

YOHAKU SLAGALICA

Ana Novaković, Zagreb

Još od ranog djetinjstva susrećemo se s različitim slagalicama koje svaka na svoj način potiču razvijanje logičkog razmišljanja. U najnižim godinama to su slikovne slagalice, a kasnije različite matematičko-logičke, pa tako, na primjer, u osnovnim školama imamo Natjecanje u rješavanju SUDOKU zadataka. Dok je u igri sudoku cilj popuniti kvadrat od 9×9 mjesta tako da u svakom retku, stupcu i manjem kvadratu 3×3 budu sadržani svi brojevi od 1 do 9, i u svakoj igri početni brojevi definiraju jednoznačno rješenje, Yohaku slagalica donosi novi koncept numeričkih slagalica. No, krenimo od početka. *Yohaku* na japanskom jeziku znači „prazan prostor”. Tako se i Yohaku slagalica sastoji od „praznih polja” koja je potrebno popuniti po nekom pravilu. Kako ćemo u nastavku otkriti, ova numerička slagalica može biti sa zbrajanjem, množenjem ili kombinacija ovih dviju računskih operacija. Vrsta Yohaku slagalice prema računskoj operaciji uvijek je naznačena u donjem desnom kutu simbolom. Osnovno pravilo za rješavanje glasi: trebate popuniti prazna polja tako da polja daju zbroj ili umnožak prikazan u svakom retku i stupcu (Yohaku, 2022.).

Primjer 1.



		9
		13
11	11	+

3	+	6	=	9
+				
8		5		13
-				
11		11		+

Slika 1. Yohaku 2×2 sa zbrajanjem

U ovom primjeru u bijele kvadratiće upisani su redom 3, 6 u prvom redu te 8 i 5 u drugom. Znak za zbrajanje pokazuje da je $3 + 6 = 9$ vodoravno i $3 + 8 = 11$ okomito. Također, $8 + 5 = 13$ vodoravno i $6 + 5 = 11$ okomito. Odmah uočavamo da smo slagalicu mogli riješiti i na druge načine, tako da u bijele kvadratiće upišemo redom npr. 4, 5, 7, 6 ili 1, 8, 10, 3, odnosno ova Yohaku slagalica ima beskonačno mnogo rješenja. Svaka kombinacija koja daje tražene zbrojeve je točna.

Međutim, kako bi igra bila zanimljivija, većina Yohaku slagalica ima neki uvjet, odnosno ograničenje koje treba ispuniti. Za njihovo rješavanje bit će potrebno malo više razmišljanja. Osim spomenutih uvjeta, Yohaku slagalice pojavljuju se u dimenzijama: 2×2 , 3×3 i 4×4 . Uzimajući u obzir spomenuto, neke Yohaku slagalice mogu se jednostavno riješiti u desetak sekundi, dok će druge zahtijevati više vremena i koncentracije.



Primjer 2.

Koji cijeli brojevi pomnoženi daju 40? Moguća rješenja su $5 \cdot 8 = 40$, $4 \cdot 10 = 40$, $2 \cdot 20 = 40$ itd. Hoće li svi ovi faktori biti „dobri“ za uspješno rješavanje slagalice? Provjermimo.

5	8	40
		96
32	120	×
Koristi samo cijele brojeve		

Slika 3. Yohaku 2×2 s množenjem – pokušaj rješavanja

$5 \cdot 8$ jednako je 40, a 5 i 8 su cijeli brojevi. Zasad izgleda dobro. Koji cijeli broj pomnožen s 5 daje 32? Pa, takav cijeli broj ne postoji. Dakle, 5 i 8 u prvom redu slagalice ne vode nas do uspješnog rješavanja. Pogledajmo dalje: $4 \cdot 10 = 40$. 4 pomnožen s 8 daje 32, 10 pomnožen s 12 daje 120, a $8 \cdot 12 = 96$. 4, 8, 10 i 12 su cijeli brojevi i svi uvjeti su ispunjeni. Uspješno smo riješili i slagalicu s uvjetom.

Znamo da za množenje vrijedi komutativnost. Vrijedi li komutativnost i u Yohaku slagalici? Kad bismo umjesto $4 \cdot 10 = 40$ upisali 10 i 4, odnosno $10 \cdot 4 = 40$, vidimo da bismo ponovno došli u situaciju da ne postoji prirodan broj koji pomnožen s 10 daje 32. No, ako bismo umjesto $5 \cdot 8 = 40$ upisali 8 i 5, odnosno $8 \cdot 5 = 40$, u drugi bismo redak redom mogli upisati brojeve 4 i 24 jer je $4 \cdot 24 = 96$, $8 \cdot 4 = 32$ i $5 \cdot 24 = 120$.

Provjerite postoji li još neko rješenje! Razmislite: kako biste riješili ovu slagalicu da nema ograničenja na cijele brojeve?

Već vidimo da stvari s Yohaku slagalicom mogu postati jako komplicirane, no to je dobro jer tako razvijamo svoje vještine računanja i rješavanja problema. Ono što je posebno važno, kao i kod ostalih problema čija rješenja zahtijevaju koncentraciju i razmišljanje, jest imati na umu da svaki problem, barem Yohaku slagalica, sigurno ima rješenje 😊. Zato je važno biti uporan i ne odustajati na prvoj prepri. S Yohaku slagalicama baš je to slučaj; prilikom rješavanja bit će jako puno pokušaja i promašaja, no neka vas to ne obeshrabri. Ima li što bolje od osjećaja uspješno riješenog problema?

