

Zadatci za A varijantu

I. razred

1. Marija i Eva vozile su se istim putem iz grada A u grad C . Mariji je trebalo 96 minuta, a Evi 4 minute više. Točno na pola puta između gradova A i C nalazi se grad B . Marija je cijelim putem od A do C vozila istom brzinom, dok je Eva od grada A do grada B vozila 13 km/h sporije od Marije, a od grada B do grada C 13 km/h brže od Marije. Koliko su udaljeni gradovi A i C ?

2. Neka je D nožište visine iz vrha A u šiljastokutnome trokutu ABC . Točke E i F su redom nožišta okomica iz točke D na AB i AC , a točke G i H redom su nožišta okomica iz E i F na AD . Ako je $|AH| = |HG| = |GD| = 2$, odredi površinu trokuta ABC .

3. Odredi sve prirodne brojeve m i n , $m < n$, takve da je razlika umnoška prvih n prirodnih brojeva i umnoška prvih m prirodnih brojeva broj oblika 600^k pri čemu je k prirodan broj.

4. Odredi najveću moguću vrijednost koju može poprimiti izraz

$$\frac{a^2 + b^2 + ab - 4a - 2b + 7}{a^2 + b^2 - 4a + 6},$$

pri čemu su a i b realni brojevi.

5. Na ploču dimenzija 4×4 treba rasporediti određeni broj žetona tako da se na nekim poljima nalazi po jedan žeton, a neka su polja prazna. Za raspored žetona kažemo da je *siguran* ako se svaki žeton nalazi na polju kojemu su sva susjedna polja prazna (dva polja smatraju se susjednima ako imaju zajedničku stranicu). Za koji najmanji prirodan broj k postoji siguran raspored k žetona takav da se na ploču ne može dodati nijedan žeton, a da raspored i dalje bude siguran?

II. razred

1. Nad jednom stranicom pravokutnika kao promjerom nacrtan je polukrug. Uniju toga pravokutnika i polukruga nazivamo *prozorom*. Poznato je da je opseg prozora 4 m. Odredi promjer polukruga tako da površina prozora bude najveća moguća.

2. Odredi sve trojke realnih brojeva (x, y, z) koje zadovoljavaju sustav jednačbi

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - y} = z - 1 \\ \sqrt{y^2 - z} = x - 1 \\ \sqrt{z^2 - x} = y - 1. \end{cases}$$

3. Odredi sve parove prirodnih brojeva (a, b) takve da su rješenja jednačbe $x^2 - ax + b = 0$ dva različita prosta prirodna broja, a rješenja jednačbe $x^2 - bx + (5a - 5) = 0$ dva različita složena prirodna broja.

4. Dan je raznostraničan trokut ABC . Neka je P polovište dužine $\overline{AB}$. Okomica na pravac CP u točki P siječe pravce AC i BC redom u točkama X i Y , pri čemu je A između X i C te Y između B i C . Pretpostavimo da vrijedi $|AX| \cdot |AC| = |BY| \cdot |BC|$. Dokaži da je trokut ABC pravokutan.

5. Dana je ploča dimenzija 10×10 . U gornjem lijevom polju ploče nalazi se muha. Muha se može kretati na dva načina – *korakom* i *letom*. Korak je pomak na polje neposredno ispod ili desno od polja na kojem se trenutno nalazi. Letom muha prelazi sa zadnjeg (krajnjeg desnog) polja na prvo (krajnje lijevo) polje u istom retku ili sa zadnjeg (donjeg) polja na prvo (gornje) polje u istom stupcu. Koji je najmanji broj letova koje muha mora napraviti da bi posjetila svako polje ploče točno jednom?

III. razred

1. Odredi sve parove realnih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju

$$2 \cos^2 \left(\frac{x+2y}{4} \right) = 2^x + 2^{-x}.$$

2. Odredi najmanju vrijednost koju može poprimiti izraz

$$|8 \cdot 5^m - n^2|,$$

pri čemu su m i n prirodni brojevi.

