Matka 33 (2024./2025.) br. 129

Petar Mladinić, Zagreb

NEKADA I DANAS: RJEŠAVANJE JEDNADŽBI (1. dio)

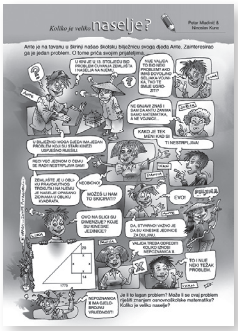
U ovom ćemo tekstu razmotriti i ilustrirati primjerima kako su nekada stari grčki, kineski, indijski i islamski Matemagičari uspješno rješavali jednadžbe. Na sličan su način jednadžbe rješavali i drugi stari Matemagičari. Ukazat ćemo i na to kako se te jednadžbe rješavaju danas.

Elementarna geometrija koju su oni uporabljivali i domišljatost primjene geometrijskih konstrukcija u rješavanju pojedinih vrsta problema i s time povezanih jednadžbi, danas ima drugu ulogu u školskoj matematici.

Vrijeme u kojem su se rješavale ovakve jednadžbe nije poznavalo pojam negativnog broja koji mi danas poznajemo i koristimo u rješavanju. Nisu znali za nepoznanice, nego su koristili izraze *stranica pravokutnika*, *duljina* ili *širina*, a njihov umnožak bila je *površina*. Geometrijska algebra naveliko se primjenjivala u staroj grčkoj matematici. Na njoj su utemeljeni radovi **Euklida** (oko 340. - oko 287. g. pr. K.), **Arhimeda** (287. - 212. g. pr. K.), Apolonija i drugih Matemagičara.

1. Uvodni strip zadatci iz Matke

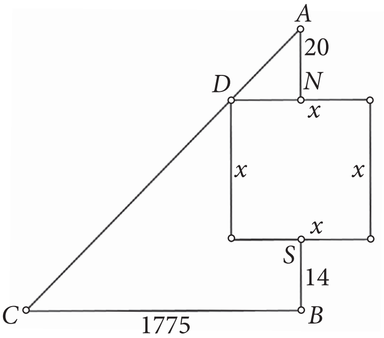
U Matki broj 95 u ožujku 2016. objavili smo strip zadatak *Koliko je veliko naselje?*. Ovaj je strip zadatak inačica Problema 1.



To je zadatak iz 9. poglavlja *Jiuzhang suanshu* ili *Devet poglavlja o matematičkom umijeću* koji je praktičan kineski priručnik iz matematike. Sastoji se od 246 problema s namjerom pružiti metode koje se koriste za rješavanje svakodnevnih problema inženjerstva, geodezije, trgovine i oporezivanja. Odigrao je temeljnu ulogu u razvoju matematike u Kini. Ne razlikuje se od uloge Euklidovih *Elemenata* u matematici koja se razvila na temeljima koje su postavili stari Grci.

U ovom poglavlju postoje 24 problema koji se temelje na pravokutnim trokutima. Prvih 13 problema rješava se primjenom Pitagorina poučka koji su Kinezi poznavali kao *Gouguovo pravilo*. Dva problema proučavaju ono što se danas naziva *Pitagorinim trokutima*, dok se preostali koriste teorijom sličnih trokuta. Evo primjera korištenja sličnih trokuta u problemu broj 20 u spomenutom poglavlju.

Problem 1. *Postoji četvrtasti grad nepoznatih dimenzija. U sredini svake strane su vrata. Dvadeset koraka izvan Sjevernih vrata nalazi se drvo. Ako netko napusti grad kroz Južna vrata, hoda 14 koraka prema jugu, a zatim hoda prema zapadu 1775 koraka, stablo će se samo pojaviti u pogledu. Koje su dimenzije grada?*



Na slici su Sjeverna vrata označena s N, Južna vrata su S, a stablo je označeno slovom A. Hodajući južno od S 14 koraka, dolazi se do točke B, skreće se na zapad i hoda 1775 koraka do točke C. Iz točke C stablo na mjestu A je vidljivo tako da pravac CA prolazi kroz vrh D kvadrata.

Trokuti AND i ABC su slični pa vrijedi $\frac{|AN|}{|ND|} = \frac{|AB|}{|BC|}$, tj. $\frac{20}{\frac{x}{2}} = \frac{20+x+14}{1775}$,

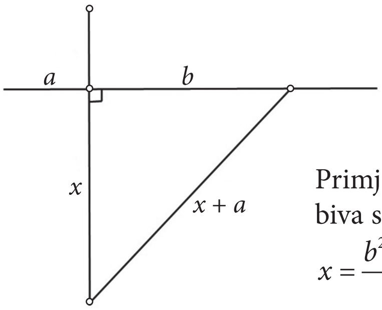
odakle sređivanjem dobivamo $x^2 + 34x = 71\,000$. Pozitivno rješenje jednadžbe je $x = 250$, što znači da je strana grada duljine 250 koraka, tj. grad je kvadrat dimenzija 250×250.