Kad stvari postanu komplicirane, osim upornosti važno je razviti neku strategiju za rješavanje. Postoje efikasne i manje efikasne strategije, a naravno, uvijek nam preostaje i metoda nasumične početne točke u kojoj bez ikakve metode krećemo s nasumičnim brojem koji se čini kao potencijalni kandidat. Naravno, tu metodu ne želimo primjenjivati jer je uvijek uzbudljivije otkriti da smisljena strategija funkcionira i uspoređivati strategije s prijateljima.

		40
		96
32	120	×
Koristi samo cijele brojeve		

Slika 2. Yohaku 2×2 s množenjem

4	10	40
8	12	96
32	120	×
Koristi samo cijele brojeve		

Slika 4. Yohaku 2×2 s množenjem – rješenje



Pogledajmo na primjeru (*Teaching Children Mathematics*, Vol. 24, No. 5 (March 2018), p. 287) koje su potencijalne strategije za ovu slagalicu.

Primjer 3.



<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	15
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	12
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	9
3	19	14	+
Koristi devet uzastopnih brojeva (ne moraju biti uneseni redom)			

Slika 5. Yohaku 3×3 sa zbrajanjem

Kao što se u *Teaching Children Mathematics* predlaže, za početak mogli bismo pokušati s bilo kojih devet uzastopnih brojeva. Ali, odmah uočavamo da nije jednostavno rasporediti devet brojeva tako da njihovi zbrojevi odgovaraju onomu što slagalica traži. Moguće je, ali mora postojati efikasnija strategija. Možemo uočiti da zbroj devet uzastopnih brojeva mora biti jednak zbroju zbrojeva koji su definirani u slagalici na početku – u desnom stupcu ili u donjem retku, dakle 36. Razmislite zašto je to tako. Dakle, kojih devet uzastopnih brojeva u zbroju daje 36? To su, naravno, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 i 8. Sad nam preostaje samo posložiti brojeve od 0 do 8 u slagalicu tako da odgovaraju zadanim zbrojevima. Riješite slagalicu do kraja!

U matematici znamo zbrajati brojeve, ali i algebarske izraze. Kako je podloga ove slagalice strateško-matematička, nema razloga zašto ne bismo imali Yohaku slagalice s algebarskim izrazima.

Primjer 4.

Uočite da ova slagalica ima dva dodatna uvjeta. Koja će dva brojeva izraza u zbroju dati $2x$, a da su pritom različiti? Odmah nam otpada prvo logično rješenje: $x + x$, jer svako polje mora biti različito. No, $x + x$ pada i na testu drugog uvjeta jer svaki izraz mora sadržavati x i y . S obzirom na to da u zbroju $(2x)$ nemamo y , trebamo se sjetiti da uvijek možemo nešto dodati, pa onda oduzeti.

Jedno moguće rješenje prikazano je na Slici 7.

<input type="text"/>	<input type="text"/>	$3x + y$
<input type="text"/>	<input type="text"/>	$2y$
$2x$	$3y + x$	+
Svako polje mora sadržavati različit algebarski izraz. Svaki algebarski izraz mora sadržavati x i y .		

Slika 6. Yohaku 2×2 s algebarskim izrazima

$x + y$	$2x + 2y$	$3x + y$
$x - y$	$-x + y$	$2y$
$2x$	$3y + x$	+
Svako polje mora sadržavati različit algebarski izraz. Svaki algebarski izraz mora sadržavati x i y .		

Slika 7. Yohaku 2×2 s algebarskim izrazima – rješenje



I prije kraja – ideja: organizirajte s prijateljima natjecanje u rješavanju Yohaku slagalica. Sami osmislite zadatke, mogućnosti je beskonačno. Podijelite se u grupe ili parove i rješavajte slagalice koje ste osmislili jedni za druge. Za dozu zanimljivosti, svaku slagalicu možete nacrtati na ploči. Za slagalice u kojima znate koje brojeve treba upisati ali ne znate raspored, npr. zadatak sa Slike 5, poznate brojeve napišite na ljepljive papiriće i zalijepite u polja na ploči. Jednostavnim premještanjem ljepljivih papirića lakše ćete vizualizirati tražene zbrojeve. Druga ideja; natjecanje može biti koncipirano tako da se natječu dva učenika. Rješavate istu slagalicu koristeći brojeve dobivene na ljepljivim papirićima. Pobjednik je onaj koji prvi ispravno zalijepi brojeve u odgovarajuća polja. Ideja za slagalice ne može nedostajati, a za kraj malo inspiracije za osmišljavanje slagalica, koje usput možete i riješiti.

Zadaci za vježbu

□	□	□	□	143
□	□	□	□	99
□	□	□	□	224
□	□	□	□	134
263	171	114	52	+

Koristi 16 različitih djelitelja broja 216.

Zadatak 1.

□	□	□	□	120
□	□	□	□	172
□	□	□	□	126
□	□	□	□	78
168	90	132	106	+

Koristi 16 uzastopnih prostih brojeva.

Zadatak 2.

□	□	□	144
□	□	□	315
□	□	□	65
180	182	90	×

Zbroj brojeva u označenim poljima treba biti 24.

Zadatak 3.

□	□	□	-320
□	□	□	-315
□	□	□	66
308	-40	-540	×

Koristi različite cijele brojeve.
Zbroj 9 upisanih brojeva treba biti 11.

Zadatak 4.



Izvori:

1. *Teaching Children Mathematics*, Vol. 24, No. 5 (March 2018), pp. 286-290 (6 pages)
2. *Teaching Children Mathematics*, Vol. 25, No. 5 (March 2019), pp. 266-270 (6 pages)
3. *Yohaku: A New Type of Number Puzzle*, (2022., studeni), <https://www.yohaku.ca>

Rješenja zadataka provjerite na stranici 69.

