



ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 30. rujna 2025. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 2/302.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 282.

A) Zadatci iz matematike

4029. Dokaži da za pozitivne realne brojeve a_1, a_2, a_3, a_4 vrijedi nejednakost

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3 + a_4} + \frac{a_2}{a_3 + a_4 + a_1} + \frac{a_3}{a_4 + a_1 + a_2} + \frac{a_4}{a_1 + a_2 + a_3} \geq \frac{4}{3}.$$

4030. Dokaži da za pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost

$$\frac{a^2 b^2}{a+b} + \frac{b^2 c^2}{b+c} + \frac{c^2 a^2}{c+a} \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2}.$$

Kada vrijedi jednakost?

4031. Dokaži da jednakost $x^m = 2^n - 1$ nema rješenja u skupu prirodnih brojeva, ako su $m > 1$ i $n > 1$ prirodni brojevi.

4032. U kompleksnoj ravnini skiciraj skup točaka

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{6} \leq \arg \frac{i}{(z+iz)^2} < \frac{\pi}{4} \right\}.$$

4033. Na pravcima p i r , koji se sijeku, dane su redom međusobno različite točke A_1, A_2, A_3 i B_1, B_2, B_3 , tako da je $\overrightarrow{A_1 A_3} = \lambda \overrightarrow{A_2 A_3}$ i $\overrightarrow{B_1 B_3} = \lambda \overrightarrow{B_2 B_3}$, za $\lambda \neq 0$. Točke C_1, C_2, C_3 dijele $\overrightarrow{A_1 B_1}, \overrightarrow{A_2 B_2}, \overrightarrow{A_3 B_3}$ u istom omjeru. Dokaži da su one identične ili leže na istom pravcu.

4034. Neka je O središte paralelograma $ABCD$ i P po volji izabrana točka izvan njega. Točke M i N su polovišta dužina $\overline{AP}$ i $\overline{BP}$, a Q je sjecište dužina $\overline{MC}$ i $\overline{ND}$. Dokaži da su točke O, P i Q kolinearne.

4035. Na stranici $\overline{AC}$ trokuta ABC dana je točka E . Pravci kroz E paralelni s BC i AB sijeku $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ u točkama D i F . Dokaži da je $S_{DBFE} = 2\sqrt{S_{ADE} \cdot S_{EFC}}$.

4036. Pravokutnik $ABCD$ upisan je u kružnicu na kojoj je dana točka P . Iz nje su spuštene okomice PM, PN, PQ, PR na AB, BC, CD, DA , tim redom. Dokaži da vrijedi $|PM| \cdot |PQ| = |PN| \cdot |PR|$.

4037. Na stranici $\overline{BC}$ trokuta ABC dana je točka D . Iz B i C spuštene su okomice BE i CF na pravac AD . Ako je R polovište stranice $\overline{BC}$, dokaži $|RE| = |RF|$.

4038. Neka su D, E, F nožišta visina trokuta ABC s kutovima α, β, γ . Nađi omjer površina trokuta DEF i ABC .

4039. Kružnice polumjera r i R dodiruju se izvana, a AB i CD su njihove zajedničke tangente. Dokaži da se u četverokut $ABCD$ može upisati kružnica te odredi njezin polumjer.

4040. U ladici se nalazi 10 crvenih, 8 plavih, 8 ljubičastih i 4 žute olovke. U mraku biramo olovke iz ladice. Koliko najmanje olovaka treba izvaditi da bi među njima bilo:

- a) ne manje od 4 olovke iste boje;
- b) barem po jedna olovka od svake boje;
- c) najmanje 6 plavih olovaka?

4041. Neka je

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

za $n > 2$, Fibonaccijev niz. Dokaži jednakost

$$F_n^2 - F_{n-2}^2 = F_{2n-2}, \quad n > 2.$$

4042. Za prirodan broj n odredi sumu

$$\binom{n}{1} \cos x + \binom{n}{2} \cos 2x + \dots + \binom{n}{n} \cos nx.$$

B) Zadatci iz fizike

OŠ – 550. Poluga dugačka 90 cm ima zanezmarivu masu. Na jednom joj je kraju uteg mase 1 kg, a na drugoj strani od oslonca su raspoređena tri utega jednakih masa. Jedan od njih se nalazi na kraju poluge i sva su tri međusobno jednako udaljena. Kolika je masa jednog od tih jednakih utega?

OŠ – 551. Loptica mase 100 g je izbačena vertikalno uvis početnom brzinom 6 m/s s neke početne visine. Nakon drugog odskoka odskočila je na visinu 1.47 m. Pri svakom odskoku loptica izgubi 30 posto svoje energije. Izračunaj početnu visinu s koje je loptica izbačena.

OŠ – 552. Lovro je izmjerio da ploča štednjaka zakuha 2 dl vode početne temperature 20 °C za 56 sekundi. Jaja kuha u istoj količini vode i kad voda zakuha, kuha ih još pet minuta. Početna je temperatura jaja 5 °C. Masa jednog jajeta je 80 g. Koliko će trajati kuhanje dva jajeta? Specifični toplinski kapacitet jajeta je 3200 J/kgK, a vode 4200 J/kgK.

OŠ – 553. 51 Pegasi b je prvi otkriveni ekstrasolarni planet. Otkriven je 1995. godine i fizičari koji su ga otkrili dobili su za to Nobelovu nagradu za fiziku. Taj planet oko svoje zvijezde kruži na udaljenosti od oko 7.9 milijuna kilometara, a za jedan okret oko nje treba 101.54 h. Usporedi brzinu kruženja oko matične zvijezde tog planeta sa Zemljinom brzinom kruženja oko Sunca. Zemlja je od Sunca udaljena 149.6 milijuna kilometara i za jedan joj okret treba 365.25 dana. Pretpostavi da su staze tih planeta kružnice.

1868. Banane su poznate po visokom udjelu kalija od 3.6 g/kg i blagoj radioaktivnosti zbog izotopa ^{40}K koji ima prirodnu zastupljenost od 0.012 % (molarni omjer) i vrijeme poluraspada 1.251 milijardi godina. Koliko raspada ^{40}K se dogodi u jednoj sekundi u kilogramu banana? Molarna masa prirodnog kalija je 39.098 g/mol.

Napomena. Vjerojatno će biti potrebna numerička aproksimacija:

$$2^x \approx 1 + x \ln 2$$

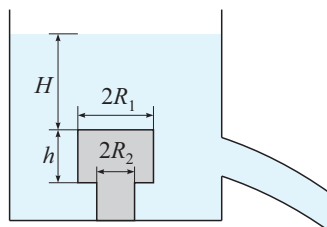
koja vrijedi za vrlo male vrijednosti x . Želiš li provjeriti grešku te aproksimacije, to možeš učiniti razmatranjem egzaktnog izraza:

$$2^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x \ln 2)^k}{k!} = 1 + x \ln 2 + \frac{(x \ln 2)^2}{2} + \dots$$

1869. Pri temperaturi od 15 °C masivna platforma postavljena je na vertikalnu oprugu čija je prirodna duljina pri danoj temperaturi jednaka 20 cm. Pritiskom platforme opruga se sabija na duljinu od 15 cm. Zagrijavanjem opruge njezina prirodna duljina produljuje se za 0.2 mm po Celzijevom stupnju temperature razlike. No

zagrijavanjem ona također postaje “mekša”, tako da u nekom rasponu oko sobne temperature njezin koeficijent elastičnosti ovisi o temperaturi kao $k_T = K/\sqrt{T + 50\text{ °C}}$. Kolika je minimalna visina do koje se platforma može spustiti hlađenjem ili zagrijavanjem opruge i pri kojoj će se temperaturi to dogoditi?