3. Dokaži da za svaki prirodni broj n djeljiv s 4 vrijedi

$$\sin^2 \left(\frac{2\pi}{n} \right) + \sin^2 \left(2 \cdot \frac{2\pi}{n} \right) + \dots + \sin^2 \left((n-1) \cdot \frac{2\pi}{n} \right) + \sin^2 \left(n \cdot \frac{2\pi}{n} \right) = \frac{n}{2}.$$

4. Neka je ABC trokut s pravim kutom u vrhu C . Simetrale šiljastih kutova sijeku nasuprotne stranice u točkama M i N . Neka je P sjecište visine iz vrha C s dužinom $\overline{MN}$. Dokaži da je duljina $|CP|$ jednaka polumjeru upisane kružnice trokuta ABC .

5. U ravnini je dano osam točaka koje su vrhovi pravilnoga osmerokuta. Svake dvije točke spojene su dužinom. U svakome potezu odabiru se tri točke te se brišu tri dužine kojima su te točke krajnje. Koliki je najmanji mogući broj preostalih dužina u trenutku kad nije više moguće napraviti takav potez?

IV. razred

1. Dani su aritmetički niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i geometrijski niz $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ takvi da su im svi članovi pozitivni realni brojevi i da vrijedi

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad \text{i} \quad a_{10} = b_3.$$

Dokaži da se svaki član niza $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pojavljuje u nizu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Za koje realne brojeve a sustav

$$\begin{cases} (1+i) \cdot z + (1-i) \cdot \bar{z} = 2a \\ |z+1-i| = \sqrt{2} \end{cases}$$

ima točno jedno rješenje u skupu kompleksnih brojeva?

3. Odredi sve uređene parove prirodnih brojeva (m, n) za koje vrijedi

$$n \cdot 2^m + m = m \cdot 2^n + n.$$

4. Dan je šiljastokutan trokut ABC s ortocentrom H . Tangenta na opisanu kružnicu trokuta ABH u točki A siječe pravac CH u točki K , a tangenta na opisanu kružnicu trokuta AHC u točki A siječe pravac BH u točki L . Dokaži da točke B , C , K i L pripadaju istoj kružnici.

5. Za neparni prirodan broj $n > 1$ na ploči su napisani brojevi $n, n+1, \dots, 2n-1$. Dokaži da se s ploče može izbrisati jedan broj tako da zbroj preostalih brojeva na ploči ne bude djeljiv nijednim od preostalih brojeva na ploči.

Zadaci za B varijantu

I. razred

1. Ako za realne brojeve a i b vrijedi $a + b = 9$ i $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{3}{4}$, izračunaj $\frac{a^4 - b^4}{a^6 - b^6}$.
2. Odredi sve vrijednosti realnoga parametra p tako da jednačbe

$$\frac{x-1}{x^2+2x} + \frac{x+3}{4-x^2} = \frac{4x^2+2}{x^3-4x} - \frac{x}{2x-x^2}$$

i

$$(x+p)^2 + (x-p)^2 = 2(x-0.5p)(x+0.5p) - \frac{1}{x} \cdot p$$

imaju isti skup rješenja.

3. Koliko ima troznamenkastih brojeva koji pri dijeljenju s četiri daju ostatak dva, a pri dijeljenju s tri daju ostatak jedan?

4. U pravokutnome trokutu ABC s pravim kutom u vrhu C i hipotenuzom duljine 8 cm mjera unutarnjega kuta u vrhu B dvostruko je veća od mjere unutarnjega kuta u vrhu A . Izvan toga trokuta konstruirani su jednakostranični trokuti ACD i BEC . Koliko iznosi površina četverokuta $ABED$?

5. Na školskome je natjecanju iz matematike u prvome razredu sudjelovalo 7 učenika, među kojima su Ana, Dino, Jakov, Katja i Toni. Budući da je ljestvica poretka objavljena sa zaporkama, njihovi se prijatelji iz razreda zabavljaju pogađati koja su mjesta ostvarili Ana, Dino, Jakov, Katja i Toni. Pri tome su im poznati sljedeći podatci:

- nije bilo učenika s istim brojem bodova
- Tonijev je rang paran broj
- Dino je ispred Ane.

Na koliko načina prijatelji mogu dodijeliti rang Ani, Dinu, Jakovu, Katji i Toniju?

II. razred

1. Odredi sve realne brojeve x za koje vrijedi:

$$\frac{x^9}{7} + \frac{1}{7} = \frac{x^6}{3} + \frac{x^3}{3}.$$

2. Duljine kateta pravokutnoga trokuta odnose se kao $1 : \sqrt{2}$. Odredi kosinus manjega kuta koji zatvaraju težišnice povučene na katete tog trokuta.

