

Kauzalna analiza u ekonometriji primjenom Hilbertovog prostora reproducirajućih jezgri

ŽELIMIR KURTANJEK^{1,*}

¹ Prehrambeno–biotehnološki fakultet Sveučilišta u Zagrebu
Zagreb, Hrvatska [✉](mailto:zelimir.kurtanje@zgk.hr)

SAŽETAK

Predložen je postupak određivanja nelinearne uzročne povezanosti dviju varijabli njihovim mapiranjem u Hilbertov prostor reproducirajućih jezgri RKHS (engl. *Reproducible Kernel Hilbert Space*). Analiza bivarijabilnih zavisnosti dio je razvoja kauzalnih modela umjetne inteligencije sa svrhom upravljanja složenim sustavima. Poznavanje kauzalnosti su ključne informacije na kojima se temelji dijagnostika, predviđanje posljedica i donošenje poslovnih odluka. Određivanje kauzalne relacije varijabli vrši se procjenom empirijske gustoće vjerojatnosti KDE (engl. *Kernel Density Estimation*) u RKHS prostoru. Procjena smjera kauzalne veze provodi se Nadaraya–Watson aproksimacijom i usporedbom Pearsonove korelacije varijabli X i Y i modela u RKHS prostoru, $X_{\mathcal{H}}(Y)$ i $Y_{\mathcal{H}}(X)$. Predloženi postupak testiran je na nizu primjera: model neurona, simulacijom složenih bivarijabilnih modela s heteroskedastičnim poremećajima, na poznatim podacima sa Sveučilišta u Tübingenu, marketinškim "Datarium" podacima učinka društvenih mreža, i zavisnosti burzovnih indeksa S&P500 i VIX. Također je provedena analiza strukture kauzalne povezanosti rodnog jaza osobnih dohodaka na podacima američke informatičke tvrtke. Neutvrđenost smjera kauzalne veze indicirana je preklapanjem intervala pouzdanosti Pearsonovih korelacija. Za linearne sustave zbog simetričnosti uvjetovanih distribucija u oba smjera, predloženom metodom smjer kauzalne veze nije moguće jednoznačno odrediti.

KLJUČNE RIJEČI

kauzalnost, RKHS, Hilbertov prostor, jezgre, Bayesova kauzalna mreža

VRSTA ČLANKA

Izvorni znanstveni članak

INFORMACIJE O ČLANKU

Primljeno: 11. ožujka 2025.

Prihvaćeno: 10. svibnja 2025.

DOI: 10.62366/crebss.2025.1.005

JEL: C18, C29, C49

1. Uvod

Zaključivanje o uzročno posljedičnim vezama među varijablama temeljem opaženih ili empirijskih podataka je osnovni cilj istraživanja u složenim sustavima (ekonomija, ekologija, sociologija, medicina). U praksi se najčešće pojavljuje problem prividne ili pogrešne linearne zavisnosti kada su varijable zapravo nelinearno povezane, što za posljedicu ima i nemogućnost utvrđivanja smjera uzročnosti među varijablama, osobito kada su nepoznate njihove distribucije vjerojatnosti. Iako se uzročno posljedični odnosi definiraju i argumentiraju na