1870. Promotri tijelo mase 10 g koje se sastoji od dvaju slijepljenih valjaka (slijepljene su im baze). Donji valjak manje je baze, polumjera 5 cm, a gornji valjak veće je baze, polumjera 10 cm i visine 7 cm. Tijelo je pritisnuto o dno čaše manjom bazom pa je u čašu nalivena voda, tako da se zbog pritiska na tijelo voda ne uspijeva uvući pod njegovu bazu. Voda je nalivena do određene visine, tako da nakon popuštanja početnog pritiska tijelo i dalje ostaje pripljubljeno uz dno čaše. Voda se zatim počinje ispuštati kroz otvor na čaši. Do koje se visine *nad gornjom bazom tijela* razina vode mora spustiti da bi tijelo počelo izranjati? Gustoća vode je 1000 kg/m³.



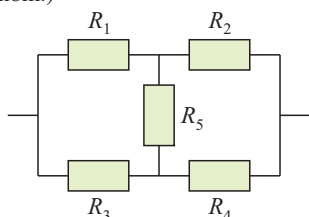
1871. Ljestve mase 10 kg stabilno su oslonjene o zid te zatvaraju kut od 80° s obzirom na tlo. Ako se centar mase ljestava nalazi na polovici njihove duljine, koliko iznosi sila njihova trenja s tlom? Ako je koeficijent statičkoga trenja ljestava s tlom jednak 0.8, koliki je najmanji kut koji one mogu zatvarati s tlom prije nego što počnu proklizavati? U statičkome slučaju nije prisutno trenje ljestava sa zidom.

Uputa. Ne zaboravi na momente sila.

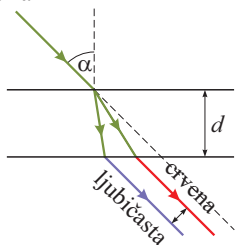
1872. Čestica Σ^0 raspada se iz mirovanja u česticu Λ^0 i γ -zraku. Izračunaj energiju γ -zrake. Masa Σ^0 je 1192.642 MeV/c², a masa Λ^0 je 1115.683 MeV/c². Potreban je relativistički račun. Izrazi energiju γ -zrake i u megaelektronvoltima (MeV) i u džulima (J).

Uputa. Veza između ukupne relativističke energije E i količine gibanja p danog objekta je $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$. γ -zraka (tj. foton) nema masu.

1873. Za strujni krug na slici, možeš li predložiti neku specifičnu kombinaciju otpora R_1 , R_2 , R_3 , R_4 takvu da ukupan otpor sklopa ne ovisi o R_5 ? (Opravdaj prijedlog argumentom ili računom.)



1874. Uska zraka bijele svjetlosti upada iz zraka na blok stakla debljine 1 cm, pod kutom od 45° s obzirom na njegovu okomicu. Indeks loma materijala općenito ovisi o frekvenciji svjetlosti. Neka je indeks loma stakla za zadnju vidljivu nijansu crvene svjetlosti jednak 1.50, a za zadnju vidljivu nijansu ljubičaste svjetlosti 1.53. Zbog loma svjetlosti u staklu dolazi do pomaka izlaznih zraka, koji je za svaku boju različit. Kolika je širina snopa vidljive svjetlosti po izlasku iz stakla?



C) Rješenja iz matematike

4001. Riješi sustav jednačbi

$$\begin{aligned} x - \frac{2x+y}{x^2-y^2} &= 1 \\ y + \frac{x+2y}{x^2-y^2} &= -1. \end{aligned}$$

Rješenje. Zbrajanjem jednačbi sustava slijedi:

$$x+y - \frac{1}{x+y} = 0 \implies x+y = \pm 1.$$

1° $x+y = 1$. Iz prve jednačbe sustava imamo:

$$x - \frac{x+1}{2x-1} = 1$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2,$$

odakle je $y_1 = 1, \quad y_2 = -1$

2° $x+y = -1$.

$$x + \frac{x-1}{2x+1} = 1$$

$$x^2 - 1 = 0, \quad \text{tj.}$$

$$x_3 = 1, \quad x_4 = -1,$$

$$y_3 = -2, \quad y_4 = 0.$$

Dobili smo četiri rješenja sustava:

$$(x, y) \in \{(0, 1), (-1, 0), (2, -1), (1, -2)\}.$$

Duje Dodig (4),

Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

4002. Dokaži da se broj $(1+\sqrt{2})^n$, $n \in \mathbb{N}$, može prikazati u obliku $a+b\sqrt{2}$, gdje su a i b međusobno prosti brojevi.

Rješenje. Matematičkom indukcijom ćemo dokazati da je

$$(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2},$$

$$\text{nzd}(a_n, b_n) = 1,$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Baza. $n = 1$, $(1+\sqrt{2})^1 = 1+\sqrt{2}$, $a_1 = 1$, $b_1 = 1$ i $\text{nzd}(a_1, b_1) = 1$.

Pretpostavka. Pretpostavimo da je

$$(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2},$$

pri čemu je $\text{nzd}(a_n, b_n) = 1$.

Korak. Dokažimo da je

$$(1+\sqrt{2})^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2}$$

i $\text{nzd}(a_{n+1}, b_{n+1}) = 1$.

$$\begin{aligned} (1+\sqrt{2})^{n+1} &= (1+\sqrt{2})^n \cdot (1+\sqrt{2}) \\ &= (a_n + b_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) \\ &= (a_n + 2b_n) + (a_n + b_n)\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Uz oznake $a_{n+1} = a_n + 2b_n$ i $b_{n+1} = a_n + b_n$ imamo:

$$(1+\sqrt{2})^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2}.$$

Još je:

$$\begin{aligned}
 \text{nzd}(a_{n+1}, b_{n+1}) &= \text{nzd}(a_n + 2b_n, a_n + b_n) \\
 &= \text{nzd}(a_n + b_n, a_n + 2b_n - (a_n + b_n)) \\
 &= \text{nzd}(a_n + b_n, b_n) \\
 &= \text{nzd}(b_n, a_n + b_n - b_n) \\
 &= \text{nzd}(a_n, b_n) = 1.
 \end{aligned}$$

Duje Dodig (4), Zagreb

4003. Ako su a , b , c duljine stranica trokuta, dokaži nejednakost

$$\begin{aligned}
 \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} + \sqrt{a+b-c} \\
 \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.
 \end{aligned}$$

Rješenje. Koristit ćemo jednostavnu nejednakost za pozitivne realne brojeve:

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \geq \frac{x + y}{2}.$$

Budući da su a , b , c stranica trokuta vrijedi $b + c > a$, $c + a > b$, $a + b > c$.

$$\begin{aligned}
 \sqrt{a} &= \sqrt{\frac{(\sqrt{a-b+c})^2 + (\sqrt{a+b-c})^2}{2}} \\
 &\geq \frac{\sqrt{a-b+c} + \sqrt{a+b-c}}{2} \\
 \sqrt{b} &= \sqrt{\frac{(\sqrt{b-c+a})^2 + (\sqrt{b+c-a})^2}{2}} \\
 &\geq \frac{\sqrt{b-c+a} + \sqrt{b+c-a}}{2} \\
 \sqrt{c} &= \sqrt{\frac{(\sqrt{c+a-b})^2 + (\sqrt{c-a+b})^2}{2}} \\
 &\geq \frac{\sqrt{c+a-b} + \sqrt{c+b-a}}{2}.
 \end{aligned}$$

Zbrajanjem slijedi nejednakost:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} + \sqrt{a+b-c} \\
 \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.
 \end{aligned}$$

Jednakost se postiže za jednakostraničan trokut tj. $a = b = c$.

