



Školsko natjecanje iz matematike, 14. veljače 2025. g.

Zadatci za A varijantu

I. razred

1. Odredite sve dvoznamenkaste prirodne brojeve za koje vrijedi da su točno tri puta veći od umnoška svojih znamenaka.

2. Neka su a i b pozitivni realni brojevi koji zadovoljavaju sljedeće uvjete:

$$a^2 + b^2 = 10 \quad \text{i} \quad a^4 + b^4 = 82.$$

Odredite vrijednost izraza $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}$.

3. Dokažite da je broj $2030^{12} - 2020^{12}$ djeljiv s brojem 2025.

4. Jedan kut pravokutnog trokuta ABC iznosi 30° , a kraća kateta duljine je 3 cm. U polovištu S hipotenuze $\overline{AB}$ podignuta je okomica na hipotenuzu i njezino sjecište s duljom katetom označeno je s D . Odredi duljinu dužine $\overline{SD}$.

5. Odredite zadnju znamenku zbroja $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2025}$.

6. Koliko ima brojeva u skupu $S = \{1, 2, \dots, 300\}$ koji nisu djeljivi ni s jednim od brojeva 3, 5 i 7.

7. Lukin broj pratitelja na društvenoj mreži svake godine raste za 50, dok Markov broj pratitelja raste za 20. Trenutačno Luka ima tri puta više pratitelja nego što je Marko imao u trenutku kada je Lukin broj pratitelja bio jednak trenutačnom broju Markovih pratitelja. Pretpostavlja se da će Marko trebati 5 godina da dostigne trenutačan broj Lukinih pratitelja. Koliko pratitelja Luka i Marko imaju trenutačno?

II. razred

1. Odredite realan parametar m za koji je kvadrat razlike rješenja jednadžbe $x^2 + 2mx + m = 1$ najmanji te odredite najmanju pripadnu vrijednost.

2. Odredite sve $x \in \mathbb{R}$ za koje je funkcija $f, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{x^4 - 2x^2} + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 1}$$

rastuća.

3. Odredite sve one troznamenkaste prirodne brojeve koji su jednaki zbroju svoje znamenke stotice, kvadrata znamenke desetice i kuba znamenke jedinice.

4. Ako su korijeni jednadžbe $x^2 + 2x + c = 0$ međusobno različiti realni brojevi, za neki realan parametar c , dokažite da tada korijeni jednažbe

$$(1 + c)(x^2 + 2x + c) - 2(c - 1)(x^2 + 1) = 0$$

ne mogu biti realni.

5. Ako je $\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}} = a$ koliko je $(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})^3$?

6. Neka je trokut ABC proizvoljni pravokutni trokut s pravim kutom pri vrhu C , katetama a i b te hipotenuom duljine c .

a) Dokažite da će u svakom pravokutnom trokutu zbroj duljina kateta umanjen za duljinu hipotenuze biti jednak duljini promjera tom trokutu upisane kružnice.

b) U kojem su omjeru duljine stranica pravokutnog trokuta ako se duljina polumjera tom trokutu opisane kružnice i duljina polumjera tom trokutu upisane kružnice odnose kao $5 : 2$?

7. Promatrajmo tablicu brojeva s 50 redaka i 50 stupaca, oblika

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,49} & a_{1,50} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,49} & a_{2,50} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{49,49} & a_{49,50} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{50,50} \end{bmatrix}$$

pri čemu oznaka $a_{i,j}$ označava broj koji se nalazi na i -tom retku i j -tom stupcu i pri čemu su brojevi $a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{50,50}$ iz skupa $S = \{2, 3, \dots, 22\}$. Odredite broj tablica navedenog oblika koje u svakom retku imaju točno jedan neparan broj.

(**Napomena.** Konačno rješenje može se napisati u obliku umnoška, bez dodatnog računanja.)

III. razred

1. Neka su a i b znamenke za koje vrijedi $\overline{aaa} + \overline{aab} + \overline{abb} + \overline{bbb} = 1503$. Koliko je tada $a^b + b^a$?

2. Ako je $\cos \alpha = \operatorname{tg} \alpha$, koliko je $\frac{1}{\sin \alpha} + \cos^4 \alpha$?

3. Dan je valjak s visinom duljine 10 cm. Na obodima njegovih osnovki su točke A i B , takve da je $\overline{AB}$ paralelno s osi valjka. Spojimo li točke A i B najkraćom linijom koja jednom obilazi oko valjka po plaštu, njezina će duljina biti 15 cm. Kolika je duljina najkraće linije koja dva puta obilazi oko valjka i spaja točke A i B ?

4. Riješite jednadžbu $\log_{2x+7}(4 + 12x + 9x^2) + \log_{3x+2}(6x^2 + 25x + 14) = 4$ u skupu realnih brojeva.

5. Može li se broj

$$\sqrt{104\sqrt{6} + 468\sqrt{10} + 144\sqrt{15} + 2025}$$

zapisati u obliku $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{5}$ za neke prirodne brojeve a , b i c ?

