

Stručni rad

ELEMENTARNO O MATRICAMA I DETERMINANTAMA

Dr. sc. Vladimir Kadum, sveuč. prof. u miru

Sažetak

U radu se izlažu elementarna znanja o matricama i determinantama.

Nakon što je definiran pojam matrice, opisuje se postupak transponiranja matrice, te se prikazuju operacije s matricama. Izlažu se zatim sadržaji koji se vezuju uz determinante matrica drugog i trećeg reda, i pritom se navode *Sarrusovo* i *Cramerovo pravilo*. Daje se prikaz posebnih vrsta kvadratnih matrica i postupak rješavanja linearnih matričnih jednadžbi.

Izlaganje sadržaja popraćeno je nizom riješenih primjera radi učinkovitijeg razumijevanja izloženih elementarnih sadržaja. Priložen je i set zadataka za vježbu s rješenjima nekih od zadataka.

Ključne riječi: Cramerovo pravilo, inverzna kvadratna matrica, linearne matrične jednadžbe, Sarrusovo pravilo, transponirana matrica

1. Definicija matrice

Pravokutnu shemu

$$(1) \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

s brojevima a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) nazivamo *matricom formata (oblika) $m \times n$* . Brojevi a_{ij} su *elementi* te matrice. Elementi $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ leže u *prvom retku* matrice, elementi $a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}$ leže u *drugom retku* matrice, itd. Elementi $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}$ leže u *prvom stupcu* matrice, elementi $a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}$ leže u *drugom stupcu* matrice, itd.

Prvi indeks u a_{ij} označava, prema tome, broj retka, a drugi broj stupca, pa kažemo da se element a_{ij} nalazi na presjeku i -tog retka i j -tog stupca.

Primjer 1.

U matrici

$$(2) \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -5 & 5 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

element 5 se nalazi na presjeku drugog retka i trećeg stupca.

Ako je broj redaka matrice jednak broju stupaca, tj. ako je $m = n$, tada kažemo da je matrica *kvadratna* reda (oblika) n .

Primjer 2.

Matrica (2) je kvadratna matrica reda 3. Naime, ta matrica ima tri retka i tri stupca; dakle je $m = n$.

Kod kvadratnih matrica razlikujemo *dijagonalne* matrice u kojima su svi elementi različitih indeksa ($i \neq j$) jednaki nuli:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Kažemo da su elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ na *glavnoj dijagonali* matrice.

Primjer 3.

U matrici (2) elementi 4, -5 i -2 se nalaze na *sporednoj* dijagonali.

Dijagonalne matrice kojima su svi elementi na glavnoj dijagonali međusobno jednaki, tj. $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn}$, nazivaju se brojevne (skalarne) matrice. Ako je pritom $a = 1$, tj. ako je $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 1$, brojevnju matricu nazivamo *jediničnom* i označujemo slovom **I**:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

U radu s matricama često se susreću matrice oblika:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

To su *donja* odnosno *gornja trokutasta* matrica.

Matricu koja ima sve elemente jednake nuli nazivamo *nul-matricom* i označujemo je sa $\mathbf{0}$ (nula).

Matricu koja ima samo jedan redak nazivamo *jednorednom*, a matricu koja ima samo jedan stupac nazivamo *jednostupčanom* matricom¹.

Primjer 4.

Matrica $[1, 3, -2, 4]$ je jednoredna², dok je matrica $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ jednostupčana.

Budući da ispisivanje matrica zahtjeva dosta mjesta, često se upotrebljavaju kraće oznake. Tako se umjesto (1) kraće piše

$$[a_{ij}]_m^n \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n).$$

U označavanju matrica upotrebljavaju se i latinična slova **A, B, C...**

2. Transponirana matrica

Matricu

$$(3) \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

nazivamo *transponiranom* matricom matrice (1). Uočite da su reci matrice (3) ustvari stupci matrice (1).

Transponiranu matricu matrice **A** označavamo sa **A^T**.

Primjer 1.

¹ Jednorednu matricu formata $1 \times n$ nazivamo još i *n-dimenzionalnim rednim vektorom*, a jednostupčanu matricu formata $m \times 1$ nazivamo još i *m-dimenzionalni stupčanim vektorom*.