Duje Dodig (4), Zagreb

4004. U skupu prirodnih brojeva riješi jednadžbu $x^{-2} + y^{-2} = z^{-2}$.

Rješenje. Jednadžbu možemo zapisati u ekvivalentnom obliku

$$x^2 z^2 + y^2 z^2 = x^2 y^2.$$

Stavljajući $t = xz$, $v = yz$, $w = xy$ možemo je zapisati u obliku

$$t^2 + v^2 = w^2.$$

Sva rješenja ove jednadžbe su

$$\begin{aligned}
 t &= m^2 - n^2, \quad v = 2mn, \quad w = m^2 + n^2, \\
 m &> n, \quad m, n \in \mathbb{N}.
 \end{aligned}$$

Dobivamo

$$\begin{aligned}
 xz &= m^2 - n^2 \\
 yz &= 2mn \\
 xy &= m^2 + n^2,
 \end{aligned}$$

odakle je

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{y} &= \frac{m^2 - n^2}{2mn}, \\
 \frac{y}{z} &= \frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2}, \\
 \frac{z}{x} &= \frac{2mn}{m^2 + n^2},
 \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{2mn}{m^2 + n^2} x = 2mn \cdot k, \quad k \in \mathbb{Q} \\
 z &= \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} y = (m^2 - n^2) \cdot l, \quad l \in \mathbb{Q}.
 \end{aligned}$$

Odavde je $(m^2 - n^2)l = 2mnk$, tj.

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{m}{n}\right)^2 l - 2\left(\frac{m}{n}\right)k - l &= 0, \quad \text{tj.} \\
 \frac{m}{n} &= k + \sqrt{k^2 + l^2}
 \end{aligned}$$

za neke k i l takve da je $k^2 + l^2$ kvadrat prirodnog broja.

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{m^2 + n^2}{2mn} z, \quad y = \frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2} z, \\
 z &= (m^2 - n^2)l = 2mnk \\
 x &= (m^2 + n^2)k, \quad y = (m^2 - n^2)l.
 \end{aligned}$$

Npr. za $n = 1$ dovoljno je uzeti

$$m = k + \sqrt{k^2 + l^2} \in \mathbb{N}.$$

Ur.

4005. Odredi sve proste brojeve p takve da je suma znamenaka broja $p^4 - 5p^2 + 13$ najmanja moguća.

Rješenje. Neka je $n = p^4 - 5p^2 + 13$. Za $p = 2$ imamo $n = 9$ i suma znamenaka je 9. Za $p = 3$ imamo $n = 49$ i suma znamenaka je 13. Za $p = 5$ je $n = 513$ i tražena suma je 9. Neka je sada $p > 5$ prost broj. Možemo pisati:

$$\begin{aligned} n &= p^4 - 5p^2 + 13 \\ &= (p-2)(p-1)(p+1)(p+2) + 9. \end{aligned}$$

Kako je $p-2$, $p-1$, p , $p+1$ i $p+2$ pet uzastopnih prirodnih brojeva, barem jedan od njih je djeljiv s 5. No, kako je $p > 5$ prost broj, on sigurno nije djeljiv s 5. Dakle,

$$5 \mid (p-2)(p-1)(p+1)(p+2).$$

Uočimo da je jedan od dva uzastopna prirodna broja $p+1$ i $p+2$ paran, pa stoga

$$10 \mid (p-2)(p-1)(p+1)(p+2).$$

Prema tome, za svaki prosti broj $p > 5$ broj n ima barem dvije znamenke, a znamenka jedinica je 9 tako da je suma znamenaka veća od 9. Znači, najmanja suma znamenaka broja n je 9 i postiže se za $p \in \{2, 5\}$.

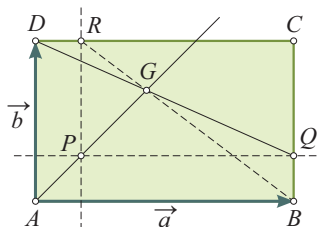
Duje Dodig (4), Zagreb

4006. Unutar pravokutnika $ABCD$ dana je točka P na simetrali kuta A . Paralele kroz točku P paralelne s AB i AD sijeku stranice $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ redom u točkama Q i R . Dokaži da se pravci AP , BR i DQ sijeku u istoj točki.

Rješenje.

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \lambda \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$$\overrightarrow{AG} = \mu \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \mu \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$



Neka se pravci AG i DQ sijeku u točki G . Ako dokažemo da su vektori $\overrightarrow{BR}$ i $\overrightarrow{BG}$ koline-

arni dokaz je gotov.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DQ} &= k \cdot \overrightarrow{DG} \\ &= -\vec{b} + \vec{a} + \frac{\lambda}{|\vec{b}|} \vec{b} \\ &= k \left(-\vec{b} + \mu \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \mu \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \\ \vec{a} + \left(\frac{\lambda}{|\vec{b}|} - 1 \right) \vec{b} \\ &= \frac{k\mu}{|\vec{a}|} \vec{a} + \left(\frac{\mu}{|\vec{b}|} - 1 \right) k \vec{b} \end{aligned}$$

Slijedi:

$$\begin{aligned} \frac{k\mu}{|\vec{a}|} &= 1 \implies k = \frac{|\vec{a}|}{\mu} \quad \text{i} \\ \frac{\lambda}{|\vec{b}|} - 1 &= k \left(\frac{\mu}{|\vec{b}|} - 1 \right) \\ \implies \frac{\lambda}{|\vec{b}|} - 1 &= \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} - \frac{|\vec{a}|}{\mu} \\ \implies \frac{\lambda}{|\vec{a}|} &= 1 - \frac{|\vec{b}|}{\mu} + \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \quad (*) \end{aligned}$$

Sada je:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BR} &= -\vec{a} + \vec{b} + \frac{\lambda}{|\vec{a}|} \vec{a} \\ &= \left(\frac{\lambda}{|\vec{a}|} - 1 \right) \vec{a} + \vec{b} \\ \overrightarrow{BG} &= -\vec{a} + \frac{\mu}{|\vec{a}|} \vec{a} + \frac{\mu}{|\vec{b}|} \vec{b} \\ &= \left(\frac{\mu}{|\vec{a}|} - 1 \right) \vec{a} + \frac{\mu}{|\vec{b}|} \vec{b}. \end{aligned}$$

Konačno je (uz $(*)$):

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BR} &= \left(1 - \frac{|\vec{b}|}{\mu} + \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} - 1 \right) \vec{a} + \vec{b} \\ &= \frac{|\vec{b}|}{\mu} \left(\frac{\mu}{|\vec{a}|} - 1 \right) \vec{a} + \vec{b} \\ &= \frac{|\vec{b}|}{\mu} \left[\left(\frac{\mu}{|\vec{a}|} - 1 \right) \vec{a} + \frac{\mu}{|\vec{b}|} \vec{b} \right] \\ &= \frac{|\vec{b}|}{\mu} \overrightarrow{BG}. \end{aligned}$$

Dakle, vektori $\overrightarrow{BR}$ i $\overrightarrow{BG}$ su kolinearni i dokaz je gotov.

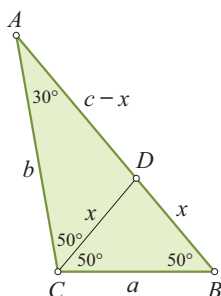
Duje Dodig (4), Zagreb

4007. Poznato je da su u trokutu ABC kutovi $\alpha = 30^\circ$ i $\beta = 50^\circ$. Dokaži da za duljine stranica tog trokuta vrijedi $c^2 = b(a + b)$.