6. Riješite jednadžbu $2^x = 3^y + 1$ u skupu cijelih brojeva.

7. Odredite sve moguće vrijednosti prostog broja $p \geq 5$ za koje postoji barem jedan par prirodnih brojeva (x, y) koji je rješenje jednadžbe

$$\frac{16}{x} + \frac{25}{y} = p.$$

IV. razred

1. Odredite zbroj koeficijenata uz sve neparne potencije od x u razvoju zbroja binoma

$$(x + \sqrt{x^3} - 1)^5 + (x - \sqrt{x^3} - 1)^5,$$

gdje je $x > 1$.

2. Neka je z kompleksan broj takav da vrijedi

$$z + z^{-1} = 1.$$

Odredite $z^{46} + z^{47} + z^{48} + z^{49} + z^{50}$.

3. Zadan je pravac s jednadžbom $y = \frac{5}{3}x + \frac{4}{5}$. Dokažite da je udaljenost svake točke s cjelobrojnim koordinatama do zadanog pravca veća od $\frac{1}{30}$.

4. Pronađite sve parove prirodnih brojeva (x, y) za koje vrijedi

$$x^2 + y^2 = 2025.$$

5. Zadan je niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ takav da je $a_0 = a$, $a_1 = b$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$, i

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Odredite $a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1}$.

6. Koliko ima tročlanih podskupova skupa $S = \{1, 2, 3, \dots, 50\}$ kojima je umnožak članova djeljiv s 4?

7. Sinusi unutarnjih kutova nekog pravokutnog trokuta čine aritmetički niz. U kojem su omjeru duljine stranica tog trokuta?

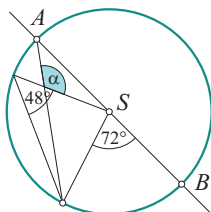
Zadaci za B varijantu

I. razred

1. Učenci jedne škole putovali su na školski izlet u zabavni park Mathland. Najpoznatije su atrakcije parka: adrenalinski vlak, kuća smijeha i vodeni tobogan. U sljedećoj tablici prikazano je koliki je udio učenika isprobao koju od navedenih atrakcija.

naziv atrakcije	udio učenika
adrenalinski vlak	82 %
kuća smijeha	78 %
vodeni tobogan	78 %
adrenalinski vlak i kuća smijeha	62 %
adrenalinski vlak i vodeni tobogan	66 %
kuća smijeha i vodeni tobogan	60 %

Sve tri kategorije atrakcija isprobalo je 25 učenika. Svi su učenici isprobali barem jednu atrakciju. Koliko je ukupno učenika putovalo na izlet u Mathland?

$\alpha?$ 

3. Izraz $\frac{90 : 45^{n-1} = 5^{n+1} : 5^n}{2025^{n-1}}$ pojednostavite do kraja.

4. Riješite jednađžbu $\frac{2x+2}{2023} - \frac{x+2}{1012} = \frac{2x+6}{2025} - \frac{x}{1011}$.

5. Odredite četveroznamenkasti broj koji zadovoljava sljedeće uvjete:

- Znamenka jedinica toga broja 4 puta je veća od znamenke tisućica.
- Znamenka desetica toga broja za 6 je veća od znamenke stotica.
- Zbroj znamenki toga broja djeljiv je s 5.
- Ako taj broj uvećamo za 2025, rezultat je broj koji je djeljiv s 3.

6. Tri se kružnice k_1 , k_2 i k_3 međusobno dodiruju izvana. Polumjer kružnica k_1 i k_2 iznosi 8 cm, a polumjer kružnice k_3 je 9 cm. Središta kružnica k_1 , k_2 i k_3 vrhovi su trokuta. Je li težište toga trokuta udaljenije od središta tome trokutu opisane kružnice ili od središta tom trokutu upisane kružnice i za koliko.

7. Lorna se s prijateljicama zabavlja pogađanjem brojeva. Svaka od pet Lorinih prijateljica zapisala je na papir jedan prirodni broj. Od tih pet brojeva izabrale su četiri i zbrojile ih. Nakon toga popisale su sve moguće takve izbore po četiri broja i izračunale njihove zbrojeve. Otkrile su Lorni da takvim zbrajanjem uvijek dobiju broj 38, 52 ili 57. Koje su brojeve zapisale Lorine prijateljice?

II. razred

1. Riješite kvadratnu jednadžbu $(a-1)x^2+ax+\frac{a+1}{4}=0$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Odredite realni broj a tako da je barem jedno rješenje navedene kvadratne jednadžbe pozitivan realan broj.

2. Zadan je pravokutnik $ABCD$ i točka M unutar njega. Ako vrijedi $|AM| = 40$, $|BM| = 4$ i $|CM| = 21$ izračunajte duljinu dužine $\overline{DM}$.

