguće pakiranje koje se može ostvariti pomoću kvadratnog rešetkastog uzorka.

Pakiranje u pravokutnik pomoću heksagonalnog rešetkastog uzorka

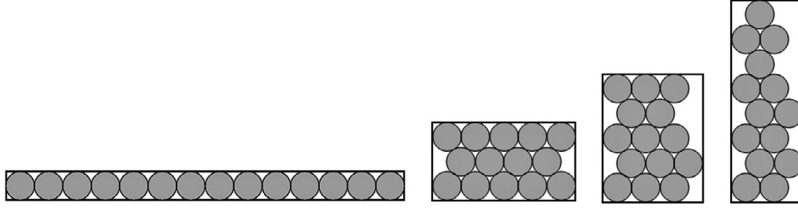
Kao i u slučaju pakiranja krugova u kvadrat pomoću heksagonalnog rešetkastog uzorka, prilikom određivanja optimalnih dimenzija pravokutnika u koji ćemo s

¹¹Istaknimo kako i u slučaju kada je krugova manje od 50, kvadratni rešetkasti uzorak postiže strogo veću gustoću pakiranja u kvadrat od heksagonalnog rešetkastog uzorka u dvanaest slučajeva, i to kada je broj krugova koje pakiramo redom jednak: 4, 9, 15, 16, 24, 25, 34, 35, 36, 47, 48, 49.

¹²Jedinstveno, do na permutaciju dimenzija a_n i b_n .

najvećom gustoćom pakirati n krugova pomoću heksagonalnog rešetkastog uzorka, iskoristit ćemo algoritamski pristup traženju rješenja.

Za svaki broj krugova n formirat ćemo pravokutnike u kojima se, pomoću heksagonalnog rešetkastog uzorka, krugovi pakiraju u redove, počevši od jednog reda pa do n redova. Tako je, primjerice, na Slici 12. prikazana usporedba pakiranja $n = 14$ krugova u pravokutnike korištenjem jednog, tri, pet i osam redova.



Slika 12. Prikaz pakiranja četrnaest krugova u pravokutnik pomoću heksagonalnog rešetkastog uzorka korištenjem (a) jednog, (b) tri, (c) pet i (d) osam redova

Kod kreiranja minimalnog pravokutnika pakiranjem n krugova u k redova koristimo sljedeći algoritam:

- Ako je n djeljiv s k , u svaki red rasporedimo $\frac{n}{k}$ krugova (slučaj (a) sa Slike 12).
- Ako n nije djeljiv s k , a ostatak pri dijeljenju n s k manji je ili jednak $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$, tada u svaki red rasporedimo $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ krugova, a ostatak krugova rasporedimo u neparne redove kojih ima $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ (slučaj (b) sa Slike 12).
- Ako n nije djeljiv s k , a ostatak pri dijeljenju n s k veći je od $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$, tada u svaki red rasporedimo $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ krugova, potom $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ krugova rasporedimo u neparne redove, a preostale krugove rasporedimo u parne redove (slučajevi (c) i (d) sa Slike 12).

Opisanim postupkom minimiziramo širinu pravokutnika kojemu je visina definirana brojem redova k (i iznosi $b_n = 2 + (k-1)\sqrt{3}$).

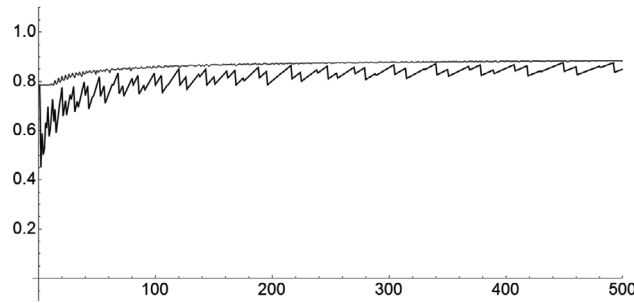
Nakon formiranja minimalnog pravokutnika za pakiranje u k redova, $k \in [1, n] \cap \mathbb{N}$, usporedimo površine (tj. gustoće pakiranja) svih n pravokutnika i odaberemo onaj kojemu je površina najmanja (odnosno gustoća najveća).

Na primjer, u slučaju kada pakiramo $n = 14$ krugova, pripadne površine pakiranja u k redova, P_k , glase:

$$P_1 = 56, \quad P_2 = 55.98, \quad P_3 = 56.64, \quad P_4 = 57.57, \quad P_5 = 62.5, \quad P_6 = 63.96, \quad P_7 = 61.96, \\ P_8 = 70.62, \quad P_9 = 63.42, \quad P_{10} = 70.35, \quad P_{11} = 77.28, \quad P_{12} = 84.21, \quad P_{13} = 91.14, \quad P_{14} = 73.55.$$

Vidimo kako je u tom slučaju optimalno pakiranje u pravokutnik s tri reda, odnosno pravokutnik dimenzija $a_{14} = 10$, $b_{14} = 2 + 2\sqrt{3}$. Gustoća toga pakiranja iznosi $\eta_{h,14} \approx 0.8049$. Za usporedbu, kvadratnim rešetkastim uzorkom 14 jediničnih krugova optimalno je pakirati u pravokutnik dimenzija $a_7 = 14$, $b_7 = 7$, što je pakiranje s manjom gustoćom, $\eta_k \approx 0.7854$.

Istaknimo i kako je gustoća pakiranja kvadratne rešetke donja međa za gustoću pakiranja krugova u heksagonalnom rešetkastom uzorku u pravokutnik. Naime, u slučaju pakiranja u jedan red, kvadratni i heksagonalni uzorak su jednaki. Stoga je heksagonalnim uzorkom uvijek moguće postići gustoću pakiranja jednaku maksimalnoj gustoći pakiranja u kvadratni uzorak.