Rješenje. Nacrtajmo simetralu kuta kod vrha C .

$$\triangle ABC \sim \triangle ACD$$

$$\Rightarrow c : b = a : x, \quad x = \frac{ab}{c} \quad (1)$$



Iz svojstva simetrale kuta je

$$|AC| : |BC| = |AD| : |BD|$$

$$\Rightarrow b : a = (c - x) : x$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{b}{a} = \frac{c - \frac{ab}{c}}{\frac{ab}{c}} = \frac{c^2 - ab}{ab} / \cdot ab$$

$$b^2 = c^2 - ab$$

$$c^2 = b(b + a).$$

Duje Dodig (4), Zagreb

4008. U trokutu ABC visina h_c dijeli stranicu $\overline{AB}$ na dijelove duljina p i q . Okomica na tu stranicu dijeli trokut na dva dijela jednakih površina. Ako je M njezin presjek sa stranicom $\overline{AB}$, odredi $|AM|$ i $|BM|$.

Rješenje. Iz sličnosti trokuta A_1BC i MBK je:

$$|CA_1| : |KM| = |A_1B| : |MB|$$

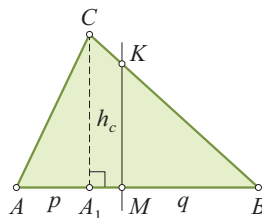
$$|KM| = \frac{h_c \cdot |MB|}{q}. \quad (1)$$

Kako je površina četverokuta $AMKC$ jednaka površini trokuta MBK , za površinu P trokuta ABC vrijedi:

$$P = |MB| \cdot |KM|. \quad (2)$$

S druge strane je

$$P = \frac{1}{2}(p + q)h_c. \quad (3)$$



Iz (1), (2) i (3) slijedi:

$$\frac{1}{2}(p + q)h_c = |MB| \cdot \frac{h_c \cdot |MB|}{q}$$

$$\Rightarrow |MB| = \sqrt{\frac{q(p + q)}{2}} \quad \text{i}$$

$$|AM| = |AB| - |MB|$$

$$= p + q - \sqrt{\frac{q(p + q)}{2}}.$$

Duje Dodig (4), Zagreb

4009. U trokutu ABC kut C je jednak 60° , a polumjer opisane kružnice $2\sqrt{3}$ cm. Točka D na stranici $\overline{AB}$ je takva da je $|AD| : |DB| = 2$ i $|CD| = 2\sqrt{2}$ cm. Odredi površinu trokuta.

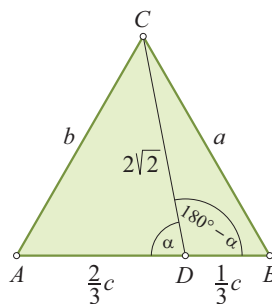
Rješenje. Sinusov poučak daje

$$\frac{c}{\sin 60^\circ} = 4\sqrt{3} \Rightarrow c = 6 \text{ cm.}$$

Kosinusov poučak za $\triangle ABC$, $\triangle ADC$ i $\triangle BCD$:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 60^\circ$$

$$a^2 + b^2 - ab = 36 \quad (1)$$



$$\left. \begin{aligned} b^2 &= 8 + 16 - 16\sqrt{2} \cos \alpha \\ a^2 &= 8 + 4 - 8\sqrt{2} \cos (180^\circ - \alpha) \end{aligned} \right\}$$

$$2a^2 + b^2 = 48$$

$$b = \sqrt{48 - 2a^2}$$

$$\stackrel{(1)}{\implies} a\sqrt{48 - 2a^2} = 12 - a^2 \quad / \quad ; \quad a^2 \leq 12$$

$$\implies 3a^4 - 72a^2 + 144 = 0, \quad \text{tj.}$$

$$a^4 - 24a^2 + 48 = 0.$$

Rješenja ove bikvadratne jednačbe su $a^2 = 12 \pm 4\sqrt{6}$, ali zbog uvjeta jedino je moguće $a^2 = 12 - 4\sqrt{6}$, tj.

$$a = \sqrt{12 - 4\sqrt{6}} \quad \text{i} \quad b = \sqrt{2} \cdot \sqrt{12 + 4\sqrt{6}}.$$

Tražena površina je:

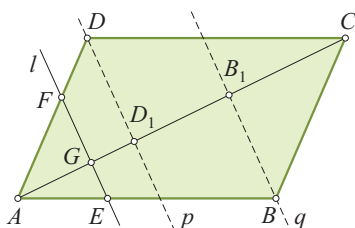
$$P = \frac{abc}{4R} = \frac{6\sqrt{2}\sqrt{12 - 4\sqrt{6}} \cdot \sqrt{12 + 4\sqrt{6}}}{4 \cdot 2\sqrt{3}} \\ = 3\sqrt{2}.$$

Duje Dodig (4), Zagreb

4010. Pravac l siječe stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ paralelograma $ABCD$ u točkama E i F , tim redom. Pravac l siječe dijagonalu $\overline{AC}$ u točki G . Dokaži jednakost

$$\frac{|AB|}{|AE|} + \frac{|AD|}{|AF|} = \frac{|AC|}{|AG|}.$$

Rješenje. Kroz vrhove B i D paralelograma povučemo pravce p i q koji su usporedni s pravcem l .



Njihov presjek s dijagonalom $\overline{AC}$ su točke B_1 i D_1 . Vidimo $|AD_1| = |CB_1|$. Imamo

$$\triangle AGE \sim \triangle AB_1B, \quad \triangle AGF \sim \triangle AD_1D$$

$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|AB_1|}{|AG|}, \quad \frac{|AD|}{|AF|} = \frac{|AD_1|}{|AG|}$$

$$\implies \frac{|AB|}{|AE|} + \frac{|AD|}{|AF|} = \frac{|AD_1| + |AB_1|}{|AG|} \\ = \frac{|AD_1| + |AC| - |B_1C|}{|AG|} = \frac{|AC|}{|AG|}.$$

Duje Dodig (4), Zagreb

4011. Točka P se nalazi na bazi $\overline{AB}$ jednokračnog trokuta ABC .

$$a) \text{ Dokaži } |PC|^2 = |AC|^2 - |AP| \cdot |PB|.$$

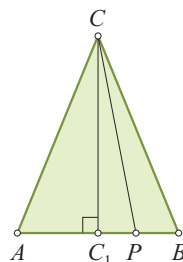
b) Nađi odgovarajuću formulu za slučaj kada je točka P na produžetku stranice $\overline{AB}$.