² Kod jednorednih matrica često se, radi lakšeg uočavanja, između elemenata stavljaju zarezi.

Transponirana matrica matrice (2) je oblika $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 0 \\ -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

3. Operacije s matricama

Najprije dajemo definiciju jednakosti matrica:

Za dvije matrice $[a_{ij}]_m^n$ i $[b_{ij}]_p^q$ kažemo da su jednake, i pišemo

$$[a_{ij}]_m^n = [b_{ij}]_p^q,$$

onda i samo onda ako je

(1) $m = p, n = q$ (dakle, riječ je o matricama istog formata) i

(2) $a_{ij} = b_{ij}$ za svaki $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ (isti elementi u istom položaju).

ZBRAJANJE MATRICA. Zbrajati se mogu samo matrice *istog* formata.

Pod zbrojem $[a_{ij}]_m^n + [b_{ij}]_m^n$ razumijevamo matricu $[c_{ij}]_m^n$ za koju je

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

za svaki $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$.

Primjer 1.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

ODUZIMANJE MATRICA. Oduzimati se mogu samo matrice *istog* formata.

Pod razlikom $[a_{ij}]_m^n - [b_{ij}]_m^n$ razumijevamo matricu $[c_{ij}]_m^n$ za koju je

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

za svaki $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$.

Primjer 2.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ -8 & -1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

MNOŽENJE MATRICE BROJEM. Pod umnoškom matrice **A** i broja (skalara) α razumijevamo matricu **C** kojoj su elementi umnošci elemenata matrice **A** i broja α , tj. αc_{ij} ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$).

Primjer 3.

$$5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 20 & 0 \\ 15 & 25 \end{bmatrix}.$$

MNOŽENJE MATRICE MATRICOM. Umnožak matrice $\mathbf{A} = [a_{ij}]_m^n$ s matricom $\mathbf{B} = [b_{ij}]_p^q$ definira se samo za slučaj kada je broj stupaca prve matrice jednak broju redaka druge matrice, tj. kada je $n = p$. U tom slučaju pod umnoškom $[a_{ij}]_m^n \cdot [b_{ij}]_n^q$ razumijevamo matricu $[c_{ij}]_m^q$ kojoj elementi c_{ij} glase

$$(4) \quad c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

Jednakost (4) riječima možemo iskazati na sljedeći način:

Zbroj umnožaka elemenata i -tog retka prve matrice i odgovarajućih elemenata j -tog stupca druge matrice predstavlja element c_{ij} matrice umnoška. Tako je, na primjer:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} \\ a_{41}b_{11} + a_{42}b_{21} & a_{41}b_{12} + a_{42}b_{22} & a_{41}b_{13} + a_{42}b_{23} \end{bmatrix}.$$

Primjer 4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 7 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 8 & 1 \cdot 6 + 0 \cdot 7 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 8 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 6 \\ 15 & 46 \end{bmatrix}.$$

Primjer 5.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot [4 \ 5 \ 6] = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 & 1 \cdot 5 & 1 \cdot 6 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 5 & 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}.$$

Primjer 6.

$$[4 \ 5 \ 6] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = [4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3] = [32].$$

Na osnovi posljednja dva primjera, primjera 5 i primjera 6, uočava se da množenje matrica nije komutativno. Pritom se mogu javiti dva slučaja:

- (1) $\mathbf{BA} \neq \mathbf{AB}$;
- (2) \mathbf{BA} ne postoji.

Primjer 7.

Zadane su matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. Izračunati \mathbf{AB} i \mathbf{BA} .

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 7 \cdot 4 & 5 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 7 \cdot 3 & 5 \cdot 3 + 0 \cdot 6 + 7 \cdot 0 \\ 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 & 4 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 3 & 4 \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 3 \cdot 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 33 & 31 & 15 \\ 18 & 21 & 18 \end{bmatrix}.$$

Umnožak $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ nije definiran, jer broj stupaca (3) u matrici \mathbf{B} nije jednak broju redaka (2) u matrici \mathbf{A} .

Primjer 8.

Zadane su matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Izračunati \mathbf{AB} i \mathbf{BA} .

Imamo $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \end{bmatrix}$, dok umnožak $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ne postoji. Zašto?

Primjer 9.

