

UDK 528.9:528.2

Prethodno priopćenje / Preliminary Communication

Novi izvod formule za duljinu luka loksodrome na rotacijskom elipsoidu

Miljenko LAPAINE – Zagreb¹

SAŽETAK. Ako neku udaljenost preuzimamo s karte ne uzimajući u obzir distorziju, općenito nećemo dobiti ispravnu vrijednost. Ispravnu vrijednost dobit ćemo ako distorziju uzmemo u obzir, odnosno primijenimo izraz za udaljenost koji ne sadrži distorziju. U članku je prikazan problem određivanja udaljenosti između dviju točaka na rotacijskom elipsoidu, mjerenih uzduž loksodrome. Najprije je izvedena formula za tu udaljenost na uobičajeni način. Zatim je ta ista formula izvedena uz pomoć teorije kartografskih projekcija. Time su se željela postići dva cilja. Prvi, da pri računanju udaljenosti između dvaju mjesta prikazanih na karti treba uzeti u obzir distorziju koja je karti imanentna zbog primijenjene kartografske projekcije. Drugi je cilj bio pokazati kako se s pomoću teorije kartografskih projekcija može izvesti formula koja ne ovisi o primijenjenoj kartografskoj projekciji.

Ključne riječi: kartografske projekcije, elipsoid, loksodroma, duljina luka.

1. Uvod

Karta je rezultat preslikavanja podataka obično sa Zemljine površine, nebeskog tijela ili zamišljenog svijeta u ravninski prikaz na komadu papira ili na digitalnom zaslonu kao što je monitor računala. Karte se obično izrađuju transformacijom podataka najprije na sfernu ili elipsoidnu plohu, a zatim u ravninu. Preslikavanje zakrivljene površine u ravninu poznato je kao kartografska projekcija i može imati različite oblike (Lapaine 2019).

Budući da nijedna kartografska projekcija ne čuva ispravno mjerilo u cijelosti, važno je odrediti u kojoj mjeri ono varira na karti. Na karti svijeta distorzija (deformacija) je očigledna oku upoznatom s kartama. Obično se može primijetiti u kojoj su mjeri kopnene mase neprikladne veličine ili promijenjenog oblika

¹ prof. emer. dr. sc. Miljenko Lapaine, Sveučilište u Zagrebu – Geodetski fakultet, Kačićeva 26, HR-10000 Zagreb, Hrvatska, e-mail: miljenko.lapaine@geof.unizg.hr

te u kojoj se mjeri meridijani i paralele ne sijeku pod pravim kutom ili nisu ravnomjerno raspoređeni uz neki meridijan ili paralelu. Na kartama zemalja ili čak kontinenata distorzija možda nije vidljiva oku, ali postaje vidljiva nakon pažljivog mjerenja i analize (Snyder 1987).

Sve kartografske projekcije uvode distorziju površina, kutova i/ili udaljenosti. Neke vrste distorzija mogu se kontrolirati da bi se sačuvale specifične karakteristike, ali kartografske projekcije tada moraju iskriviti druge karakteristike prikazanog objekta. Glavni problem u kartografiji je što nije moguće preslikati sfernu ili elipsoidnu površinu u ravninu bez distorzija, ili točnije rečeno s distorzijom jednakom nuli.. Euler je prvi dokazao još 1772. da se sfera ne može preslikati u ravninu s distorzijom jednakom nuli (Euler 1777, Biernacki 1949, 1965, Lapaine 2014).

Sljedeći izrazi definiraju u geodeziji i kartografiji rotacijski elipsoid sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava, velikom poluosi a i numeričkim ekscentricitetom e :

$$x = x(\varphi, \lambda) = N \cos \varphi \cos \lambda, y = y(\varphi, \lambda) = N \cos \varphi \sin \lambda, z = z(\varphi, \lambda) = N(1 - e^2) \sin \varphi$$

$$(\varphi, \lambda) \in \Omega = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [-\pi, \pi], (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad (1)$$

Uobičajene oznake su

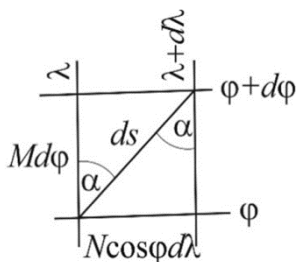
$$M = M(\varphi) = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^3}} \quad (2)$$

za polumjer zakrivljenosti meridijana i

$$N = N(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (3)$$

za polumjer zakrivljenosti presjeka po prvom vertikalu.