Rješenje. a) Prema Pitagorinu poučku je:

$$|CP|^2 = |CC_1|^2 + |C_1P|^2$$

$$|AC|^2 = |AC_1|^2 + |CC_1|^2$$

$$|PC|^2 = |AC|^2 + |C_1P|^2 - |AC_1|^2 \\ = |AC|^2 - (|C_1P| + |C_1A|)(|C_1A| - |C_1P|) \\ = |AC|^2 - |AP| \cdot |PB|.$$

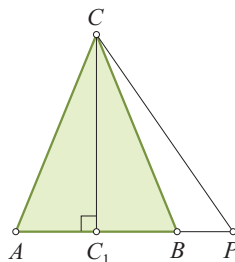


b) Ponovno je po Pitagorinu poučku:

$$|CP|^2 = |CC_1|^2 + |C_1P|^2$$

$$|AC|^2 = |AC_1|^2 + |CC_1|^2$$

$$|PC|^2 - |C_1P|^2 = |AC|^2 - |AC_1|^2 \\ |PC|^2 = |AC|^2 + |C_1P|^2 - |AC_1|^2 \\ = |AC|^2 - (|C_1P| + |C_1A|)(|C_1P| - |AC_1|) \\ = |AC|^2 - |AP| \cdot |PB|.$$



Duje Dodig (4), Zagreb

4012. Riješi sustav jednačbi

$$\sin x + 2 \sin(x + y + z) = 0$$

$$\sin y + 3 \sin(x + y + z) = 0$$

$$\sin z + 4 \sin(x + y + z) = 0.$$

Rješenje. Zbrojimo prve dvije jednačbe i oduzmemo treću:

$$\begin{aligned} & \sin x + \sin y + \sin(x + y + z) - \sin z = 0 \\ & 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + 2 \sin \frac{x+y+z-z}{2} \\ & \quad \cdot \cos \frac{x+y+z+z}{2} = 0 \quad / : 2 \\ & \sin \frac{x+y}{2} \left(\cos \frac{x-y}{2} + \cos \frac{x+y+2z}{2} \right) = 0 \\ & \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x+z}{2} \cos \frac{y+z}{2} = 0. \end{aligned}$$

1°

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{2} &= k\pi \\ x+y &= 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Iz treće jednačbe sustava:

$$\sin z = 0, \quad z = m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Iz prve jednačbe je:

$$\begin{aligned} \sin x = 0 &\implies x = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \\ y &= (2k - n)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

2°

$$\begin{aligned} \frac{x+z}{2} &= \frac{\pi}{2} + k\pi \quad / \cdot 2 \\ x+z &= (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Iz druge jednačbe je:

$$\begin{aligned} \sin y + 3 \sin(y + \pi) &= 0 \\ \sin y = 0, \quad y &= m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Iz prve jednačbe je:

$$\begin{aligned} \sin x = 0, \quad x &= n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{tj.} \\ z &= (2k - n + 1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

3°

$$\begin{aligned} \frac{y+z}{2} &= \frac{\pi}{2} + k\pi \quad / \cdot 2 \\ y+z &= (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Iz prve jednačbe je:

$$\sin x = 0, \quad x = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Iz druge je:

$$\sin y = 0, \quad y = m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad \text{tj.}$$

$$z = (2k - m + 1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dakle, rješenja sustava možemo zapisati:

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \{ & (n\pi, (2k - n)\pi, m\pi), \\ & (n\pi, m\pi, (2k - n + 1)\pi), \\ & (n\pi, m\pi, (2k - m + 1)\pi), \\ & n, m, k \in \mathbb{Z} \}. \end{aligned}$$

Duje Dodig (4), Zagreb

4013. Dokaži jednakost

$$\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = \sqrt{3}.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ \\ &= \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg}(60^\circ - 20^\circ) \cdot \operatorname{tg}(60^\circ + 20^\circ) \\ &= \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \frac{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 20^\circ}{1 + \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 20^\circ} \cdot \frac{\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ}{1 - \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 20^\circ} \\ &= \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 60^\circ - \operatorname{tg}^2 20^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 60^\circ \operatorname{tg}^2 20^\circ} \\ &= \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \frac{3 - \operatorname{tg}^2 20^\circ}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 20^\circ} = \frac{3 \cdot \operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{tg}^3 20^\circ}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 20^\circ} \\ &= \operatorname{tg}(3 \cdot 20^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Franka Horvat (2),

X. gimnazija "Ivan Supek", Zagreb

4014. U unutrašnjosti svake strane kocke dano je n točaka od kojih nikoje tri nisu kolinearne.

a) Koliko ima pravaca, određenih tim točkama, koji ne leže u ravninama strana kocke?

b) Koliko ima trokuta, određenih tim točkama, koji ne leže u ravninama strana kocke?

c) Ako strane kocke obojimo sa šest različitih boja, koliko ima tetraedara s vrhovima u danim točkama ako su:

i) tri vrha iste boje

ii) po dva vrha iste boje?

Rješenje. a) Kocka ima 6 strana, a to znači da ukupno imamo $6n$ točaka. Ovih $6n$ točaka ukupno određuje $\binom{6n}{2}$ pravaca (nikoje tri

nisu kolinearne). Broj pravaca na istoj strani je $\binom{n}{2}$ pa je traženi broj:

$$N_1 = \binom{6n}{2} - 6\binom{n}{2} = 15n^2.$$

b) U ovom slučaju od ukupnog broja svih trokuta $\binom{6n}{3}$ trebamo oduzeti one čiji su vrhovi na istoj strani kocke:

$$N_2 = \binom{6n}{3} - 6\binom{n}{3} = 5n^2(7n - 3).$$

c) i) Da bi tri vrha tetraedra bila istobojna moraju ležati na istoj strani kocke. Broj osnovki tetraedra je $6\binom{n}{3}$. Jedna od ovih osnovki zajedno s bilo kojom od preostalih $5n$ točaka čini traženi tetraedar. Traženi broj je:

$$N_3 = 6\binom{n}{3} \cdot 5n = 5n^2(n - 1)(n - 2).$$

ii) Dva po dva istobojna vrha tetraedra biramo na $\binom{n}{2} \cdot \binom{n}{2}$ načina i broj načina da odaberemo 2 od 6 strana je $\binom{6}{2}$. Traženi broj načina je, po principu produkta:

$$N_4 = \binom{6}{2} \binom{n}{2} \binom{n}{2} = \frac{15}{4}n^2(n - 1)^2.$$

Duje Dodig (4), Zagreb

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 542. Iz grada A u grad B je krenuo prvi vlak brzinom 54 km/h, a 15 min nakon nje ga krenuo je drugi vlak brzinom 36 km/h. Pola sata nakon polaska prvi je vlak sreo treći koji mu je vozio u susret po drugom kolosijeku pruge. Treći se vlak sreo s drugim 10 min kasnije. Kolika je brzina trećeg vlaka?

Rješenje.

$$v_1 = 54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$v_2 = 36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$t_2 = t_1 - 15 \text{ min} = 0.25 \text{ h}$$

$$t_{\text{susreta } 1,3} = 0.5 \text{ h}$$

$$t_{\text{susreta } 1,2} = 10 \text{ min}$$

$$v_3 = ?$$

$$s_1 = v_1 t_1 = 54 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 0.5 \text{ h} = 27 \text{ km}$$

$$s_2 = v_2 t_2 = 36 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 0.25 \text{ h} = 9 \text{ km}$$

$$\Delta s = s_1 - s_2 = 18 \text{ km.}$$

Za prvih pola sata prvi i drugi vlak će biti udaljeni 18 km i toliko će biti udaljen i treći vlak od drugog.

$$v_{\text{susreta}} = v_1 + v_3 = \frac{\Delta s}{t_3} = \frac{18 \text{ km}}{\frac{1}{6} \text{ h}} = 108 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$v_3 = v_{\text{susreta}} - v_2 = 108 \frac{\text{km}}{\text{h}} - 36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$= 72 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Leon Hudoletnjak (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 543. Ivan je svojoj kćerki Astrid kupio u Maksimiru balon napunjen helijem. Procijenio je da je masa praznog balona 15 g, a njegov volumen kad je pun 20 L (litara). Kolikom silom mora Astrid držati balon da joj ne odleti? Gustoća helija je 0.18 kg/m³, a gustoća zraka 1.3 kg/m³.

