



Tvrtko Tadić, Redmond, SAD

JE LI U LOTU 7/35 BROJ 1 IZVUČEN PREVIŠE PUTA?

Kao što su mnogi Matkači vidjeli na televiziji, Hrvatska lutrija organizira više igara na sreću, a među njima je i Loto 7/35. To je igra u kojoj se u bubnju nalaze kuglice s brojevima od 1 do 35, a slučajnim se odabirom iz bubnja izvlači 7 kuglica. Svaka kuglica ima jednaku vjerojatnost biti izvučena pa je, prema tome, za očekivati da se svaki broj u više izvlačenja pojavi *podjednako* mnogo puta. Izvlačenja se odvijaju dva puta tjedno. Oni koji igraju ovu igru odabiru 7 brojeva. Ako 4 ili više od tih brojeva bude izvučeno, dobivaju novčanu nagradu. Nagrada je veća što su više brojeva pogodili.

Ljudi često prate statistiku izvučenih brojeva ne bi li utvrdili neku pravilnost i tako poboljšali svoje izgleda za dobitak. Vidjet ćemo da ta statistika može sugerirati pravilnost koje zapravo nema.

Frekvencija pojavljivanja brojeva

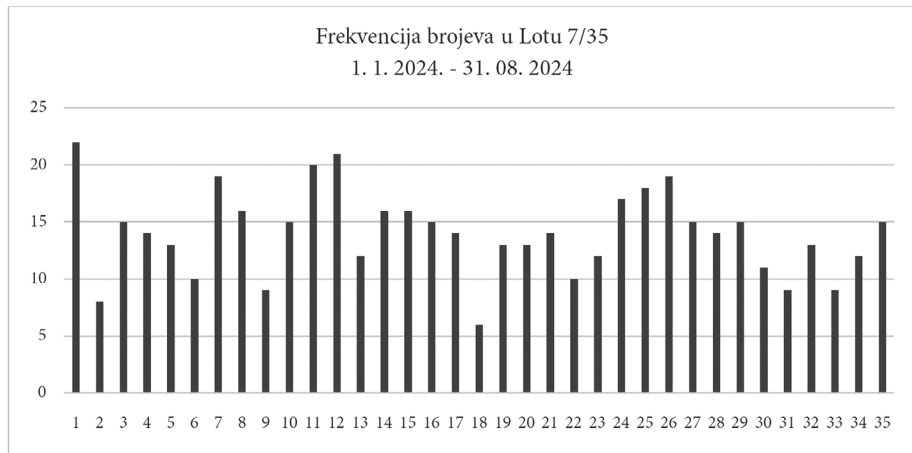
Pogledajmo razdoblje od 1. 1. 2024. do 31. 8. 2024. godine. U tom razdoblju održano je **70 izvlačenja** i izvučeno je **490 kuglica**. Očekujemo da se svaka kuglica pojavila *približno* 14 puta. No je li zbilja tako bilo? Pogledajmo frekvenciju kojom su se pojavljivali brojevi u tom razdoblju.¹

kuglica s brojem	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
izvučena puta	22	8	15	14	13	10	19	16	9	15	20	21
kuglica s brojem	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
izvučena puta	12	16	16	15	14	6	13	13	14	10	12	17
kuglica s brojem	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	
izvučena puta	18	19	15	14	15	11	9	13	9	12	15	

Možemo uočiti da se broj 1 pojavio čak 22 puta! To je tri i pol puta više nego broj 18 koji se pojavio samo 6 puta u istom razdoblju. Izgleda jako primamljivo **igrati brojeve koji se najčešće pojavljuju**.

¹Podatci su preuzeti sa stranice <https://www.lotostatistika.com.hr/>





Pojavljuje li se broj 1 prečesto?

Kako utvrditi da se broj 1 pojavio prevelik broj puta ako pretpostavimo da je vjerojatnost pojavljivanja svake kuglice u izvlačenju jednaka? To utvrđujemo tako da izračunamo kolika je vjerojatnost da se broj 1 pojavio 22 ili više puta u 70 izvlačenja. Ako je ta vjerojatnost *razumna*, onda se smatra da se ništa neobično nije dogodilo. Ako je *nerazumno mala*, onda se smatra da postoji opravdana sumnja da svi brojevi nemaju jednaku vjerojatnost pojavljivanja. Kako precizno izračunati ovu vjerojatnost, Matkači će naučiti na fakultetu.