Zadane su matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$. Uvjerite se da je

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}.$$

Zadaci za vježbu

1. Zadane su matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte: a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}^T$, b) $\mathbf{A} - \mathbf{B}^T$, c) \mathbf{AB} , d) \mathbf{BA} , e) \mathbf{CD} , f) \mathbf{DC} , g) $\mathbf{A}^T \mathbf{C}$.

2. Pomnožite:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$

b) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot [1 \ 2 \ 3];$

c) $[1 \ 2 \ 3] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix};$

d) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix};$

e) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix};$

f) $[29 \ 16 \ 49] \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 & 6 \\ -13 & 4 & 32 \\ 5 & -1 & -15 \end{bmatrix};$

$$g) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad h) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

3. Izračunajte \mathbf{AB} i \mathbf{BA} ako je: a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}$.

4. Izračunajte $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$, ako je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Izračunajte: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^3$.

Rješenja:

1. a) $\begin{bmatrix} 11 & 3 & 1 \\ 10 & 8 & 8 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} -5 & -1 & -5 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 20 & 8 \\ 66 & 48 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 49 & 43 & 4 \\ 11 & 9 & 0 \\ 29 & 31 & 10 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 6 & 11 \\ 11 & 24 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 19 & 23 \end{bmatrix}$; g) $\begin{bmatrix} 19 & 23 \\ 17 & 29 \\ 2 & 14 \end{bmatrix}$.

2. a) $\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$; c) $[13]$; d) $\begin{bmatrix} 9 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 33 & 31 & 15 \\ 18 & 21 & 18 \end{bmatrix}$; f) $[-21 \quad -14 \quad -49]$; g) $\mathbf{0}$; h) $\begin{bmatrix} 13 \\ -7 \\ -2 \end{bmatrix}$.

3. a) $\begin{bmatrix} 20 & 7 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 7 \\ 2 & 17 & 16 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 18 & 46 \\ 29 & 80 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 13 & 27 \\ 37 & 85 \end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix} -10 & -4 & -7 \\ 6 & 14 & 4 \\ -7 & 5 & -4 \end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{bmatrix} = 5 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$.

4. Determinanta matricâ drugog i trećeg reda

Determinanta kvadratne matrice drugog reda $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ je broj $\det \mathbf{A}$ definiran formulom

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Prema tome, izraz

$$(5) \quad a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

predstavlja se kvadratnom shemom

$$(6) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

koju nazivamo *determinantom drugog reda*.

Brojevi a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} , su *elementi determinante*. Elementi a_{11} i a_{12} pripadaju *prvom retku*, a elementi a_{21} i a_{22} *drugom retku*. Elementi a_{11} i a_{21} čine *prvi stupac*, dok elementi a_{12} i a_{22} čine *drugi stupac*. Elementi a_{11} i a_{22} se nalaze na *glavnoj dijagonali*, dok se elementi a_{21} i a_{12} nalaze na *sporednoj dijagonali* determinante.

Prema definiciji vrijednost determinante (6) je razlika umnoška elemenata na glavnoj dijagonali i elemenata na sporednoj dijagonali. Dakle je

$$(7) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Primjer 1.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 5 \cdot (-3) = 8 + 15 = 23.$$

Kvadratnu shemu

$$(8) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

nazivamo *determinanta trećeg reda*.

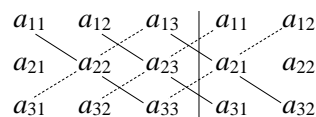
Determinanta kvadratne matrice trećeg reda definira se formulom

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Primjer 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & -4 \end{vmatrix} = -0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = \\ = 0 - 1 \cdot (-4 + 9) - 2 \cdot (4 - 6) = -5 + 4 = -1.$$

Determinantu trećeg reda možemo lako izračunati služeći se *Sarrusovim pravilom*. Činimo to ovako:



Od zbroja

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

oduzme se zbroj

$$a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Primjer 3.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -4 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 3 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-2) \cdot 4 - (-4) \cdot 3 \cdot (-1) - (-4 \cdot 0 \cdot 5 - 1 \cdot (-2) \cdot 2) = 15 + 8 - 12 + 4 = 15.$$

Navodimo osnovna svojstva determinante:

1. *Determinanta jedino mijenja predznak ako međusobno zamijenimo (bilo koja) dva stupca u simbolu.* Na primjer:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

$$\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc) = - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

2. *Vrijednost determinante se ne mijenja ako se reci kako dolaze zamijene stupcima kako dolaze, tj.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Na primjer:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

3. *Determinanta mijenja jedino predznak ako međusobno zamijenimo (bilo koja) dva retka u njenom simbolu.* Na primjer:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}.$$

4. *Determinanta je jednaka nuli ako su joj bilo koja dva retka ili stupca jednaka.* Na primjer:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} = 0$$

5. *Determinanta se može razviti po nekom retku ili stupcu tako da se svaki element dotičnog retka odnosno stupca pomnoži svojim algebarskim komplementom i dobiveni umnošci zbroje.* Na primjer:

Razvoj determinante (8) po prvom retku glasi

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

a po drugom stupcu

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Pritom predznaci algebarskih komplementa elemenata determinante (8) po redu glase

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

ili općenito

$$\begin{matrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

6. Zajednički faktor svih elemenata nekog retka ili stupca u simbolu determinante možemo izlučiti ispred znaka determinante. Na primjer:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

7. Determinanta se množi nekim brojem tako da se svaki element nekog retka odnosno stupca pomnoži tim brojem. Na primjer:

$$k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

8. Ako su elementi dvaju redaka ili dvaju stupaca proporcionalni, determinanta je jednaka nuli.

9. Ako elementi *i*-tog retka neke determinante po redu glase

$$b_1 + c_1, b_2 + c_2, \dots, b_n + c_n.$$

tada je ta determinanta jednak sumi dviju determinanti u kojoj su svi reci, osim *i*-tog, isti kao u zadanoj determinanti, dok im *i*-ti reci glase

$$b_1, b_2, \dots, b_n,$$

$$c_1, c_2, \dots, c_n.$$

Na primjer:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

10. Vrijednost se determinante ne mijenja ako elemente jednog njenog retka (stupca) pribrojimo odgovarajuće elemente nekog drugog njenog retka (stupca) pomnožene nekim brojem *k*. Na primjer:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + ka_{11} \\ a_{21} & a_{22} + ka_{21} \end{vmatrix}$$

11. Ako su $A_{r1}, A_{r2}, \dots, A_{rn}$ algebarski komplementi elemenata $a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rn}$, tada je

$$a_{r1}A_{r1} + a_{r2}A_{r2} + \dots + a_{rn}A_{rn} = 0,$$

gdje je i koji je različit od r , tj. $i \neq r$. Na primjer, kod determinante trećeg reda vrijede jednakosti

$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = 0,$$

$$a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} = 0.$$

Promotrimo sustav od dvije linearne jednadžbe sa dvije nepoznanice

$$(9) \quad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

za koji pretpostavljamo da je rješiv i da nema suvišnih jednadžbi. Ako od prve jednadžbe pomnožene sa a_{22} oduzmemo drugu jednadžbu pomnoženu sa a_{12} i ako od prve jednadžbe pomnožene sa a_{21} oduzmemo drugu pomnoženu sa a_{11} , i zatim sredimo, dobivamo

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = b_2a_{11} - b_1a_{21} \end{cases}$$

a odavde slijedi da je

$$(10) \quad x = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad y = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Nazivnik u razlomcima (10) je različit od nule, tj. $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Možemo iskazati sljedeću tvrdnju:

Sustav (9) je rješiv i nema suvišnih jednadžbi onda i samo onda ako je

$$(11) \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

Pritom *sustav (9) uz gornje pretpostavke, tj. uz uvjet (11) ima jednoznačno rješenje dano sa (10).*

Ako izraz u nazivniku razlomaka (10) označimo sa D , tj. $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, $D \neq 0$, a brojnik prvog razlomka sa D_x , tj. $D_x = b_1a_{22} - b_2a_{12}$, a brojnik drugog sa D_y , tj. $D_y = b_2a_{11} - b_1a_{21}$, tada relacije (10) možemo pisati

$$(12) \quad x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}.$$

Formule (12) poznate su kao *Cramerovo pravilo*; možemo ga iskazati na sljedeći način:

Sustav (9) uz uvjet (11) ima jednoznačno određeno rješenje dano sa (12).