Rješenje.

$$m_b = 15 \text{ g}$$

$$V = 20 \text{ dm}^3$$

$$\rho_{\text{He}} = 0.18 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_z = 1.3 \text{ kg/m}^3$$

$$F = ?$$

Na balon djeluje njegova težina prema dolje i sila uzgona prema gore.

$$m = m_b + m_{\text{He}}$$

$$m_{\text{He}} = V \rho_{\text{He}} = 0.02 \text{ m}^3 \cdot 0.18 \text{ kg/m}^3$$

$$= 0.0036 \text{ kg}$$

$$m = 0.02 \text{ kg} + 0.0036 \text{ kg} = 0.0236 \text{ kg}$$

$$G = mg = 0.0236 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 0.236 \text{ N}$$

$$F_{\text{uzgon}} = \rho_z g V = 1.3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 0.02 \text{ m}^3$$

$$= 0.26 \text{ N}$$

$$F = F_{\text{uzgon}} - G = 0.26 \text{ N} - 0.236 \text{ N}$$

$$= 0.024 \text{ N}.$$

Lovro Juraić (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 544. Kad oprugu rasteže sila od 10 N ona se produlji za 5 cm, a kad na nju, u suprotnom smjeru od prve, djeluje sila od 4 N njena je duljina 28 cm. Koliko će opruga biti dugačka kad na nju djeluje sila od 18 N u smjeru prve sile?

Rješenje.

$$F_1 = 10 \text{ N}$$

$$\Delta l_1 = 5 \text{ cm}$$

$$F_2 = -4 \text{ N}$$

$$l_2 = 28 \text{ cm}$$

$$F_3 = 18 \text{ N}$$

$$l_3 = ?$$

$$k = \frac{F_1}{\Delta l_1} = \frac{10 \text{ N}}{0.05 \text{ m}} = 200 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\Delta l_2 = \frac{F_2}{k} = \frac{-4 \text{ N}}{200 \frac{\text{N}}{\text{m}}} = -0.02 \text{ m} = -2 \text{ cm}$$

$$l_0 = l_2 - \Delta l_2 = 30 \text{ cm}$$

$$\Delta l_3 = \frac{F_3}{k} = \frac{18 \text{ N}}{200 \frac{\text{N}}{\text{m}}} = 0.09 \text{ m} = 9 \text{ cm}$$

$$l_3 = l_0 + \Delta l_3 = 30 \text{ cm} + 9 \text{ cm} = 39 \text{ cm}.$$

Lovro Juraić (8), Zagreb

OŠ – 545. Andrija ima dvije žice od nehrđajućeg čelika. Jedna ima promjer 2 mm, a druga 1 mm. Deblja je žica dvostruko dulja. Opleo je dulju žicu oko kraće i spojio dobivenu pletenicu na bateriju od 1.5 V. Izmjerio je da tada kroz žicu teče struja od 900 mA. Koliko su dugačke žice? Električna otpornost nehrđajućeg čelika iznosi $6.9 \cdot 10^{-7} \Omega \text{m}$.

Rješenje.

$$d_1 = 2 \text{ mm}$$

$$d_2 = 1 \text{ mm}$$

$$l_1 = 2l_2$$

$$U = 1.5 \text{ V}$$

$$I = 900 \text{ mA} = 0.9 \text{ A}$$

$$\rho = 6.9 \cdot 10^{-7} \Omega \text{m}$$

$$l_1, l_2 =$$

$$R_{\text{uk}} = \frac{U}{I} = \frac{1.5 \text{ V}}{0.9 \text{ A}} = \frac{5}{3} \Omega$$

$$S_1 = 4S_2$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\frac{\rho l_2}{S_2}}{\frac{\rho l_1}{S_1}} = 2$$

$$R_1 = R, \quad R_2 = 2R$$

$$\frac{1}{R_{\text{uk}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} = \frac{3}{2R}$$

$$R_{\text{uk}} = \frac{2}{3}R$$

$$R = \frac{3}{2}R_{\text{uk}}$$

$$R = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} \Omega = 2.5 \Omega = R_1$$

$$S_1 = r^2 \pi = (10^{-3} \text{ m})^2 \pi = 10^{-6} \pi \text{ m}^2$$

$$l_1 = \frac{RS}{\rho} = \frac{2.5 \Omega \cdot 10^{-6} \pi \text{ m}^2}{6.9 \cdot 10^{-7} \Omega \text{m}} = 11.38 \text{ m}$$

$$l_2 = 5.69 \text{ m}.$$

Leon Hudoletnjak (8), Zagreb

1854. U radioaktivnom uzorku nalazi se 1 mol radioaktivnih atoma ^{138}La . Njihovo vrijeme poluživota je 102 milijarde godina. Koliko se nuklearnih raspada dogodi unutar 1 sekunde?

Napomena. Numerička aproksimacija je

$$2^x \approx 1 + x \ln 2$$

koja vrijedi za vrlo male vrijednosti x . Za provjeru pogreške te aproksimacije može se promatrati egzaktni izraz

$$2^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x \ln 2)^k}{k!} = 1 + x \ln 2 + \frac{(x \ln 2)^2}{2} + \dots$$

Rješenje. 1 mol znači da je prisutan Avogadrov broj N_A atoma ^{138}La . Nakon vremena $t = 1$ s broj preživjelih atoma bit će:

$$N(t) = N_A 2^{-t/T}.$$

Ukupan broj raspada stoga je

$$\Delta N = N(0) - N(t) = N_A(1 - 2^{-t/T}).$$

Uvrštavanjem $t/T = (1 \text{ s})/(102 \cdot 10^9 \text{ god.}) \approx 3.1 \cdot 10^{-19}$ računalo ili kalkulator vjerojatno neće uspjeti izračunati rezultat, već će na mjestu $2^{-t/T}$ dati egzaktnu jedinicu, odnosno $\Delta N = 0$. To je zato što su brojevi u računalima reprezentirani konačnim brojem bitova (nula i jedinica) pa imaju ograničenu preciznost, tj. ograničen broj znamenaka na raspolaganju. Današnja računala tipično rade s preciznošću od 16 decimalnih mjesta. Vrijednost člana $2^{-t/T}$ toliko je blizu jedinici (0.999...) da je prva bitna znamenka koja odstupa od devetke na kasnijem mjestu od 16-oga pa ga računalo zaokružuje na najbliži reprezentabilan broj: egzaktnu jedinicu. Stoga koristimo aproksimaciju za $t/T \ll 1$:

$$1 - 2^{-t/T} \approx (t/T) \ln 2 = 2.15 \cdot 10^{-19}.$$

Konačno množenje s N_A daje:

$$\Delta N \approx 1.3 \cdot 10^5,$$

naspram naivnoj nuli koju bismo dobili izravnim uvrštavanjem brojeva u kalkulator.

Napomena. Da bismo provjerili grešku aproksimacije, promotrimo doprinos kasnijih članova iz egzaktnoga izraza:

$$2^x = 1 + x \ln 2 + \frac{(x \ln 2)^2}{2} + \frac{(x \ln 2)^3}{6} + \dots,$$

uz $x = -t/T$. Uzastopni se članovi pojavljuju sa sve višim potencijama broja $x \ln 2$ koji je reda veličine 10^{-19} . Stoga svaki dodatni član popravljajući rezultat u skokovima od 19 decimalnih mjesta! Kvadratni član popravljajući aproksimaciju na 19. decimali, kubni na 38. decimali, sljedeći na 57. decimali, itd. Dakle naša aproksimacija i više je nego dobra! Numerički problem očito je nastao zbog numeričke nestabilnosti izraza

$$1 - 2^x = 1 - e^{x \ln 2}$$

za $x \ll 1$, koja se javlja ako prvo računamo eksponencijalnu funkciju. U programskome jeziku Python ili C++ to bismo učinili korištenjem naredbe `exp(x*log(2))`. No upravo za takve slučajeve postoji stabilizirana funkcija `expm1(x)`

koja izravno računa $e^x - 1$, zaobilazeći prvotno računanje eksponencijalnog člana. Stoga smo, alternativno ručnoj aproksimaciji, za $x = -t/T$ svoj rezultat mogli izračunati i naredbom:

$$1 - 2^x = -\text{expm1}(x \cdot \log(2)).$$

On bi bio egzaktno na toliko decimala koliko računalo ili kalkulator može reprezentirati: njih 16. No kako popravka ručne aproksimacije višim članovima počinje tek od 19. decimala, naša aproksimacija unutar 16 dostupnih decimala već daje egzaktno rezultat! Dakle, korištenje "egzaktnih" funkcija `expm1` ne bi popravilo niti jedan jedini računalni bit naše aproksimacije.