No mi tu vrijednost jako dobro možemo procijeniti koristeći simulacije.

Simulacija 70 izvlačenja

Simulirat ćemo 70 izvlačenja Lota 7/35 i zabilježiti koliko se koji broj pojavio puta. U *Pythonu* ta implementacija izgleda ovako:

```
import random
from collections import Counter

def uzastopna_loto_izvlacenja(broj_izvlacenja = 70, izvucenih_
brojeva = 7, brojeva_u_bubnju = 35):
    frekvencijska_tablica = Counter([])
    for redni_broj in range(broj_izvlacenja):
        frekvencijska_tablica += Counter(random.sample(range(1,
brojeva_u_bubnju + 1), izvucenih_brojeva))
    return frekvencijska_tablica
```

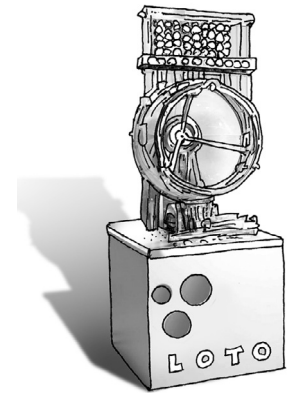
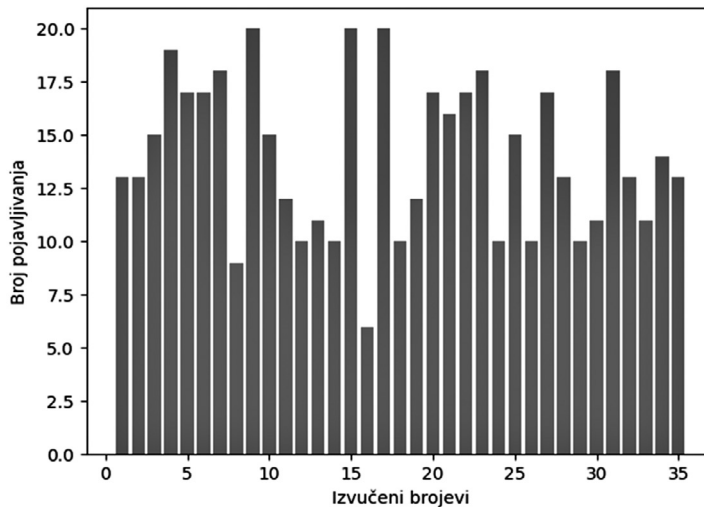
Pogledajmo kako izgleda frekvencijski dijagram nakon ove simulacije.

```

rezultati = uzastopna_loto_izvlacenja()

import matplotlib.pyplot as plt
plt.bar(rezultati.keys(), rezultati.values())
plt.xlabel('Izvučeni brojevi')
plt.ylabel('Broj pojavljivanja')
plt.show()

```



Višestruko ponavljanje 70 izvlačenja

Ponovimo 70 izvlačenja ukupno 100 000 puta kako bismo vidjeli koliko se će se puta dogoditi da broj 1 bude izvučen 22 ili više puta.

```

broj_simulacija = 100000
promatrani_broj = 1
testirani_broj_pojavljivanja_promatranog_broja = 22

promatrani_broj_se_pojavio_testirani_broj_pojavljivanja_ili_vise
= [False] * broj_simulacija

for indeks in range(broj_simulacija):
    rezultati = uzastopna_loto_izvlacenja()
    promatrani_broj_se_pojavio_testirani_broj_pojavljivanja_ili_vise[indeks] = rezultati[promatrani_broj] >= testirani_broj_pojavljivanja_promatranog_broja

```





```
print("Relativna frekvencija:", sum(promatrani_broj_se_pojavio_
testirani_broj_pojavljivanja_ili_vise) / broj_simulacija)
Relativna frekvencija: 0.01597
```