Primjer 4.

Primjenom *Cramerova pravila* riješimo sustav $\begin{cases} x + 3y = 13 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases}$.

Imamo:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -5 - 9 = -14.$$

D_x odredit ćemo tako da u determinanti $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$ koeficijente koji se nalaze uz nepoznanicu x (prvi stupac) zamijenimo slobodnim koeficijentima; dobivamo determinantu $\begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 11 & -5 \end{vmatrix}$ koje je vrijednost:

$$D_x = \begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 11 & -5 \end{vmatrix} = -65 - 33 = -98.$$

Slično postupamo i pri određivanju vrijednosti determinante D_y samo što sada u determinanti $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$ drugi stupac (koeficijenti uz nepoznanicu y) zamjenjujemo sa slobodnim koeficijentima. Imamo:

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 13 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}.$$

Sada je:

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 13 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 39 = -28.$$

Stoga su rješenja danog sustava:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-98}{-14} = 7; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-28}{-14} = 2.$$

Primjer 5.

Riješimo primjenom *Cramerova pravila* sustav $\begin{cases} 5x + 2y - 2z = 3 \\ 3x - 4y + 5z = 10 \\ 7x - 3y + 6z = 19 \end{cases}$

Imamo redom:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 7 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -120 + 70 + 18 - 56 + 75 - 36 = -49;$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 10 & -4 & 5 \\ 19 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -72 + 190 + 60 - 152 + 45 - 120 = -49$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 3 & 10 & 5 \\ 7 & 19 & 6 \end{vmatrix} = 300 + 105 - 114 + 140 - 475 - 54 = -98$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 10 \\ 7 & -3 & 19 \end{vmatrix} = -380 + 140 - 27 + 84 + 150 - 114 = -147$$

Sada je:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-49}{-49} = 1, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-98}{-49} = 2, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-147}{-49} = 3.$$

Prema tome, rješenje danog sustava je uređena trojka (1, 2, 3).

5. Posebne vrste kvadratnih matrica

SIMETRIČNE I KOSOSIMETRIČNE KVADRATNE MATRICE. *Kvadratnu matricu u kojoj su njeni elementi koji leže simetrično s obzirom na glavnu dijagonalu međusobno jednaki nazivamo simetrična matrica.*

Primjer 1.

Matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -8 \\ 3 & 5 & 4 \\ -8 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ je simetrična. Uočavamo da su, s obzirom na glavnu dijagonalu simetrični članovi 3 i 3, -8 i -8 te 4 i 4.

Za kvadratnu matricu kažemo da je *kososimetrična matrica* ako su njeni elementi simetrično položeni s obzirom na glavnu dijagonalu jednaki po modulu i suprotnog predznaka.

Primjer 2.

Matrica $B = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -1 \\ -7 & 2 & -9 \\ 1 & 9 & 4 \end{bmatrix}$ je kososimetrična. Naime, elementi koji su simetrični s obzirom na glavnu dijagonalu su po modulu jednaki i suprotnog predznaka:
 $|7| = |-7|, |1| = |-1|, |-9| = |9|.$

Umnožak matrice A i transponirane matrice A^T daje simetričnu matricu C

$$A A^T = C,$$

jer je

$$C^T = (A A^T)^T = (A^T)^T A^T = A A^T = C.$$

Primjer 3.

Za matricu A iz primjera 1 je $A A^T = C = \begin{bmatrix} 74 & -14 & -68 \\ -14 & 50 & 24 \\ -68 & 24 & 161 \end{bmatrix}$. Uvjerite se u to!

REGULARNE KVADRATNE MATRICE. *Za kvadratnu matricu A kažemo da je regularna ili nesingularna ako je njena determinanta različita od nule, tj. ako je*

$$\det A \neq 0.$$

Ako je determinanta kvadratne matrice A jednaka nuli, tj. $A = 0$, tada matricu A zovemo *singularnom matricom*.

Primjer 4.

Kvadratna matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ je regularna jer je $\det A = 15 \neq 0$. Uvjerite se u to!

Primjer 5.

Kvadratna matrica $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ je singularna jer je vrijednost njene determinante jednaka nuli. Uvjerite se u to!