U jednom je molu više atoma negoli sekundi u milijun starosti svemira.

Ur.

1855. Dva spremnika ispunjena su plemenitim plinovima (svaki od njih je čista tvar, prirodne izotopne zastupljenosti). U prvome spremniku nalazi se čisti helij temperature 0°C . U drugome spremniku je plin temperature 60°C te 91 puta veće gustoće i 2 puta većeg tlaka. Koja je to plin?

Rješenje. Jednadžba idealnog plina daje:

$$pV = nRT = \frac{m}{M}RT \implies M = \frac{\rho}{p}RT,$$

gdje smo količinu tvari raspisali preko mase m i molarne mase M pa smo u njoj prepoznali masenu gustoću ρ . Označimo s p_0 , T_0 , ρ_0 i M_0 podatke za helij, a s p , T , ρ , M podatke za nepoznati plin. Iz periodnog sustava elemenata pod masenim brojem za helij možemo iščitati: $M_0 = 4 \text{ g/mol}$. Dijeljenjem jednadžbe idealnog plina za nepoznati plin i helij dolazimo do

$$\frac{M}{M_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{p_0}{p} \frac{T}{T_0},$$

odnosno

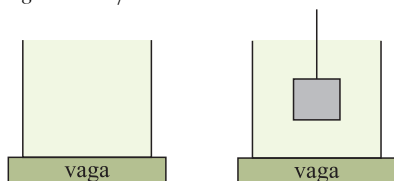
$$M = \frac{91}{2} \cdot \frac{333 \text{ K}}{273 \text{ K}} \cdot 4 \text{ g/mol} = 222 \text{ g/mol}.$$

Kako je zadani plin jednoatomni (jer je plemeniti) i čini čistu tvar, u periodnom sustavu tražimo plemeniti plin masenog broja 222, a to je radon (Rn).

Ur.

1856. Vaga, na koju je postavljena čaša s vodom, pokazuje 10 N. Nakon toga u vodu je na niti spušten kamen (bez prelijevanja vode preko ruba čaše), tako da je potpuno uronjen, ali

ne dodiruje dno čaše. Vaga sada pokazuje 15 N. Koji podatak o kamenu možete izračunati iz ovih podataka? Gustoća vode je 1000 kg/m^3 . Koristi $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Rješenje. Voda djeluje uzgonom na kamen pa prema trećem Newtonovom zakonu kamen djeluje silom jednakoga iznosa i suprotnoga smjera na vodu. Taj dodatni “protuuzgon” čini razliku $\Delta F = 5 \text{ N}$ između dvaju mjerenja vagom te je jednak

$$\Delta F = \rho g V,$$

uz ρ kao gustoću vode, a V kao volumen kamena. Iz zadanih podataka možemo izračunati volumen kamena:

$$V = \frac{\Delta F}{\rho g} = 0.5 \text{ dm}^3.$$

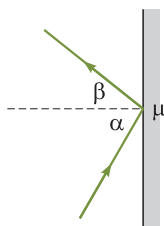
Vagom možemo mjeriti volumen tijela!

Duje Dodig (4),

Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

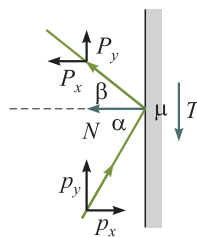
Za razmišljanje. Kako vaga (ili dno čaše) “zna” za uronjeno tijelo ako ono ne dotiče dno? To jest, kako se protusila uzgona prenosi na dno čaše, s obzirom da voda nije kruta pa se bez problema “izmiče” tijelu? Što bi bilo da se uranjanjem tijela voda prelijeva preko ruba čaše (i slije se s vage)?

1857. Tijelo nalijeće na podlogu pod kutom 60° s obzirom na njezinu okomicu i odbija se od nje. Odboj je elastičan u smjeru okomitom na podlogu (komponenta količine gibanja okomita na podlogu ne mijenja iznos nakon odboja). Ako je koeficijent trenja između tijela i podloge jednak 0.5, koliki je kut odboja tijela s obzirom na okomicu podloge?



Uputa. Sjetite se impulsa sile i njegova učinaka na količinu gibanja. Pretpostavite da tijekom kratkog vremena odboja djeluje dinamičko trenje kako biste silu trenja mogli povezati s koeficijentom trenja.

Rješenje. Nisu nam poznati detalji sile koja djeluje na tijelo tijekom odboja, stoga moramo promatrati komponente količine gibanja kao “konačne rezultate” procesa. Rastavimo početnu količinu gibanja (prije odboja) na p_x komponentu okomitu na podlogu, i p_y komponentu paralelnu s podlogom. N je reakcija podloge koja djeluje na tijelo; okomita je na podlogu i u suprotnome smjeru od p_x komponente. $T = \mu N$ je trenje koje djeluje na tijelo; paralelno je s podlogom i u suprotnome smjeru od p_y komponente.



Sile djeluju tijekom vremenskog intervala Δt pa su njihovi impulsi sila $N\Delta t$ i $T\Delta t$. (Kad bi sile zamjetno varirale tijekom Δt , tad bismo N i T mogli smatrati *prosječnim* silama tijekom Δt . Veza između T i N je *linearna* pa bi i dalje vrijedio odnos $T = \mu N$ između njihovih prosjeka.) Impuls sile uzrokuje promjenu količine gibanja pa su komponente P_x i P_y nakon odboja jednake:

$$P_x = p_x - N\Delta t,$$

$$P_y = p_y - T\Delta t.$$

Elastičnost u x -smjeru znači $P_x = -p_x$ pa:

$$N\Delta t = 2p_x.$$

Sada za P_y imamo:

$$P_y = p_y - \mu N\Delta t = p_y - 2\mu p_x.$$

Uz α kao kut prije odboja, a β kao kut nakon odboja, geometrijski prepoznamo da je $\tan \alpha = p_y/p_x$ te $\tan \beta = -P_y/P_x$ (minus jer P_x promjenom smjera mijenja predznak, a β želimo

smatrati pozitivnim). Stoga:

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{P_y}{P_x} = -\frac{p_y - 2\mu p_x}{-p_x} = \frac{p_y}{p_x} - 2\mu,$$

odnosno:

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha - 2\mu.$$

Uvrštavanjem brojeva nalazimo $\operatorname{tg} \beta = \sqrt{3} - 1$, odnosno $\beta = 36.2^\circ$.

Ur.

1858. Vrijeme poluživota slobodnog neutrona iznosi 10.2 minute u sustavu u kojem je njegova ukupna relativistička energija jednaka njegovoj energiji mirovanja. Koliko je njegovo vrijeme poluživota u sustavu u kojem je njegova kinetička energija jednaka njegovoj energiji mirovanja?

