



MATEMAGIČAR

МѠМѠМѠМѠМѠМѠ

Petar Mladinić, Zagreb

NEKADA I DANAS: RJEŠAVANJE JEDNADŽBI (2. dio)¹

U prošlom smo broju započeli s razmatranjem i ilustriranjem primjera kako su nekada stari grčki, kineski, indijski i islamski Matemagičari uspješno rješavali jednadžbe. Na sličan su način jednadžbe rješavali i drugi stari Matemagičari. Ukazat ćemo i na to kako se te jednadžbe rješavaju danas.

МѠМѠМѠМѠМѠМѠ

Elementarna geometrija koju su oni uporabljivali i domišljatost primjene geometrijskih konstrukcija u rješavanju pojedinih vrsta problema i s time povezanih jednadžbi, danas ima drugu ulogu u školskoj matematici.

Vrijeme u kojem su se rješavale ovakve jednadžbe nije poznavalo pojam negativnog broja koji mi danas poznajemo i koristimo u rješavanju. Nisu znali za nepoznanice, nego su koristili izraze *stranica pravokutnika*, *duljina* ili *širina*, a njihov umnožak bila je *površina*. Geometrijska algebra naveliko se primjenjivala u staroj grčkoj matematici. Na njoj su utemeljeni radovi **Euklida** (oko 340. - oko 287. g. pr. K.), **Arhimeda** (287. - 212. g. pr. K.), Apolonija i drugih Matemagičara.

Islamski Matemagičar **Muhamad ibn Musa al-Khwarizmi** (oko 750. - 830.) i drugi rješavali su jednadžbe oblika:



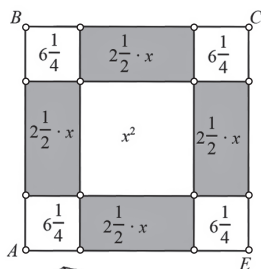
1. $ax^2 = bx$
2. $ax^2 = c$
3. $bx = c$
4. $ax^2 + bx = c$
5. $ax^2 + c = bx$
6. $bx + c = ax^2$

Standardni oblik jednadžbe danas je $ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in R, a \neq 0$, a algebarsko je rješenje u obliku

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Problem 6. Kvadrat i 10 korjenova jednako je 39.

Rješenje. Za rješavanje promatra se kvadrat (vidi sliku) s nepoznatom duljinom stranice x na čijim stranicama leže pravokutnici tako da je druga stranica svakog od njih duljine $2\frac{1}{2}$. Prema tome, površina svakog od njih je $2\frac{1}{2} \cdot x$.



¹Nastavak iz Matke broj 129

Dobiveni lik nadopunjuje se do novog kvadrata $ABCE$ dodavanjem četiriju sukladnih kvadrata, svakog sa stranicom duljine $2\frac{1}{2}$ (i površinom $6\frac{1}{4}$).

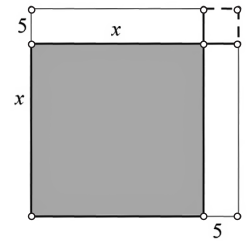
Tada se površina P kvadrata $ABCE$ može predočiti kao zbroj površina početnog kvadrata x^2 , četiriju pravokutnika $\left(4 \cdot 2\frac{1}{2} \cdot x = 10x\right)$ i četiriju pridodanih kvadrata $\left(4 \cdot 6\frac{1}{4} = 25\right)$.

Odavde je površina jednaka $x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$, odnosno $x^2 + 10x + 25 = 64$, tj. duljina stranice kvadrata $ABCE$ jednaka je 8.

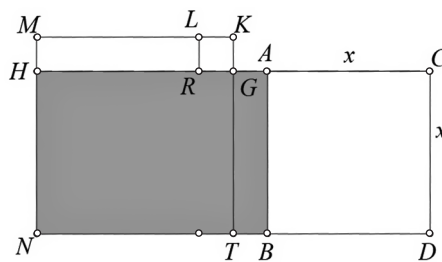
Za nepoznatu duljinu stranice x prvog kvadrata dobivamo da je $x = 8 - 2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = 3$.

Problem se algebarski interpretira kao rješavanje jednadžbe $ax^2 + bx = c$. Ovaj se problem može riješiti i na sljedeći način, tj. drugom domišljatošću.

Al-Khwarizmi rješava jednadžbu $x^2 + 10x = 39$ tako da rješava jednadžbu u kojoj dodaje i lijevoj i desnoj strani 25 (v. sl.). Dakle, rješava jednadžbu $x^2 + 10x + 25 = 64$. Lijeva i desna strana jednadžbe su kvadrati sa stranicama duljine $x + 5$, odnosno 8, tj. vrijedi $(x + 5)^2 = 8^2$, odnosno $x + 5 = 8$, tj. $x = 3$. Dakle, uz ovu domišljatost provjera pokazuje da je $3^2 + 10 \cdot 3 = 39$ njegovo rješenje točno.



Problem 7. Al-Khwarizmi ovako je geometrijski (vidi sliku) riješio jednadžbu $x^2 + c = bx$.