INVERZ KVADRATNE MATRICE. Neka je zadana kvadratna matrica A . Kvadratnu matricu A^{-1} nazivamo inverznom matricom s obzirom na zadanu matricu A ako je

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I,$$

gdje je I jedinična matrica.

Prema tome, pomnožimo li inverznu matricu A^{-1} s matricom A zdesna ili slijeva dobit ćemo jediničnu matricu I .

Vrijedi sljedeće:

- (1) singularna matrica nema inverzne matrice;
- (2) inverzna matrica, ako postoji, jednoznačno je određena;
- (3) determinanta inverzne matrice A^{-1} recipročna je vrijednost determinante matrice A ;
- (4) $(A B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$; to znači: *inverzna matrica umnoška dviju ili više regularnih matrica jednaka je umnošku inverznih matrica pojedinih faktora uzetih u obrnutom redosljedu.*

Postupak za određivanje inverznih matrica je sljedeći:

1. korak. Za zadanu matricu A računamo vrijednost njene determinante, tj.

$$D = \det A.$$

2. korak. Zadanu matricu A transponiramo da dobijemo matricu A^T .

3. korak. Za svaki element transponirane matrice A^T računamo, idući redak po redak, pripadne *algebarske komplemente* (*algebarske dopune, algebarske kofaktore*), pri čemu uzimamo za *algebarske komplemente plus i minus naizmjenice bez obzira na predznak elemenata za koje računamo komplement.*

Prisjetimo se sheme:

$$\begin{matrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

4. korak. U matrici A^T zamijenimo svaki element s pripadnim algebarskim komplementom.

5. korak. Svaki element tako dobivene matrice podijelimo sa $D = \det A$ i dobivamo traženu matricu A^{-1} inverznu s obzirom na zadanu matricu A .

6. korak. (*Neobvezan.*) Izvršimo provjeru: mora biti

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} = (\text{jedinična matrica}) = \mathbf{1}.$$

Primjer 6.

Zadana je kvadratna matrica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. Odredimo \mathbf{A}^{-1} .

1. Računamo $D = \det \mathbf{A}$:

$$D = 1(45 - 48) - 2(36 - 12) + 3(32 - 10) = -3 - 48 + 16 = 15 \neq 0.$$

Zadana matrica \mathbf{A} je regularna pa ima inverznu matricu \mathbf{A}^{-1} .

2. Transponiramo matricu \mathbf{A} ; dobivamo: $\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$.

3. Računamo algebarske komplemente za matricu \mathbf{A}^T :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = +(45 - 48) = -3;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -(18 - 24) = 6; \quad A_{31} = +\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = +(12 - 15) = -3;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = -24; \quad A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 22; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

4. U matrici \mathbf{A}^T zamijenimo svaki element s pripadnim algebarskim komplementom;

dobivamo: $\begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -24 & 3 & 6 \\ 22 & -4 & -3 \end{bmatrix}$.

5. Sada svaki element posljednje matrice dijelimo sa $D = \det \mathbf{A} = 15$; dobivamo:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{15} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -24 & 3 & 6 \\ 22 & -4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{22}{15} & -\frac{4}{15} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

6. Provjeravamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{22}{15} & -\frac{4}{15} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = (\text{nakon izvršenog množenja matrica i sređivanja}) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} = \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Jedno od najvažnijih pitanja koje se postavlja u praksi glasi: *kako što jednostavnije odrediti inverz zadane regularne matrice?* Koristeći se prikladnim shemama moguće je skratiti posao oko određivanja inverza zadane matrice. Pokazat ćemo to primjerima.

Primjer 7.

Odredimo inverz matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Do inverz matrice \mathbf{A} možemo lakše doći ovako: Ispred matrice \mathbf{A} dopišemo jediničnu matricu \mathbf{I} (te dvije matrice odvojimo vertikalnom crtom), tj. sačinimo (napišemo) shemu

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}$$

Drugom retku dodajmo prvi redak pomnožen s -1 ; trećem retku pomnoženom s -2 dodajmo prvi redak:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -4 \end{array}$$

Sada drugom retku pomnoženim s 4 dodajmo treći redak:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -4 \end{array}$$

Prvom retku dodajmo drugi redak pomnožen sa -1 i onda prvi redak podijelimo sa 2:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -4 \end{array}$$

Trećem retku pomnoženim s -1 dodajmo drugi redak i zatim ga podijelimo s 4:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Prvom retku dodajmo drugi redak pomnožen s -1 i zatim ga podijelimo s 2:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

To radimo sve dotle dok s desne strane vertikalne crte ne dobijemo jediničnu matricu; tada je matrica s lijeve strane crte inverzna matrica zadane matrice \mathbf{A} .