Infinitezimalni četverokut na elipsoidu prikazan je na slici 1. Diferencijal duljine luka neke krivulje je ds , diferencijal duljine luka meridijana je $Md\varphi$, a diferencijal duljine luka paralele je $N \cos \varphi d\lambda$.



Slika 1. Infinitesimalni četverokut na elipsoidu.

Za bilo koju krivulju na elipsoidu možemo napisati (vidi sliku 1):

$$\tan \alpha = \frac{N \cos \varphi d\lambda}{M d\varphi} \quad (4)$$

i odatle

$$d\lambda = \tan \alpha \frac{M d\varphi}{N \cos \varphi}. \quad (5)$$

Pretpostavimo li da je $\alpha = \text{const.}$, tj. da je riječ o loksodromi, integriranjem izraza (5) dobit ćemo jednadžbu loksodrome u obliku

$$\lambda = k \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1-e \sin \varphi}{1+e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} + \beta, \quad (6)$$

gdje su $k = \tan \alpha$ i β konstante. Npr. ako loksodroma prolazi točkama s koordinatama (φ_1, λ_1) i (φ_2, λ_2) onda je

$$k = \tan \alpha = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2} \right) - \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right)}, \quad \beta = \frac{\lambda_2 \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) - \lambda_1 \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2} \right)}{\ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2} \right) - \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right)}. \quad (7)$$

Nadalje, sa slike 1 možemo pročitati da je

$$\cos \alpha = \frac{M d\varphi}{ds} \quad (8)$$

i odatle

$$ds = \frac{M d\varphi}{\cos \alpha}. \quad (9)$$

Uz pretpostavku da je $\alpha = \text{const.}$, integriranjem izraza (9) dobit ćemo izraz za duljinu luka loksodrome na elipsoidu u obliku (Borisov 2011):

$$s = \frac{1}{\cos \alpha} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi. \quad (10)$$

Za razliku od izvoda jednadžbe loksodrome na sferi, integral s desna strane u (10) je eliptički integral koji se pojavljuje pri računanju duljine luka meridijana na rotacijskom elipsoidu, i kojega nije moguće neposredno integrirati već se primjenjuju razvoji u redove ili neke druge matematičke metode (Viličić i Lapaine 2024).

2. Loksodroma u Mercatorovoj projekciji elipsoida

Jednadžbe uspravne Mercatorove projekcije elipsoida glase

$$x = a\lambda, y = a \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1-e \sin \varphi}{1+e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}}. \quad (11)$$

Uvrstimo li u (11) izraz za λ iz (4) dobit ćemo

$$x = a \left[k \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1-e \sin \varphi}{1+e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} + \beta \right], y = a \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1-e \sin \varphi}{1+e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}}. \quad (12)$$

odakle se lako dobije

$$x = ky + a\beta. \quad (13)$$



Slika 2. Karta svijeta u uspravnoj Mercatorovoj projekciji. Ravna crta koja spaja New York i Moskvu je slika loksodrome, a krivulja koja spaja ta dva mjesta slika je geodetske linije. Geodetska linija daje najkraću udaljenost između dvaju mjesta na elipsoidu, pa se slika 2 može interpretirati kao iluzija, a zapravo je riječ o distorziji zbog kartografske projekcije.

Budući da su k, a, β konstante, to (13) predstavlja linearnu vezu između x i y , pa je grafički prikaz relacije (13) pravac u ravnini projekcije. Drugim riječima, slika loksodrome na karti izrađenoj u uspravnoj Mercatorovoj projekciji je pravac (slika 2). Ako taj pravac prolazi kroz dvije točke s koordinatama (x_1, y_1) i (x_2, y_2) , onda je udaljenost d između tih dviju točaka u ravnini projekcije jednaka

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} . \quad (14)$$

Lako je uočiti da se duljina slike loksodrome na karti (14) razlikuje od duljine loksodrome na elipsoidu (10). Ako nam nije poznata formula (10), postavlja se pitanje kako do nje doći na temelju teorije kartografskih

projekcija? Osim toga vrlo je važno za svaku kartografsku projekciju, pa tako i za uspravnu Mercatorovu elipsoida, poznavati mogućnost otklanjanja distorzija iz podataka preuzetih s karte.