3. Zadana je funkcija f sa svojstvom $f(3n) = n \cdot f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, takva da je $f(1) = 1$. Iračunajte $f(243)$.

4. Dokažite de jednačba $3x^2 - 5xy - 2y^2 = 11$ nema rješenja u skupu cijelih brojeva.

5. Domagoj je na kreditnoj kartici imao iznos koji je pokazivao x eura i y centi. U trgovini je potrošio točno polovinu novca. Nakon kupovine iznos na kreditnoj kartici koji se odnosi na cente bio je jednak iznosu koji se odnosi na eure prije kupovine, dok je iznos koji se odnosi na eure bio jednak polovici iznosa koji se odnosi na cente prije kupovine. Koji je iznos novca Domagoj imao na kreditnoj kartici pri ulasku u trgovinu?

6. Izračunaj zbroj $\frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \dots + \frac{1}{9800}$.

7. Dokažite da je $(5 + \sqrt{21}) \cdot (\sqrt{14} - \sqrt{6}) \cdot \sqrt{5} - \sqrt{21}$ cijeli broj.

III. razred

1. Kolika je vrijednost izraza

$$\cos(2025^{\frac{\log_3 12 + \log_4 12}{\log_3 12 \cdot \log_4 12}} \cdot \pi)?$$

2. Odredite sve vrijednosti realnog parametra a tako da jednačina

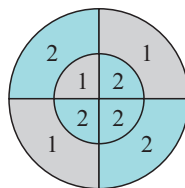
$$4^x - (a+3)2^x + 4(a-1) = 0$$

ima tačno jedno realno rješenje.

3. Jednakokrani trokut rotira oko osnovice duljine a . Ako je duljina visine na osnovicu dvostruko veća od duljine visine na krak, koliko je oplošje nastalog rotacijskog tijela?

4. Poznato je da su $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$ rješenja kvadratne jednačine $3x^2 - x + p = 0$, $p \in \mathbb{R}$ te vrijedi još i $\sin^2 \beta + 2 \cos^2 \beta + p = \frac{5}{12}$. Odredite β ako je $0^\circ \leq \beta \leq 180^\circ$.

5. Antina je omiljena igra pikado, no ovaj je put umjesto tradicionalne ploče odlučio koristiti metu sa skice. Polumjer unutrašnjeg kruga dvostruko je manji od polumjera vanjskoga, a istaknuti promjeri međusobno su okomiti. Kolika je vjerojatnost da zbroj bodova koje Ante ostvari u dva bacanja strelice bude paran?



6. Odredite skup svih vrijednosti koje funkcija

$$f(x) = (\log_3 x)^4 + 16(\log_3 x)^2 \cdot \log_3 \frac{81}{x}$$

poprima na intervalu $[1, 3^8]$. Za koje x iz tog intervala funkcija postiže najveću vrijednost?

7. Duljine stranica trokuta ABC su $|AB| = 24$ cm, $|AC| = 32$ cm i $|BC| = 40$ cm. Na stranici $\overline{BC}$ odabrane su točke D i E tako da je $|BD| = 8$ cm i $|CE| = 16$ cm. Kolika je mjera kuta $\angle DAE$?

IV. razred

1. Izračunajte zbroj rješenja jednačine $\sin x + \cos x + |\sin x - \cos x| = 1$, za $x \in [0, 2\pi]$.

2. Odredite duljinu tetive koju kružnica $(x+4)^2 + (y-3)^2 = r^2$ odsijeca na osi ordinata, ako je poznato da je duljina tetive koju odsijeca na osi apscisa jednaka 6 jediničnih dužina.

3. Odredite sve kompleksne brojeve za koje vrijedi $\bar{z}i = z^2$.

4. Zadani su nizovi za koje vrijedi $a_1 = b_1 = 25$ i $b_n = a_n - a_{n-1} = 3n + 22$, $n > 1$. Izračunajte a_{200} i b_{200} .

5. Dva uspravna stošca imaju zajedničku os, a baze tih stožaca su koncentrični krugovi u istoj ravnini. Polumjer baze višeg stošca, kojemu je visina dva puta dulja od visine nižeg stošca, dva puta je kraći od polumjera baze nižeg stošca. Izračunajte duljinu kružnice koja je sjecište plaštova ovih dvaju stožaca, ako je dana duljina R polumjera baze nižeg stošca.

6. Odredite sve parove prirodnih brojeva x i y za koje vrijedi $x! + 3 = y^2$.

7. Izračunajte vrijednost x u izrazu

$$\left((\sqrt{x})^{\frac{1}{\log x + 3}} + \sqrt[12]{x} \right)^n$$

razvoja binoma čiji je četvrti član jednak 200, a umnožak trećeg i dvostrukog zadnjeg binomnog koeficijenta jednak je 30.

Agencija za odgoj i obrazovanje