Za regularnu kvadratnu matricu formata 2×2 , tj. koja se sastoji od dva retka i dva stupca

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

određivanje pripadne inverzne matrice vrlo je jednostavno: valja samo zamijeniti položaj elemenata na glavnoj dijagonali, a onima na sporednoj dijagonali promijeniti predznak, i zatim sve elemente tako dobivene matrice podijeliti sa vrijednošću D njene determinante:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{D} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Primjer 8.

Zadana je matrica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$.

Vrijednost njene determinante je: $D = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -14 + 12 = -2$

Sada je $\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ -2 & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$.

Primjer 9.

Zadane su matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Pokažimo da vrijedi $(\mathbf{A} \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$.

$$\mathbf{A} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$D = \det \mathbf{A} \mathbf{B} = 56 - 50 = 6$$

$$(\mathbf{A} \mathbf{B})^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -10 & 14 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -10 & 14 \end{bmatrix}.$$

Tvrdnja koju smo provjeravali u primjeru 8 vrijedi i za više faktora; na primjer, vrijedi:

$$(\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{D})^{-1} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}.$$

6. Rješavanje linearnih matričnih jednadžbi

S obzirom na znanje do sada navedenog gradiva vezanog uz matrice i determinante omogućava nam rješavanje matričnih jednadžbi oblika

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{C} \quad \text{i} \quad \mathbf{Y} \mathbf{A} = \mathbf{C},$$

gdje su **A** zadana regularna kvadratna matrica reda n , **B** i **C** su zadane pravokutne matrice tipova $n \times r$, odnosno $r \times n$, a **X** i **Y** tražene matrice odgovarajućih tipova $n \times r$ i $r \times n$.

Na analogan način kako što rješavamo (skalarne) jednadžbe oblika

$$ax = b \quad \text{i} \quad ya = c$$

rješavamo i matrice linearne jednadžbe. Prikažimo to shematski:

$ax = b$	$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$	$\mathbf{Y}\mathbf{A} = \mathbf{C}$
jednadžbu množimo slijeva sa $\frac{1}{a} = a^{-1}$, $a \neq 0$	množimo slijeva sa \mathbf{A}^{-1} $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.	množimo sdesna sa \mathbf{A}^{-1} $\mathbf{Y}\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}$ $\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}$.
$\frac{1}{a}(ax) = \frac{1}{a}b$ $x = \frac{b}{a}$.		

Primjer 1.

Riješimo linearnu matricnu jednadžbu $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Za matricu $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ određujemo \mathbf{A}^{-1} vodeći računa da je $D = \det \mathbf{A} = 2$.

Budući da je $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -2 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$, množenjem zadane jednadžbe s lijeva nalazimo da je

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -2 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

a odavde slijedi $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 24 & -\frac{5}{2} \\ -10 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$.

Primjer 2.

Riješimo linearnu matricnu jednadžbu $\mathbf{Y} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = [29 \quad 16 \quad 49]$.

Za matricu $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ određujemo

$$D = \det \mathbf{A} = -7; \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 8 & 2 & 3 \end{bmatrix};$$

$$A_{11} = -2;$$

$$A_{21} = -6;$$

$$A_{31} = 6;$$

$$A_{12} = -13; \quad A_{22} = 4; \quad A_{32} = 32;$$

$$A_{13} = 5; \quad A_{23} = -1; \quad A_{33} = -15.$$

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{7} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 & 6 \\ -13 & 4 & 32 \\ 5 & -1 & -15 \end{bmatrix}.$$

Sada zadanu jednadžbu množimo *zdesna* s \mathbf{A}^{-1} ; imamo

$$\mathbf{Y} = [29 \ 16 \ 49] \cdot -\frac{1}{7} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 & 6 \\ -13 & 4 & 32 \\ 5 & -1 & -15 \end{bmatrix} = [-21 \ -14 \ -49] \cdot \left(-\frac{1}{7}\right),$$

odnosno $\mathbf{Y} = [3 \ 2 \ 7]$.