Rješenje. Ukupna energija E dana je zbrojem energije mirovanja $E_0 = mc^2$ i kinetičke energije E_k :

$$E = E_0 + E_k.$$

Stoga prvi slučaj odgovara sustavu mirovanja neutrona. U sustavu koji se giba brzinom v spram sustava mirovanja vrijeme života relativistički se produljuje:

$$T = \gamma T_0,$$

uz γ kao Lorentzov faktor, a T_0 kao vrijeme života u sustavu mirovanja. Faktor γ određujemo iz ukupne energije:

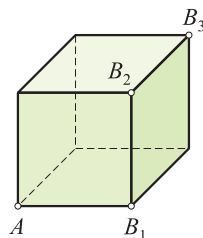
$$E = \gamma mc^2.$$

U sustavu gdje je $E_k = mc^2$, ukupna energija je $E = 2mc^2$, odnosno $\gamma = 2$. Odavde:

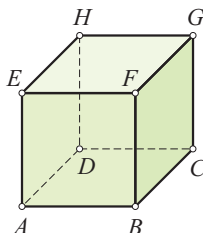
$$T = 2T_0 = 20.4 \text{ min.}$$

Franka Horvat (2),
X. gimnazija "Ivan Supek", Zagreb

1859. Od vodljivih žica istih otpornih svojstava sastavljen je "kostur" kocke kao na slici. Izvor istosmjernog napona spojen je preko točke A i jedne od točaka B_1 , B_2 , B_3 . U prvom slučaju napon od 12 V narinut je preko točke B_1 pa je elektronima koji vode struju potrebno određeno vrijeme kako bi prošli između točaka A i B_1 najkraćim putem kroz strujni krug. Koliki napon mora biti između točaka A i B_2 te između točaka A i B_3 da bi vrijeme prolaza elektrona najkraćim putem između tih parova točaka bilo jednako kao u prvom slučaju?



Rješenje. Označimo vrhove kocke s $A - H$. Nove oznake odgovaraju ranijima kao: $B = B_1$, $F = B_2$, $G = B_3$.



Pri određivanju vremena prolaska elektrona kroz otporne žice trebat će nam poznata relacija za istosmjernu struju $I = S \nu en$, uz brzinu elektrona v kao bitan parametar. Članovi S i n isti su za sve bridove kocke te svi bridovi predstavljaju otpornike jednog te istog otpora R . Uz duljinu brida L , brzina prolaska v_i kroz i -ti brid jednaka je $v_i = L/t_i$, uz t_i kao vrijeme prolaska kroz isti brid. Odavde je pripadna struja I_i :

$$I_i = \frac{S L e n}{t_i} = \frac{V_i}{R},$$

gdje smo je odmah povezali s naponom V_i na istome bridu. U prvom slučaju između točaka A i B_1 narinut je napon $V_1 = 12 \text{ V}$. Najkraći put elektrona prolazi samo jednim bridom pa je vrijeme T_1 najkraćeg prolaska određeno strujom kroz taj brid, odakle:

$$T_1 = \frac{S L R e n}{V_1}.$$

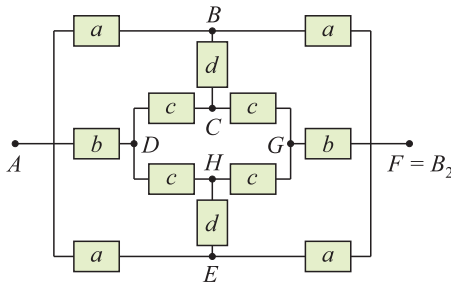
U ostalim slučajevima (označimo ih s k) najkraći put između A i B_k prolaziti će kroz više bridova i pa je vrijeme prolaska T_k :

$$T_k = \sum_i t_i = S L e n \sum_i \frac{1}{I_i},$$

gdje suma ide po relevantnim bridovima. Zadatak zahtijeva da minimalno vrijeme prolaska elektrona u svim slučajevima bude jednako: $T_1 =$

$T_2 = T_3$. Stoga moramo odrediti struje I_i kroz bridove koji razapinju najkraći put između točaka A i B_k .

Iako nije neophodno, identificirat ćemo 2D ekvivalentnu shemu strujnog kruga jer ćemo se po njoj lakše snalaziti nego po 3D kosturu kocke. Za napon V_2 između točaka A i $F = B_2$ shema je na slici.



Otpornici predstavljaju otporne bridove kocke, a mala slova oznake struja i napona na pojedinom bridu (npr. I_a i V_a). Iz simetrije sheme jasno je da na nekim bridovima struje moraju biti iste, što se vidi na slici. Najkraći put između A i B_2 prolazi kroz dva a -brida pa Kirchhoffovim pravilima moramo odrediti struju I_a . Dovoljna nam je jedna naponska jednažba:

$$2V_a = V_2 \implies I_a = \frac{V_2}{2R},$$

koja je odmah dala rješenje za I_a . Uvrštavanjem u izraz za T_2 imamo:

$$T_2 = SLen \cdot \frac{2}{I_a} = \frac{4SLRen}{V_2}$$

pa iz zahtjeva $T_2 = T_1$ slijedi:

$$\frac{4SLRen}{V_2} = \frac{SLRen}{V_1} \implies V_2 = 4V_1 = 48 \text{ V.}$$

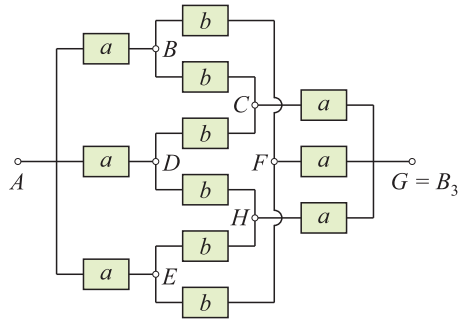
Za napon V_3 između A i $G = B_3$ shema je također prikazana na slici. Iz simetrije je opet očito na kojim bridovima struje moraju biti jednake. Najkraći put između A i B_3 prolazi dvama a -bridovima i jednim b -bridom pa nam trebaju struje I_a i I_b . Dovoljna nam je jedna na-

ponska jednažba:

$$2V_a + V_b = V_3 \implies 2I_a + I_b = \frac{V_3}{R}$$

i jedna strujna:

$$I_a = 2I_b.$$



Rješenja ovih dviju jednažbi su:

$$I_a = \frac{2V_3}{5R} \quad \text{ i } \quad I_b = \frac{V_3}{5R}.$$

Za vrijeme T_3 slijedi:

$$T_3 = SLen \left(\frac{2}{I_a} + \frac{1}{I_b} \right) = \frac{10SLRen}{V_3},$$

pa zathjev $T_3 = T_1$ konačno daje:

$$\frac{10SLRen}{V_3} = \frac{SLRen}{V_1} \implies V_3 = 10V_1 = 120 \text{ V.}$$

Ur.

1860. Mirujuća loptica s visine od 10 m je puštena da slobodno pada prema tjemenu sabbirnog sfernog zrcala polumjera zakrivljenosti 4 m. Nakon koliko vremena će se loptica susresti sa svojom realnom slikom?

Rješenje. Za lopticu na udaljenosti a od tjemena zrcala polumjera R , udaljenost b njezine slike od istog tjemena dana je s:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R}.$$

Loptica i slika se susreću kad $a(t) = b(t)$ pa:

$$\frac{2}{a(t)} = \frac{2}{R} \implies a(t) = R.$$

Do trenutka t loptica od početne visine a_0 prijeđe put $s = a_0 - a(t) = 6$ m jednoliko ubrzanim padom. Iz $s = gt^2/2$ slijedi:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = 1.1 \text{ s.}$$

Franka Horvat (2), Zagreb