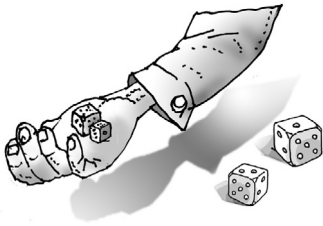


Konstrukcija:

1. $ABDC$ je kvadrat sa stranicom duljine x .
2. Pravokutnik $ABNH$ predstavlja c .
3. $|HC|$ predstavlja b .
4. Polovište dužine HC je točka G .
5. Točka K je takva da je $|GK| = |GA|$ i definiran je pravokutnik $GKMH$.
6. Odabere se točka L na \overline{KM} tako da je $|KL| = |GK|$ i nacrtava se kvadrat $KLRG$.



7. Vidi se da je pravokutnik $MLRH$ jednak pravokutniku $GABT$.
8. Površina kvadrata $KMNT$ jednaka je $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, a površina malog kvadrata $KLRG$ jednaka je površini pravokutnika $ABNH$ ili c .
9. Odavde je kvadrat $KLRG$ jednak $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$.
10. $x = |AC| = |CG| - |AG|$ jednako je $x = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$.



Antički Matemagičari riješili su niz praktičnih problema. Jedan od najpoznatijih je *Duplikacija kocke*.

Problem 8. Zadana je kocka s bridom duljine a . Odredite duljinu brida dvostuko veće kocke.

Problem je postavio **Hipokrat** u 5. st. pr. Kr. tražeći dvije proporcionalnosti x, y između duljina a i $2a$, tj. $a < x, y < 2a$, tako da vrijedi

$$a : x = x : y = y : 2a.$$

Ovo je ekvivalentno trima jednadžbama: $x^2 = ay, y^2 = 2ax$ i $xy = 2a^2$.

Prve dvije jednadžbe predstavljaju parabole, a treća hiperbolu.

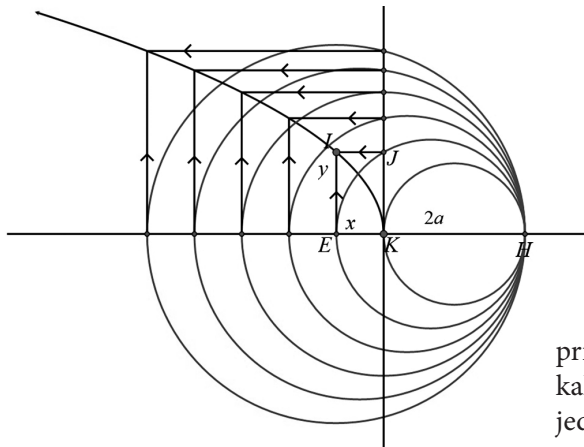
Menehmo je u 4. st. pr. Kr. prvi konstruirao krivulje koje zadovoljavaju ove uvjete. Nije poznato kako je to učinio. Konstruirao se točka krivulje koja zadovoljava $y^2 = 2ax$.

Neka su $2a$ i x zajedno na istom pravcu. Nacrtaj polukružnicu iznad promjera $2a$ i okomice na krajevima dvaju segmenata. Tada neka se na okomicama nacrtaju y koji zadovoljava jednadžbu.

Konstrukcija:

1. Kružnica promjera $2a$.
2. $|EK| = x$.
3. Konstruiraj točku I kao presjek.
4. Konstruiraj još nekoliko točaka.
5. Spoji koordinatni sustav i geometrijsku konstrukciju.
6. Nacrtaj graf funkcije (parabolu) na kojoj su točke konstrukcije.



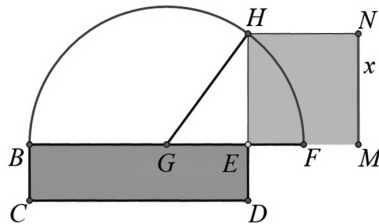


I na kraju ovog prikaza ukažimo na to kako je Euklid riješio jednadžbu $x^2 = c$.

Problem 9. *Konstruirajte kvadrat jednak zadanom pravokutniku.*
U algebarskoj terminologiji Euklid je riješio jednadžbu oblika $x^2 = c$.

Površina pravokutnika $BCDE$ jednaka je c . Točka G je polovište dužine \overline{BF} . Točka H je presjek polukružnice $k(G, |GF|)$ i pravca DE .

Traženi kvadrat je $EMNH$ sa stranicom duljine $x = |EH|$.



$$\text{Površina } BCDE = 16.54 \text{ cm}^2$$

$$x^2 = 16.54 \text{ cm}^2 \quad \text{Površina } EMNH = 16.54 \text{ cm}^2$$

$$\sqrt{\text{Površina } EMNH} = 4.07 \text{ cm} \quad x = 4.07 \text{ cm}$$

3. Nekoliko zadataka

1. Riješite geometrijski i algebarski jednadžbu $x^2 + 50 = 15x$.
2. Riješite geometrijski i algebarski jednadžbu $x^2 + 30 = 10x$.

Literatura:

1. Katz, V. B. (1998.): *A history of mathematics: an introduction*, Addison Wesley, USA
2. Smith, D.E. (1958.): *History of mathematics*, vol I and II, Dover, New York
3. Libbrecht, U. (2005.) *Chinese Mathematics in the Thirteenth Century*, Dover, New York
4. Smith, D. E., Mikami, Y. (2004.) *A history of Japanese mathematics*, Dover, New York
5. Heth, T. L. (2003.) *A manual of Greek mathematics*, Dover, New York
6. Gleizer, G. I. (2003.) *Povijest matematike za školu*, Školske novine, Zagreb

Napomena. Jednom knjigom iz Matematike biblioteke nagradit ćemo onoga tko pošalje rješenje barem jednog zadatka.