Kvadratne jednadžbe po prvi se put razmatraju u 9. poglavlju. Rješavaju se analogno dijeljenju koristeći ideje iz geometrije, zapravo iz kineskog algoritma kvadratnog korijena, a ne iz algebre.

Drugi je strip zadatak *Koliko je duboka lučica?* zadan u Matki broj 85 u rujnu 2013. godine. To je inačica sljedećeg problema:

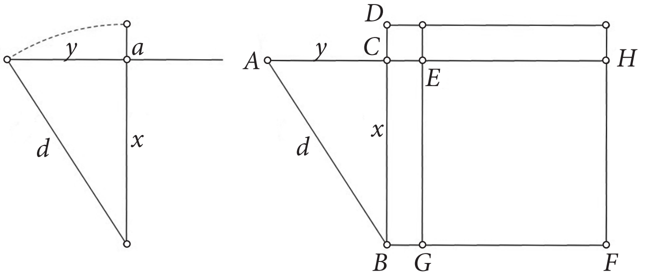
Problem 2. *Odredite duljinu dijela trske ispod površine vode (u stripu se traži dubina lučice), uz uvjet da kad vjetar puše, onda joj svine vrh do razine vode.*

Duljina trske ispod razine vode je x, a iznad vode je duljina a. Udaljenost b je odmak od vertikalnog položaja trske do položaja kada vrh trske zbog vjetra dira vodu (vidi sliku).



Primjenom Pitagorina poučka dobiva se $(x+a)^2 = x^2 + b^2$, odnosno $x = \frac{b^2 - a^2}{2a}$.

Ilustrirajmo kako se problem duljine trske koja raste iz vode riješio u *9. poglavlja Jiuzhang suanshu* ili *Devet poglavlja o matematičkom umijeću*.



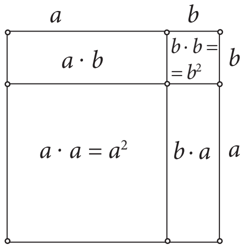
Međutim, nije jasno je li kineski autor pronašao rješenje algebarski kao gore ili prikazanom ekvivalentnom geometrijskom metodom, gdje je

$$y^2 = |AC|^2 = |AB|^2 - |BC|^2 = |BD|^2 - |EG|^2 = |DE|^2 + 2 \cdot |CE| \cdot |BC| = a^2 + 2ax.$$

2. Primjeri problema/zadataka

Danas u školskoj nastavi rabimo geometrijsku ilustraciju formule za kvadrat binoma. Stari su Matemagičari pomoću dužina, kvadrata i pravokutnika interpretirali svoje probleme i ukazivali konstrukcijom na rješenje.

Problem 3. Euklid je u svojim *Elementima* napisao u Propoziciji II-4:



Ako je ravna crta nasumično izrezana, kvadrat cjeline jednak je kvadratima na segmentima i dva pravokutnika na segmentima.

Ta se njegova tvrdnja danas zapisuje formulom $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

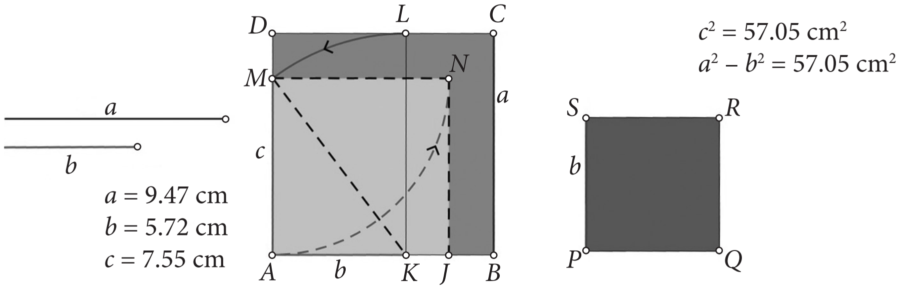
Shulba Sutre dio su većeg korpusa tekstova koji se nazivaju *Shrauta Sutre*, a koji se smatraju dodatcima Vedama. Oni su jedini izvori znanja o indijskoj matematici iz vedskog razdoblja. Opišimo postupak iz *Sulvasutras* kojim se određuje kvadrat koji je jednak razlici dvaju kvadrata.