3. Novi izvod formule za računanje duljine loksodrome na elipsoidu

Najprije uočimo da svaka kartografska projekcija uvodi izvjesne distorzije. Kao mjera distorzije duljina služi lokalni faktor mjerila duljina (linearno mjerilo) c koji za elipsoid definiramo ovako (Snyder 1987, Frančula 2004):

$$c^2 = \frac{ds'^2}{ds^2} = \frac{Ed\varphi^2 + 2Fd\varphi d\lambda + Gd\lambda^2}{M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2}. \quad (15)$$

E , F i G su koeficijenti definirani na ovaj način:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2, F = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda}, G = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2, \quad (16)$$

gdje su

$$x = x(\varphi, \lambda), y = y(\varphi, \lambda), \quad (17)$$

jednadžbe kartografske projekcije, odnosno u našem slučaju formule s pomoću kojih se elipsoid preslikava u ravninu, a x i y su koordinate točke u pravokutnom (matematičkom, desno orijentiranom) koordinatnom sustavu u ravnini. Pretpostavit ćemo da je sa (17) definirano regularno preslikavanje, osim u nekim projekcijama na rubovima intervala, tj. za $\varphi \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$ i $\lambda \in \{-\pi, \pi\}$.

Ako su jednadžbe uspravne Mercatorove projekcije (11), onda imamo

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = a, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{aM}{N \cos \varphi}, \quad (18)$$

pa je

$$E = \frac{a^2 M^2}{N^2 \cos^2 \varphi}, \quad F = 0, \quad G = a^2 \quad (19)$$

odnosno

$$c^2 = \frac{ds'^2}{ds^2} = \frac{\frac{a^2 M^2}{N^2 \cos^2 \varphi} d\varphi^2 + a^2 d\lambda^2}{M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2} = \frac{a^2}{N^2 \cos^2 \varphi}, \quad (20)$$

i odatle

$$c = \frac{ds'}{ds} = \frac{a}{N \cos \varphi} . \quad (21)$$

U ravnini projekcije je

$$ds' = \sqrt{dx^2 + dy^2} . \quad (22)$$

Za sliku loksodrome prema (13) imamo

$$dx = k dy = ka \frac{M d\varphi}{N \cos \varphi} , \quad (23)$$

pa je

$$ds' = \sqrt{1 + k^2} dy = \sqrt{1 + k^2} a \frac{M d\varphi}{N \cos \varphi} . \quad (24)$$

Uzevši u obzir (20) možemo napisati

$$ds = \frac{ds'}{c} = \sqrt{1 + k^2} M d\varphi \quad (25)$$

i odatle nakon integriranja

$$s = \sqrt{1 + k^2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi . \quad (26)$$

Ako slika loksodrome prolazi točkama (x_1, y_1) i (x_2, y_2) onda one zadovoljavaju jednadžbu (13) pa mora vrijediti

$$x_1 = ky_1 + R\beta \quad \text{i} \quad x_2 = ky_2 + R\beta \quad (27)$$

Uz to, točke s koordinatama (x_1, y_1) i (x_2, y_2) nastale su preslikavanjem s elipsoida prema jednadžbama Mercatorove projekcije (11) pa mora biti

$$x_1 = a\lambda_1, \quad y_1 = a \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin \varphi_1}{1 + e \sin \varphi_1} \right)^{\frac{e}{2}} ,$$

$$x_2 = a\lambda_2, y_2 = a \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2} \right) \left(\frac{1-e \sin \varphi_2}{1+e \sin \varphi_2} \right)^{\frac{e}{2}}. \quad (28)$$

Na temelju (27) i (28) možemo napisati

$$k = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2} \right) \left(\frac{1-e \sin \varphi_2}{1+e \sin \varphi_2} \right)^{\frac{e}{2}} - \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) \left(\frac{1-e \sin \varphi_1}{1+e \sin \varphi_1} \right)^{\frac{e}{2}}} \frac{e}{e} = \tan \alpha. \quad (29)$$

Budući da je

$$1 + k^2 = 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (30)$$

možemo formulu za računanje duljine loksodrome na elipsoidu (26) napisati i u obliku (10).

Na taj smo način uz pomoć teorije kartografskih projekcija došli do formule za računanje duljine loksodrome između dviju točaka na elipsoidu. Kao što se lijepo vidi, formula (10) ne ovisi o primijenjenoj kartografskoj projekciji.

4. Zaključak

Svaka kartografska projekcija nosi sa sobom i izvjesne distorzije. Da bismo s karte mogli pročitati poruku koja je u njoj zapisana, moramo poznavati njezine distorzije. Npr. često nam treba udaljenost između dvaju mjesta. Ako tu udaljenost mjerimo s karte ne uzimajući u obzir distorziju, nećemo dobiti ispravnu vrijednost. Ispravnu vrijednost dobit ćemo ako uzmemo u obzir distorzije, odnosno primijenimo izraze koji ne sadrže distorzije.