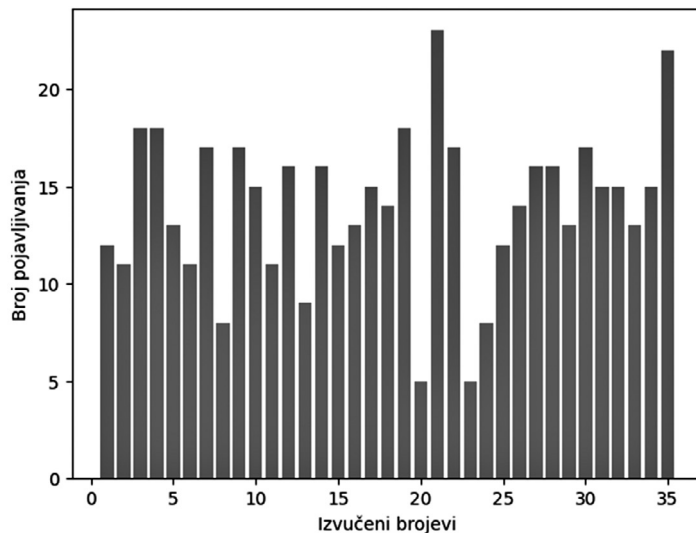
Dakle, broj 1 pojavio se 22 ili više puta u 1.597 % slučajeva. To naizgled nije prečesta pojava, no razmislimo li malo, broj 1 ni po čemu se ne razlikuje od drugih brojeva, pa ako je stvarno vjerojatnost da svaki broj bude izvučen jednaka, onda bi trebalo gledati koliko se puta *bilo koji* od brojeva 1 do 35 pojavio 22 ili više puta. Ponovimo simulaciju uz male izmjene.

```
broj_simulacija = 100000
testirani_broj_pojavljivanja = 22

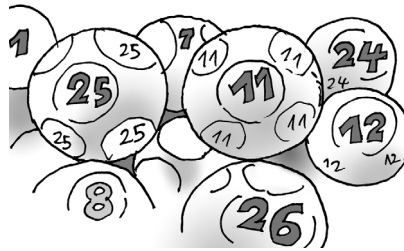
neki_broj_se_pojavio_testirani_broj_pojavljivanja_ili_vise =
[False] * broj_simulacija

for indeks in range(broj_simulacija):
    rezultati = uzastopna_loto_izvlacenja()
    neki_broj_se_pojavio_testirani_broj_pojavljivanja_ili_vise[indeks] = max(rezultati.values()) >= testirani_broj_pojavljivanja

print("Relativna frekvencija:", sum(neki_broj_se_pojavio_testirani_broj_pojavljivanja_ili_vise) / broj_simulacija)
Relativna frekvencija: 0.44648
```



Vidimo da se dosta često jedan od brojeva pojavio 22 ili više puta! Ako ponovimo nekoliko puta simulaciju 70 izvlačenja, vidjet ćemo da će se neki broj pojaviti više od 22 puta. Promotrite li frekvencijski dijagram na prethodnoj stranici, uočit ćete da se broj 21 pojavio *čak* 23 puta, dok se broj 20 pojavio *samo* 5 puta.



Zaključak

Vrlo je izgledno da će neki od brojeva od 1 do 35 biti izvučen više od 22 puta. U ovom slučaju dogodilo se da je to bio broj 1. Stoga nema nikakva razloga sumnjati da se broj 1 pojavljuje prečesto.

Precizan izračun vjerojatnosti pojavljivanja nekog broja više od 22 puta zahtijeva nešto naprednije matematike. Ovdje smo došli do zaključka koristeći simulacije na računalu. Stvarne simulacije koristeći bubanj i kuglice zahtijevale bi više sati. Simulacije na računalu koje smo ovdje opisali – 7 milijuna izvlačenja – mogu se provesti u samo nekoliko minuta.

Matematički izračuni znaju biti strahovito složeni i ponekad ne možemo doći do točne vrijednosti, te se u praksi često pouzdajemo u simulacije.

Python Jupyter bilježnica i Excel datoteka korišteni u izradi ovog članka dostupni su na <https://web.math.pmf.unizg.hr/~tvrtko/Matka/Loto/>.



Odredite vrijednost svake ikone.

				14
				10
				13
				14

17 14 13 7

= = =

= =