*Dopisni autor

temelju ekonomske teorije, te se testiraju statističkim ili ekonometrijskim postupcima, u empirijskim istraživanjima nedovoljno je zastupljen postupak testiranja uzročnosti u uvjetima kada je funkcionalni odnos nelinearan i nepoznat. U ekonomskim i financijskim sustavima raspoloživost kvantitativnih podataka je velika, ali zbog velike složenosti poznatih i nepoznatih endogenih interakcija i egzogenih utjecaja, modeliranje i upravljanje računalnim (algoritamskim) modelima u ekonomiji je podložno nepouzdanosti te imaju relativno ograničenu primjenu u praksi. Najčešća sintagma kojom se opisuje problem modeliranja uzročne povezanosti je "korelacija nije kauzalnost". Pogrešna pretpostavka o istovjetnosti korelacije podataka s kauzalnošću je glavni razlog mogućim pogrešnim modelima i odlukama. Razlog su nepoznate, pristrane i pogrešne procjene strukture i parametara modela zbog brojnih interferirajućih utjecaja i prividnih povezanosti zbog nepoznavanja funkcionalnih kauzalnih veza (Bareinboim i Hünermund, 2023). Ističu se dva osnovna pristupa analize kauzalnosti koji se temelje na statističkom pristupu i računalnoj znanosti (Heckaman i Pinto, 2023). Prvi statistički pristup kauzalnosti zasniva se na statistici potencijalnih učinaka (Imbens i Rubin, 2010; Robin, 2005). Procjenu potencijalnih učinaka moguće je statistički procijeniti metodom usklađivanja podataka, prilagođenom regresijom, inverznim težinskim koeficijentima, ili uporabom instrumentalnih varijabli. Drugi pristup zasniva se na određivanju povezanosti strukturne kauzalne mreže (Pearl, 2009). Struktura povezanosti kauzalnih učinaka prikazuje se kao usmjereni graf s vezama procijenjenih uvjetnim distribucijama.

Za razliku od statističkih pristupa kauzalnosti u ekonometriji, primjena umjetne inteligencije (AI) temelji se na velikom broju podataka i metodama učenja u otkrivanju uzoraka ponašanja u nelinearnim višedimenzionalnim sustavima bez prethodnih pretpostavki o razdiobama gustoće vjerojatnosti i aditivnosti stohastičkih egzogenih utjecaja. U ovom radu predložen je postupak analize bivarijabilne kauzalnosti primjenom Kolmogorove konjunktive temeljem relacije između kompleksnosti i kauzalnosti preslikavanjem podataka u Hilbertov prostoru reproducirajućih jezgri (RKHS).

2. Teorijski okvir kauzalnosti u RKHS Hilbertovom prostoru

Statistička analiza i modeliranje u znanstvenim područjima, kao što su ekonometrija i kvantitativna sociologija zasniva se na podacima s nestandardnim, i često nepoznatim, razdiobama gustoće vjerojatnosti. Također, podaci su međusobno na strukturno složeni način nelinearno povezani, i za koje u načelu nisu poznati matematički oblici zavisnosti. Kada se na takove podatke primjene statističkih model sa pretpostavljenim razdiobama i funkcionalnih zavisnosti (linearne, polinomne, itd.) rezultati analize i modeliranja su vrlo često pristrani i/ili pogrešni. Preslikavanjem podataka X u Hilbertov prostor \mathcal{H} beskonačne dimenzije primjenom vlastitih funkcija $\phi(X)$, $\phi \in \mathcal{H}$, omogućena je primjena statistike i modeliranja bez neopravdanih i često pogrešnih pretpostavki (Mitrović i sur., 2018; Hastie i sur., 2017; Vinod, 2020). Posebno su numerički učinkoviti postupci analize i modeliranja izborom Hilbertovog prostora definiranog jezgrom $k : X \times X \rightarrow R$ koja omogućuje reprodukciju skalarnog produkta u prostoru \mathcal{H} jednostavnom primjenom relacije $\langle (x_1), (x_2) \rangle = k_X(x_1, x_2)$ (Buljan, 2021). Temeljem svojstva reprodukcije skalarnog produkta, ovi prostori se nazivaju Hilbertovi prostori reproducirajućih jezgri RKHS (engl. *Reproducing Kernel Hilbert Space*). Određivanje funkcije cilja $f(x) \in \mathcal{H}$ pri modeliranju i strojnom učenju u RKHS prostoru zasniva se na svojstvu reprezentiranosti (engl. *representer theorem*) funkcije linearnom kombinacijom jezgri funkcija $k_X(x, \cdot)$ određenih eksperimentalnim podacima x_i

$$f(x)_{\mathcal{H}} = \langle f, k_X(x, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall f \in \mathcal{H}, \forall x \in X \quad (1)$$

