Matka 33 (2024./2025.) br. 129

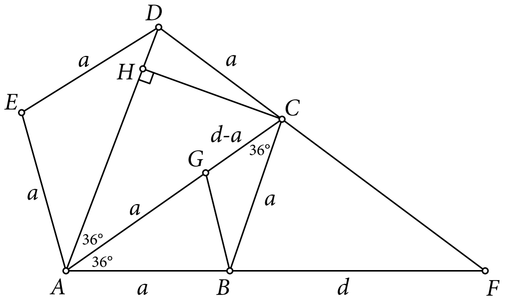
JEDNA SLIKA – PET RJEŠENJA

Dragoljub Milošević, Gornji Milanovac

Rješavanjem jednog istog zadatka na različite načine može se usporedbom rješenja utvrditi koje je od njih kraće, efektnije, elegantnije. Time se stječu i izgrađuju vještine u rješavanju zadataka. Ovdje ćemo prikazati 5 rješenja jednog zadatka iz geometrije korištenjem samo jedne slike:

Ako su *a* i *d* duljine stranice i dijagonale pravilnog peterokuta, dokažimo da vrijedi jednakost $\frac{d}{a} - \frac{a}{d} = 1$.

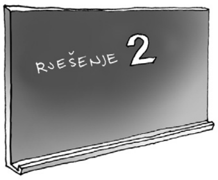
Rješenje 1. Neka je peterokut *ABCDE* pravilan, što znači da su veličine svih njegovih unutarnjih kutova jednake 108° (Slika 1.).



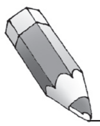
Slika 1.

Trokut ABC je jednakokračan s osnovicom $\overline{AC}$, pa vrijedi $|\angle CAB| = |\angle BCA| = (180° - 108°) : 2 = 36°$. Trokut ACD je jednakokračan s osnovicom $\overline{CD}$ i u njemu vrijedi $|\angle ACD| = |\angle ADC| = 108° - 36° = 72°$. Produljimo li pravac AB do točke F tako da bude $|BF| = |AC| = |AD| = d$, uočavamo da u trokutu BFC vrijedi: $|\angle CBF| = 180° - |\angle ABC| = 180° - 108° = 72°$ i $|\angle BCF| = 180° - |\angle BCD| = 180° - 108° = 72°$. To znači da je trokut BFC jednakokračan, pa je $|CF| = |BF| = d$. Budući da je $|\angle CBF| = |\angle BAD| = 72°$ i $|\angle BCF| = |\angle ADC| = 72°$, zaključujemo da je $AD \parallel BC$.

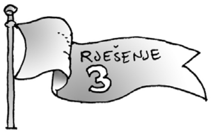
Trokuti ADF i BCF su slični jer imaju sukladne kutove. Iz te sličnosti slijedi da je $|AD| : |AF| = |BC| : |BF|$, tj. $d : (a + d) = a : d$, a odavde je $d^2 = a(a + d)$ tj. $d^2 - a^2 = ad$. Ako obje strane posljednje jednakosti podijelimo s ad, dobivamo traženu jednakost $\frac{d}{a} - \frac{a}{d} = 1$.



Rješenje 2. Na dijagonali $\overline{AC}$ (Slika 1.) označimo točku G tako da je $|AG| = |AB| = a$. Tada je $|CG| = d - a$. U jednakokračnom trokutu ABG je $|\angle AGB| = |\angle ABG| = (180° - 36°) : 2 = 72°$, pa je $|\angle BGC| = 180° - |\angle AGB| = 108°$. U trokutu BCG je $|\angle CBG| = 180° - (108° + 36°) = 36°$, što znači da je taj trokut



jednakokračan, pa je $|BG| = |CG| = d - a$. Jednakokračni trokuti ABC i BCG imaju sukladne kutove pa su slični. Zbog toga je $|AC| : |AB| = |BC| : |CG|$, tj. $d : a = a : (d - a)$. Odatle je $d(d - a) = a^2$, tj. $d^2 - a^2 = ad$. Ako obje strane posljednje jednakosti podijelimo s ad, dobivamo traženu jednakost $\frac{d}{a} - \frac{a}{d} = 1$.



Rješenje 3. Jednakokračni trokuti ABG i BFC su slični (sukladni kutovi!), pa je $|BG| : |AB| = |BC| : |BF|$, odnosno $(d - a) : a = a : d$ ili $d(d - a) = a^2$, a ostalo je kao u rješenju 1.

Rješenje 4. Jednakokračni trokuti BCG i AFC su slični, što znači da je $|BC| : |CG| = |AF| : |AC|$, odnosno da je $a : (d - a) = (d + a) : d$. Odavde slijedi da je $ad = (d - a)(d + a)$, tj. $ad = d^2 - a^2$, a dalje kao u rješenju 1.

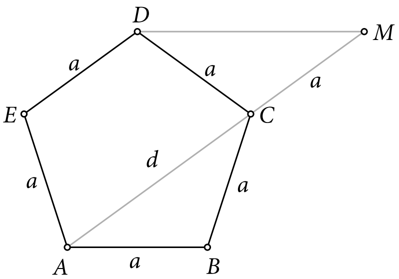
Rješenje 5. Neka je točka H nožište visine $\overline{CH}$ trokuta ACD. Tada je $|DH| = \frac{1}{2}(d - a)$ i $|AH| = \frac{1}{2}(d + a)$ Primjenom Pitagorina poučka na pravokutne trokute ACH i CDH imamo redom $|CH|^2 = |AC|^2 - |AH|^2$, odnosno $|CH|^2 = |CD|^2 - |DH|^2$, što znači da je $|AC|^2 - |AH|^2 = |CD|^2 - |DH|^2$, pa je

$$d^2 - \left(\frac{d+a}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{d-a}{2}\right)^2 \quad \text{tj.} \quad d^2 - a^2 = \left(\frac{d+a}{2}\right)^2 - \left(\frac{d-a}{2}\right)^2 .$$

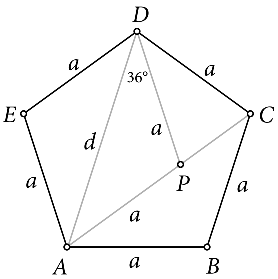
Slijedi da je $d^2 - a^2 = ad$, a dalje kao u rješenju 1.

Zadatci za vježbu:

1. Korištenjem Slike 1. dokaži jednakost $\frac{d}{a} - \frac{a}{d} = 1$ upotrebom Talesova poučka.
2. Dokaži sličnost trokuta AFD i ABG (Slika 1.), a potom i jednakost $\frac{d}{a} - \frac{a}{d} = 1$.
3. Korištenjem Slike 2. dokaži jednakost $\frac{d}{a} - \frac{a}{d} = 1$.
4. Korištenjem Slike 3. dokaži jednakost $\frac{d}{a} - \frac{a}{d} = 1$.



Slika 2.



Slika 3.