

JEDNA IGRA O POGAĐANJU ZAMIŠLJENOG BROJA

Dragoljub Milošević, Gornji Milanovac

Matkačima su svakako poznate razne igre koje, zapravo, predstavljaju niz naizmjeničnih postupaka dvaju igrača u skladu s unaprijed utvrđenim pravilima. Ovakvih igara ima mnogo, zanimljivih i manje zanimljivih, jednostavnijih i složenijih. Prikazat ćemo vam jednu zanimljivu igru pogađanja broja na vrlo skriven način.



Razgovor između Vedrane i Stjepana, dvoje sudionika u igri, tekao je ovako:

- Zamisli jedan od prvih dvadeset prirodnih brojeva, a zatim ga podijeli brojem 4. Reci mi ostatak tog dijeljenja – obrati se Vedrana Stjepanu.
- Zašto baš brojem 4? No, dobro, ostatak je 1.
- Podijeli ga sada brojem 5. Koliki ti je ostatak?
- Dva. Sad tek ništa ne razumijem – reče Stjepan.

Vedrana se malo zamisli, u sebi izračuna i reče: - Zamislio si broj 17.

Stjepan je bio zapanjen točnim odgovorom: - Nevjerojatno, ali istinito. Nauči i mene toj vještini!

KAKO SI
POGODILA?



Objasnit ćemo na koji se način može otkriti ova „vještina pogađanja” zamišljenog broja.

Neka su ostatci dijeljenja broja x brojevima 4 i 5 redom jednaki m i n . Kako je najmanji zajednički višekratnik brojeva 4 i 5 broj 20, promatrat ćemo jednakost

$$Am + Bn = 20k + x, \quad (1)$$

gdje su A i B nepoznati brojevi koje ćemo odrediti.

Ako izraz $Am + Bn$ podijelimo brojem 20, dobit ćemo kao ostatak zamišljeni broj x . To znači da je

$$\begin{aligned} x = 4a + m \text{ i } x = 5b + n, \quad \text{tj.} \\ m = x - 4a \text{ i } n = x - 4b, \end{aligned} \quad (2)$$

pri čemu su a i b nepoznati prirodni brojevi. Supstitucijom (2) u (1) dobivamo

$$A(x - 4a) + B(x - 5b) = 20k + x,$$

ili

$$(A + B - 1)x - (4Aa + 5Bb) = 20k.$$

Da bi izraz na lijevoj strani posljednje jednakosti bio djeljiv brojem 20, dovoljno je da to pojedinačno budu umanjnik i umanjitelj, tj.

$$A + B - 1 = 20t \quad (3)$$

i

$$4Aa + 5Bb = 20s, \quad (4)$$

gdje su t i s prirodni brojevi.



Iz jednakosti (4) slijedi da je

$$A = 5p \text{ i } B = 4q \text{ (pri čemu su } p \text{ i } q \text{ prirodni brojevi),} \quad (5)$$

a iz (5) i (3) slijedi da je $5p + 4q = 20t + 1$, odakle je $q = 5t - p - \frac{p-1}{4}$.

Da bi posljednji izraz bio cijeli broj, zaključujemo da je broj $p - 1$ djeljiv brojem 4, tj. da je broj p oblika $p = 4c + 1$ (c je nenegativan cijeli broj). Zbog toga je $q = 5(t - c) - 1$, $t > c$, pa je (p, q) opće rješenje neodređene jednačbe $5p + 4q = 20t + 1$ u skupu prirodnih brojeva.

Kako nas zanimaju posebno i najjednostavnije rješenje, uzimamo da je $t = 1$ i $c = 0$. Sada imamo partikularno rješenje $p = 1$ i $q = 4$. Iz prethodnog rješenja i jednakosti (5) slijedi da je $A = 5$ i $B = 16$. Znači, koristit ćemo jednakost

$$5m + 16n = 20k + x,$$

gdje su m i n redom ostatci dijeljenja broja x brojevima 4 i 5. U konkretnom slučaju, za $m = 1$ i $n = 2$ imamo

$$(5 \cdot 1 + 16 \cdot 2) : 20 = 1 + \frac{17}{20}.$$

Da bi igra bila zamršenija i interesantnija, zamišljeni se broj može dijeliti s više od dva unaprijed dana broja (u prethodnom primjeru to su bili 4 i 5).

Ako trebamo, na primjer, konstruirati igru pogađanja prirodnih brojeva ne većih od 140, možemo koristiti jednakost

$$105a + 56b + 120c = 140k + x,$$

gdje su a , b i c ostatci dijeljenja broja x redom brojevima 4, 5 i 7. Dokažite to!



SVOJIM
ČITATELJIMA
I SURADNICIMA
ŽELIMO SRETAN
BOŽIĆ
I USPJEŠNU NOVU
2025. GODINU!

UREDNIŠTVO  MATKE