3. Odredi sve različite racionalne brojeve $\frac{\overline{ab}}{10}$ i $\frac{\overline{cd}}{10}$ za koje vrijedi $\left(\frac{\overline{ab}}{10}\right)^2 + \left(\frac{\overline{cd}}{10}\right)^2 = \frac{\overline{ab}}{10} + \frac{\overline{cd}}{10}$, pri čemu su a, b, c, d znamenke i $b \neq 0, d \neq 0$.

4. Zadan je pravokutan trapez $ABCD$ s pravim kutovima pri vrhovima A i D . Duljine su osnovica trapeza $|AB| = 9$ cm i $|CD| = 4$ cm. Kružnica s promjerom $\overline{AD}$ dodiruje krak $\overline{BC}$. Kolika je površina trapeza?

5. U pravokutniku $ABCD$ na stranici $\overline{AB}$ označeno je n točaka, a na svakoj od stranica $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$ po pet točaka. Ukupan broj svih trokuta kojima su vrhovi određeni označenim točkama iznosi 2150. Odredi broj n ako vrhovi pravokutnika nisu među označenim točkama.

III. razred

1. Koji je najveći četveroznamenasti prirodni broj koji se može zapisati koristeći sve znamenke brojeva A , B , C ako je

$$A = \sqrt[4]{5 \sqrt[3]{2025}} \cdot \sqrt[3]{3 \sqrt[4]{2025}} \cdot \sqrt[3]{5 \sqrt[4]{5}}, \quad B = \log \left(\frac{2\sqrt{\log_2 2025}}{2025\sqrt{\log_{2025} 2}} \right),$$

$$C = 2025^{\log(\sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ)}.$$

2. Odredi zbroj rješenja jednadžbe $(2 + \sqrt{3})^{\cos x} + (2 - \sqrt{3})^{\cos x} = 4$ na intervalu $\langle -3\pi, 3\pi \rangle$.

3. Odredi sve uređene parove prirodnih brojeva m i n za koje je temeljni period funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left| 3 \cdot \sin \frac{x}{m^2} \right| - 5 \cdot \cos \frac{2x}{n^2}$ jednak 2025π .

4. Neka je $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ pravilna uspravna šesterostrana prizma u kojoj je točka P polovište brida $\overline{AB}$, a točka R polovište brida $\overline{EF}$. U kojemu su omjeru obujam piramide $DRPE'$ i obujam zadane prizme?

5. Martin je na rasprodaji potrošio 972 EUR kupivši ukupno 42 videoigre za svoju tek otvorenu igraonicu videoigara na igračim konzolama 1 i 2. Sve su videoigre za igraču konzolu 1 imale identičnu cijenu, koja je izražena u eurima prirodni broj. Videoigre za igraču konzolu 2 prodavale su se po 6 EUR nižoj cijeni od cijene videoigara za igraču konzolu 1. Koliko je videoigara za igraču konzolu 1 mogao kupiti Martin i po kojoj cijeni ako se zna da je kupio više videoigara za igraču konzolu 2?

IV. razred

1. Koliko ima kompleksnih brojeva z kojima su realni i imaginarni dio cijeli brojevi i za koje vrijedi

$$\operatorname{Im}(z^2 + 1) \geq 2(\operatorname{Im} z)^2$$

$$|z - i| < 3?$$

2. Odredi koordinate središta i polumjer kružnice koja dira os x , pravac s jednadžbom $y = \sqrt{3}x$ i kružnicu s jednadžbom $(x - 10\sqrt{3})^2 + (y - 10)^2 = 25$.

3. Brojevi $a_1, a_2, a_3, \dots$ čine aritmetički niz, pri čemu je $a_1 \neq a_2$. Tri člana istoga niza, a_2, a_5 i a_9 , čine geometrijski niz tim redoslijedom. Odredi najmanje moguće pozitivne cijele brojeve k i l za koje i brojevi a_3, a_k, a_l također čine geometrijski niz tim redoslijedom.

4. Na skupu realnih brojeva definirana je funkcija

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + 2x + 1} + \sqrt[3]{x^2 - 1} + \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1}}$$

Odredi $f(1) + f(2) + \dots + f(2025)$.

5. Riješi jednadžbu $x^7 + 1 = (x + 1)^7$ u skupu kompleksnih brojeva.

Matko Ljulj