Problem 4. *Zadani su kvadrat ABCD sa stranicom duljine a i kvadrat PQRS sa stranicom duljine b. Konstruirajte* kvadrat $AJNM$ sa stranicom duljine c tako da vrijedi $c^2 = a^2 - b^2$.

Rješenje.

- Konstruirajmo zadane kvadrate $ABCD$ i $PQRS$.
- Na stranici $\overline{AB}$ konstruirajmo točku K.
- Pravac točkom K usporedan s BC siječe dužinu $\overline{CD}$ u točki L.
- Kružnica $k(K, |KL|)$ i dužina $\overline{AD}$ sijeku se u točki M.
- Dužina $\overline{AM}$ je stranica kvadrata koji je razlika dvaju kvadrata $ABCD$ i $PQRS$.

Na slici se vidi da su konstruirani kvadrati i provjereno je konkretnim izračunom da je konstrukcija točna.[1]



Površina $ABCD = 89.72$ cm^2 Površina $AJNM = 57.05$ cm^2 $AK = 5.72$ cm
Površina $PQRS = 32.67$ cm^2 $PQ = 5.72$ cm

(Površina $AJNM$) + (Površina $PQRS$) = 89.72 cm^2

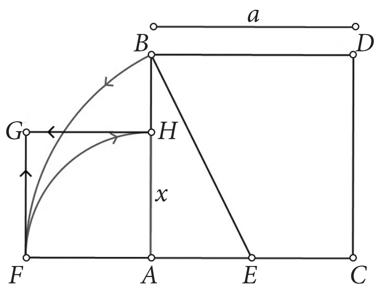
Problem 5. *Podijelite dužinu tako da pravokutnik sadržan na cijelom i jednom od odsječaka bude jednak kvadratu na preostalom odsječku.*

Smisao je ovog zahtjeva naći točku H na dužini tako da je $|AB|\cdot|HB|$ jednako kvadratu na $|AH|$. Algebarski se radi o sljedećem: neka je $|AB| = a$ i $|AH| = x$. Tada je $|HB| = a - x$ i problem se svodi na rješavanje jednadžbe

$$a(a-x) = x^2 \text{ ili } x^2 + ax = a^2.$$

Babilonsko rješenje je $x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2}$.

Euklidova konstrukcija rješenja je (vidi sliku):



Konstrukcija:

1. Konstruirajmo kvadrat $ABDC$ sa stranicom duljine $|AB| = a$.
2. Točka E polovište je stranice $\overline{AC}$.
3. Točka F presjek je kružnice $k(E,|EB|)$ i pravca AC.

[1]Konstrukcija je kreirana pomoću softvera dinamične geometrije *Sketchpad 5.03HR* te daje uvjerljive argumente dinamičnim mijenjanjem duljina stranica a i b.

4. Točka H presjek je kružnice $k(A,|AF|)$ i stranice $\overline{AB}$.
5. Pravac točkom H usporedan sa stranicom $\overline{AC}$ i pravac točkom F usporedan sa stranicom $\overline{AB}$ sijeku se u točki G.
6. Kvadrat $AFGH$ kvadrat je s duljinom stranice $|AH| = x$.

Dakle, vrijedi $|EF| = |EB|$ i $|AF| = |AH|$.

S podatcima na dinamičnoj konstrukciji slike imamo argumente da je postupak korektan (vidi sliku).

$a = 10.00$ cm

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2} \qquad x = 6.18 \text{ cm}$$

$AB = 10.00$ cm

$AH = 6.18$ cm

$AB \cdot AH = 61.82$ cm^2

$$\sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + AB^2} - \frac{AB}{2} = 6.18 \text{ cm}$$

3. Zadatci za Matkače

1. Nađite stranice pravokutnika ako znate razliku duljina njegovih stranica i njegovu površinu.
2. Površina pravokutnika je 864. Širina je manja od duljine za 12. Odredite duljinu.
3. Površina pravokutnika je 864. Za koliko je duljina veća od širine?

Literatura:

1. Katz, V. B. (1998.): *A history of mathematics: an introduction*, Addison Wesley, USA
2. Smith, D.E. (1958.): *History of mathematics*, vol I and II, Dover, New York
3. Libbrecht, U. (2005.) *Chinese Mathematics in the Thirteenth Century*, Dover, New York
4. Smith, D. E., Mikami, Y. (2004.) *A history of Japanese mathematics*, Dover, New York
5. Heth, T. L. (2003.) *A manual of Greek mathematics*, Dover, New York
6. Gleizer, G. I. (2003.) *Povijest matematike za školu*, Školske novine, Zagreb

Napomena. Jednom knjigom iz Matkine biblioteke nagradit ćemo onoga tko pošalje rješenje najmanje jednog zadatka.