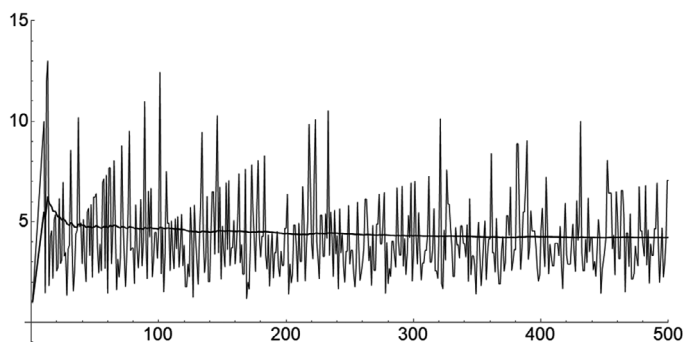


Slika 13. Usporedba gustoće optimalnog pakiranja heksagonalnim uzorkom u kvadrat i pravokutnik

Na Slici 13. možemo usporediti gustoće pakiranja n krugova u kvadratni i pravokutni oblik pomoću heksagonalnog rešetkastog uzorka. Kao što se moglo i očekivati, gustoća pakiranja krugova u pravokutnik veća je od gustoće pakiranja u kvadrat. Dodatni stupanj slobode koji je omogućio odabir dimenzije pravokutnika rezultirao je većom gustoćom pakiranja i manjim oscilacijama gustoće pri promjeni broja pakiranih krugova.

Zanimljiv je i podatak o dimenzijama pravokutnika s optimalnim pakiranjem krugova u heksagonalnom rešetkastom uzorku. Na Slici 14. prikazano je kretanje omjera stranica (y -os) pravokutnika s optimalnim pakiranjem krugova u heksagonalnom rešetkastom uzorku u odnosu na broj pakiranih krugova (x -os).

Vidimo kako na početku omjer raste do vrijednosti 13, što je posljedica toga da je optimalno pakiranje trinaest krugova u pravokutnik pomoću heksagonalnog rešetkastog uzorka u pravokutniku s jednim redom krugova. Najnižu vrijednost (za $n \leq 500$) omjer stranica pravokutnika postiže kod pakiranja 169 krugova, kada je omjer stranica jednak 1.19 – dakle radi se o pakiranju u pravokutnik koji je dimenzijama najbliži kvadratu. Prosječna vrijednost omjera stranica kod pakiranja do pet stotina krugova iznosi 4.22.



Slika 14. Omjer stranica pravokutnika s optimalnim pakiranjem krugova u heksagonalnom rešetkastom uzorku

Već smo istaknuli kako u neograničenom slučaju pakiranje krugova u heksagonalni rešetkasti uzorak ima najveću moguću gustoću. Kod pakiranja krugova u pravokutnik, gustoću pakiranja smanjuju prazni prostori koji ostanu uz vertikalne stranice s lijeve i desne strane (vidi Sliku 12.), što je razlog zbog kojega optimalni pravokutnici teže k što manjem broju redova u pakiranju.

S druge strane, korištenje više redova u pakiranju upravo koristi osnovnu prednost heksagonalnog uzorka kada se krugovi iz sljedećeg reda „ugnježđuju“ između krugova prethodnog reda. To je mehanizam zbog kojega optimalni pravokutnik teži imati veći broj redova.

Rezultat je balans između ovih dvaju mehanizama, pri čemu s porastom broja krugova možemo očekivati rast broja redova, odnosno smanjenje omjera duljina stranica pravokutnika. To pokazuje i kretanje (kumulativne) prosječne vrijednosti omjera stranica pravokutnika za prvih n pakiranja, koja je na Slici 14. prikazana debljom linijom. Vidimo kako s vremenom prosječna vrijednost omjera stranica pada.

Zaključak

U ovom smo tekstu prikazali kako je za rješavanje jednog naizgled jednostavnog problema ponekad potrebno upotrijebiti ozbiljne matematičke i računarske metode. Problem pakiranja krugova u kvadratu, ali i ostale ravninske likove poput pravokutnika, trokuta i krugova ima široku primjenu, kako u raznim tehnološkim procesima, tako i u raznim drugim znanstvenim disciplinama. Usprkos tome, u području analize pakiranja postoje još mnoga otvorena pitanja. Vjerujemo kako smo ovim tekstom dali uvid u osnovna pitanja i metode rješavanja toga problema.

Literatura:

1. „The best known packings of equal circles in a square (up to $N = 10000$)”, www.packomania.com, (30. 6. 2024.)

2. Weisstein, Eric W. „Circle Packing.” From MathWorld – A Wolfram Web Resource. <https://mathworld.wolfram.com/CirclePacking.html>, (30. 6. 2024.)
3. Chang, H., Lih-chung W. „A Simple Proof of Thue’s Theorem on Circle Packing.” arXiv: Metric Geometry (2010.): <https://doi.org/10.48550/arXiv.1009.4322>
4. Weisstein, Eric W. „Smoothed Octagon.” From MathWorld--A Wolfram Web Resource. <https://mathworld.wolfram.com/SmoothedOctagon.html>, (30. 6. 2024.)
5. Mahler, K. „On the minimum determinant and the circumscribed hexagons of a convex domain” *Indagationes Mathematicae*. 9: 326 – 337. (1947.)
6. Barber, G. „Why Is This Shape So Terrible to Pack?” *Quanta Magazine* (2024.)
7. Fiedman, E. „Circles in Squares”, Erich’s Packing Center, (2010.), <https://erich-friedman.github.io/packing/>, (4. srpanj 2024.)
8. Hatzivelkos, A. „Pakiranje kruga”, (2024.), <https://github.com/hatzivelkos/PakiranjeKrug>, (4. kolovoz 2024.)