Primjer 3.

Sustav linearnih jednadžbi $\begin{cases} x + y - 2z = 4 \\ 3x + 7y - 3z = 12 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$ riješimo pomoću matrica.

U matričnom obliku jednadžba glasi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 7 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Za $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 7 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ inverzna matrica je oblika $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, pa množenjem slijeva s \mathbf{A}^{-1} dobivamo:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Odavde slijedi: $x = -7, y = 3, z = -4$.

Zadaci za vježbu

1. Izračunajte:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix};$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix};$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix};$

d) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$

2. Izračunajte: a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & -4 \end{vmatrix};$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$

3. Odredite x iz jednadžbe:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & x & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{c) } \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0; \quad \text{d) } \begin{vmatrix} x & 2x & -x \\ 5 & -1 & x \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{e) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & x+1 \\ 1 & 2 & (x+1)^2 \\ 1 & 3 & (x+1)^3 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Odredite inverzne matrice matricama:

$$\begin{aligned} \text{a) } \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; & \text{b) } \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; & \text{c) } \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}; & \text{d) } \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \\ \text{e) } \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 7 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}; & \text{f) } \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; & \text{g) } \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

5. Riješite linearne matricne jednadžbe:

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} 12 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}; & \text{b) } \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \\ \text{c) } \mathbf{Y} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}; & \text{d) } \mathbf{X} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}; \\ \text{e) } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{X} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

6. Riješite sustave linearnih jednadžbi pomoću matrica:

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} x+2y=3 \\ -x+y+4z=7; \\ 2x+3y-z=5 \end{cases} & \quad \text{b) } \begin{cases} x-y+5z=3 \\ 2x-3y-5z=4; \\ 3x-2y+6z=6 \end{cases} & \quad \text{c) } \begin{cases} x+2z-u=3 \\ 3y+2z+3u=10 \\ 4x+5z+2u=9 \\ x+3y+z+7u=9 \end{cases}. \end{aligned}$$

Rješenja:

3. a) $x = 2$; b) $x_1 = 1, x_2 = 3$; c) $x(x^2 - 4) = 0, x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 2$; d) $x_1 = 0, x_2 = 17$;
 e) $x(x+1)(2x+1) = 0, x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = -\frac{1}{2}$

4. a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$; b) $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$; e) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 14 & -6 & -9 \\ -25 & 11 & 16 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

5. a) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$; b) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$; c) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -14 & 20 \\ -10 & 8 \end{bmatrix}$; d) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$; e) $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 24 & 3 \\ -34 & 18 \end{bmatrix}$

6. a) $x = 15, y = -6, z = 7$; b) $x = \frac{5}{6}, y = -\frac{9}{8}, z = \frac{5}{24}$; c) $x = -2, y = \frac{1}{3}, z = 3, u = 7$.

7.Literatura

- [1] Allendoerfer, C., & Oakley, C. (1966). *Principles of Mathematics*. New York: McGraw-Hill.
- [2] Hotomski, P., Balint, J. i Hotomski, S. (1979). *Osnove savremene matematike*. Novi Sad: Radivoj Ćirpanov.
- [3] Gusić, I. (1995). *Matematički rječnik*. Zagreb: Element.
- [4] Lipschutz, S. (1964). *Set Theory and related Topics*. New York: McGraw-Hill.
- [5] Lipschutz, S. (1968). *Linear Algebra*.
- [6] Mintaković, S. i Ćurić, F. (1972). *Osnove matematike*. Zagreb: Školska knjiga.
- [7] Pavković, B. i Veljan, D. (1991). *Elementarna matematika 1*. Zagreb: Tehnička knjiga
- [8] Radić, M. (1982). *Algebra II*. Zagreb: Školska knjiga.
- [9] Rakočević, K., Ivović, M., Pavlović, V., Borčić, B. i Mušicki-Kovačević, V. (1988). *Matematika kroz primere i zadatke sa elementima teorije*. Beograd: Savremena administracija.