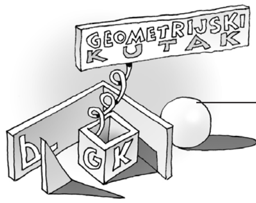
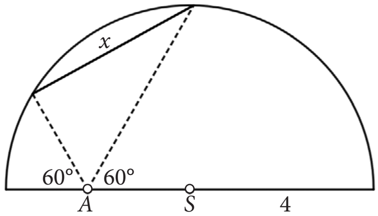


TROKUT, ČETVEROKUT I KRUG

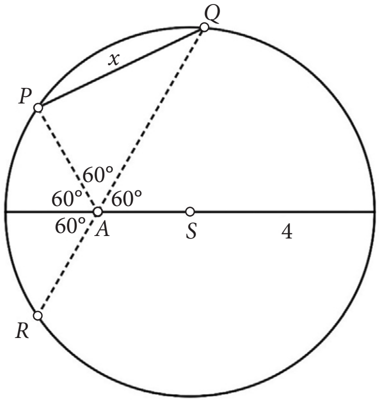
Zlatko Lobor, Zagreb

Primjer 1. Na promjeru polukruga po volji je odabrana točka A. Kolika je duljina x istaknute tetive ako je duljina polumjera jednaka 4?

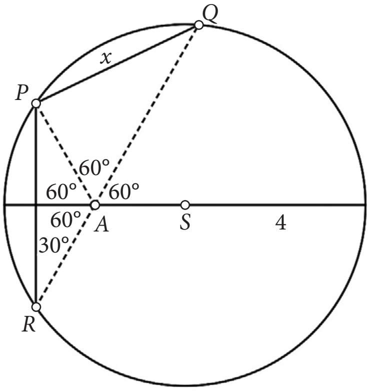


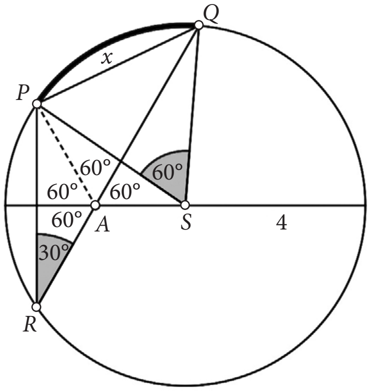
Rješenje: Najprije dopunimo polukružnicu do cijele kružnice te označimo krajnje točke tetive s P i Q.

Kut $\angle QAP$ ima mjeru 60° jer zajedno s još dva kuta od 60° čini ispruženi kut.



Produljimo dužinu $\overline{AQ}$ preko točke A tako da produžetak siječe kružnicu u točki R. Kut $\angle QAR$ ispruženi je kut, stoga produžetak $\overline{AR}$ s promjerom također zatvara kut od 60°.

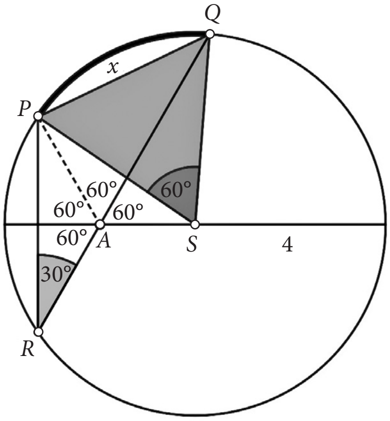




To znači da je spojnica $\overline{PR}$ okomita na promjer kružnice te da $\angle QRP$ ima mjeru 30°.

Taj je kut obodni nad tetivom $\overline{PQ}$, odnosno pripadnim lukom, a središnji je kut nad istim lukom $\angle QSP$. Taj je kut prema poučku o središnjem i obodnom kutu dvostruko veći od istaknutog pripadnog obodnog $\angle QRP$, tj. ima mjeru 60°.

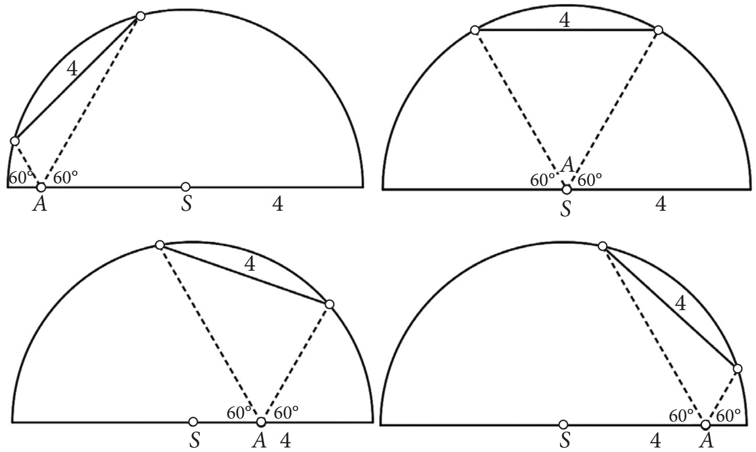
Budući da je $|PS| = |QS|$, jer su to polumjeri kružnice, a kut između njih ima mjeru 60°, možemo zaključiti da je trokut PSQ jednakostraničan.