U ovom članku prikazan je problem određivanja udaljenosti između dviju točaka na elipsoidu, mjerenih uzduž loksodrome. Najprije je izvedena formula za tu udaljenost na uobičajeni način. Zatim je ta ista formula izvedena uz pomoć teorije kartografskih projekcija.

Time su postignuta dva cilja. Prvi, manje-više poznat, da pri računanju udaljenosti između dvaju mjesta prikazanih na karti treba uzeti u obzir distorziju koja je karti imanentna zbog primijenjene kartografske projekcije. Drugi cilj je da se pokaže kako se s pomoću teorije kartografskih projekcija može izvesti formula za duljinu luka loksodrome na elipsoidu koja ne ovisi o primijenjenoj kartografskoj projekciji.

ZAHVALA. Autor zahvaljuje anonimnim recenzentima na uloženom vremenu, trudu i primjedbama kojima su ukazali na pogreške i nedostatke u prvoj verziji članka.

Literatura

- Biernacki, F. (1949, 1965): Teoria odwzorowań powierzchni dla geodetów i kartografów: Warsaw, Główny Urząd Pomiarów Kraju, Prace Geodezyjnego Instytutu Naukowo-Badawczego, no. 4. Poljski. Prevedeno na engelski kao Theory of Representation of Surfaces for Surveyors and Cartographers: U.S. Dept. of Commerce, 1965.
- Borisov, M., Božić, B., Drobnjak, S. (2011): Matematički modeli loksodrome i njihova primena, Tehnika – Naše građevinarstvo, 65, 4, 551–556.
- Euler, L. (1777): De repraesentatione superficiei sphaericae super plano, Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Prevedeno na njemački u: Drei Abhandlungen uber Kartenprojection, Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, no. 93, 3–37, Leipzig, Wilhelm Engelmann, 1898. Prevedeno na poljski u: Biernacki (1949). Prevedeno na ruski: Ob izobrazhenii poverhnosti shara na ploskosti, Trudy Peterburgskoy akademii nauk za 1777 g., Tom 1, 107–132, u: L. Ejler: Izbrannye kartograficheskie stat'i, Tri stat'i po matematicheskoy kartografii, Izdatel'stvo geodezicheskoy literatury, 1959, Moscow. Prevedeno na engleski u: Biernacki (1965). Prevedeno na hrvatski u: Lapaine (2014).
- Frančula, N. (2004): Kartografske projekcije, skripta, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.
- Lapaine, M. (2014): Kartografske projekcije i njihove deformacije, Peti hrvatski kongres o katastru, Zagreb, 8–9. 5. 2014., Zbornik radova, ISBN 978-953-97081-9-9, 15–32.
- Lapaine, M. (2019): Map Projection Article on Wikipedia, u: Advances in Cartography and GIScience of the International Cartographic Association, 1, 2019. 29th International Cartographic Conference (ICC 2019), 15–20 July 2019, Tokyo, Japan, 1–8. doi: 10.5194/ica-adv-1-10-2019.
- Snyder, J. P. (1987): Map Projections: A Working Manual, USGS Professional Paper 1395, Washington, D.C.
- Viličić, M., Lapaine, M. (2024): Loksodroma i izometrijska širina / Loxodrome and Isometric Latitude, Kartografija i geoinformacije, Vol. 23, Br. 41, 4–21, doi: 10.32909/kg.23.41.1.

New Derivation of the Formula for the Length of a Loxodrome Arc on a Rotational Ellipsoid

ABSTRACT. If we take a distance from a map without taking into account the distortion, we will not get the correct value. We will get the correct value if we take the distortion into account, that is, if we apply an expression for distance that does not contain distortion. The article presents the problem of determining the distance between two points on a rotational ellipsoid, measured along a loxodrome or a rhumb line. First, a formula for this distance was derived in the usual way. Then, this same formula was derived using the theory of map projections. This was intended to achieve two goals. The first was that when calculating the distance between two places shown on a map, the distortion that is immanent to the map due to the applied map projection should be taken into account. The second goal was to show how, using the theory of map projections, a formula for the length of a loxodrome arc on an ellipsoid can be derived that does not depend on the applied map projection.

Keywords: map projections, ellipsoid, loxodrome, rhumb line, arc length.

Primljeno / Received: 2024-12-12

Prihvaćeno / Accepted: 2024-12-27