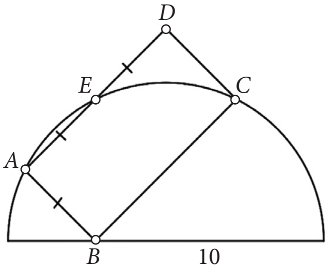
Iz toga slijedi da je $x = |PS| = |QS| = 4$, što se u zadatku i tražilo.

Direktna je posljedica ovoga zadatka još jedna zanimljiva tvrdnja.

Kako je točka A na promjeru bila odabrana po volji, možemo zaključiti da će duljina tetive, koja ispunjava uvjete zadatka, biti jednaka radijusu kružnice za svaku točku polumjera osim krajnjih. Evo još nekoliko primjera koji to potvrđuju:

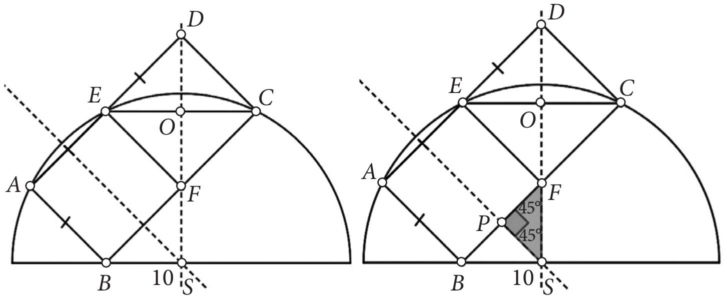


Primjer 2. Duljina promjera polukruga iznosi 10. Kolika je površina pravokutnika *ABCD*?



Rješenje: Označimo duljinu stranice $\overline{AB}$ pravokutnika *ABCD* s *a*. Duljina stranice $\overline{AD}$ je onda 2*a*. Istaknimo na slici i dužinu $\overline{EF}$ koja dani pravokutnik dijeli na dva kvadrata *ABFE* i *EFCD*.

Dužine $\overline{AE}$ i $\overline{EC}$ tetive su kružnice pa njihove simetrale sigurno prolaze središtem kružnice. Osim toga, $\overline{EC}$ je i dijagonala kvadrata *EFCD* , što znači da njezina simetrala prolazi i točkama *D* i *F*.

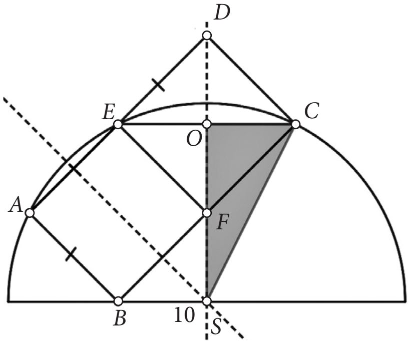


Također, kut $\angle FSP$ između simetrala dužina $\overline{AE}$ i $\overline{EC}$ ima mjeru 45° jer kut $\angle AEC$ između samih dužina ima mjeru 135°. Kako su $\angle AEC$ i $\angle FSP$ kutovi s međusobno okomitim kracima različitih vrsta, oni su suplementarni, tj. zbroj mjera im je 180°. To znači da je *SFP* pravokutni jednakokračni trokut kojemu krakovi imaju duljine $|SP| = |FP| = \frac{a}{2}$, a osnovica $|SF| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Promotrimo sada na sljedećem crtežu pravokutni trokut *SCO*.

U tom trokutu vrijede sljedeće mjere.

$|SO| = |SF| + |FO| = \frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$ (ta je duljina jednaka duljini dijagonale kvadrata *ABFE*),



$|OC| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (polovina dijagonale kvadrata *EFCD*) i

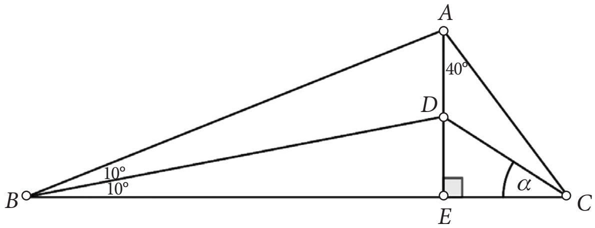
$|SC| = 5$ (duljina polumjera kružnice).

Prema Pitagorinu poučku vrijedi $|SO|^2 + |OC|^2 = |SC|^2$.

Slijedi $\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 5^2$, tj. $2a^2 + \frac{a^2}{2} = 25$, iz čega se dobiva $a^2 = 10$.

Stoga površina pravokutnika *ABCD* iznosi $P = a \cdot 2a = 2a^2 = 2 \cdot 10 = 20$.

Zadatak 1. Kolika je mjera kuta α u trokutu na slici?



Izvor:

1. https://www.youtube.com/@MindYourDecisions/videos