Procjena razdiobe gustoće vjerojatnosti $P(X)$ u RKHS prostoru je funkcija $KDE(x)$ (engl. *Kernel Density Estimation*) određena sumom N Gaussovih jezgri

$$P(X) \approx KDE(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_X(x_i, x) \quad (2)$$

Izborom parametra pojasne širine h Gaussove jezgre određena je "glatkost" interpolacije koji se procjenjuje unakrsnom provjerom valjanosti (engl. *cross-validation*). Izborom malih h vrijednosti postiže se interpolacija koja ima mala odstupanja od eksperimentalnih podataka, ali je podložna utjecaju slučajnih eksperimentalnih pogrešaka.

$$k_X(x_i, x_j) = \exp\left(-\frac{\|x_i - x_j\|^2}{h^2}\right) \quad (3)$$

Primjenom Bayesovog teorema, uvjetna distribucija gustoće vjerojatnosti $P(Y|X)$ određena je omjerom združene i marginalne distribucije

$$P(Y|X) = \frac{P(X, Y)}{P(X)} \quad (4)$$

koje se aproksimiraju pripadajućom funkcijom (2), i izrazom za $KDE(x, y)$

$$P(X, Y) \approx KDE(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_X(x_i, x) k_Y(y_i, y) \quad (5)$$

određene su KDE aproksimacije uvjetnih distribucija gustoća vjerojatnosti

$$P(Y|X) \approx KDE(y|x) = \frac{\sum_{i=1}^N k_X(x_i, x) k_Y(y_i, y)}{\sum_{i=1}^N k_X(x_i, x)} \quad (6)$$

$$P(X|Y) \approx KDE(x|y) = \frac{\sum_{i=1}^N k_X(x_i, x) k_Y(y_i, y)}{\sum_{i=1}^N k_Y(y_i, y)}$$

Matematički model $y(x)$ funkcionalne zavisnosti dviju slučajnih varijabli X i Y određen je matematičkim očekivanjem uvjetne distribucije

$$y(x) = E(Y|X = x) = \int y \frac{P(x, y)}{P(x)} dy \quad (7)$$

Primjena KDE aproksimacija u izrazu (7) i integracija određuju modele pretpostavljene kauzalne zavisnosti $X \rightarrow Y : y_{\mathcal{H}}(x)$ i $Y \rightarrow X : x_{\mathcal{H}}(y)$

$$\begin{aligned}
y(x) \approx y_{\mathcal{H}}(x) &= \frac{\sum_{i=1}^N k_X(x_i - x)y_i}{\sum_{i=1}^N k_X(x_i - x)} \\
x(y) \approx x_{\mathcal{H}}(y) &= \frac{\sum_{i=1}^N k_Y(y_i - y)x_i}{\sum_{i=1}^N k_Y(y_i - y)}
\end{aligned} \tag{8}$$

Pretpostavljena funkcionalna zavisnost testira se primjenom HSIC kriterija nezavisnosti (engl. *Hilbert–Schmidt Independence Criteria*) varijabli Y , X u RKHS prostoru i koeficijentom korelacije $r_{\mathcal{H}}(X, Y)$. Za razliku od Pearsonove korelacije, područje vrijednosti korelacije u Hilbertovom prostoru je $r_{\mathcal{H}} \in [0, 1]$, 0 za nezavisnost i 1 za potpunu zavisnost (idealnu korelaciju) X i Y

$$HSIC(X, Y) = \|C_{X,Y}\|_{\mathcal{H}}^2 \approx \frac{1}{(N-1)^2} tr(K_x H K_y H) \tag{9}$$

$$r_{\mathcal{H}}(X, Y) = \frac{HSIC(X, Y)}{\sqrt{HSIC(X, X)} \sqrt{HSIC(Y, Y)}} \tag{10}$$

pri čemu je C matrica unakrsne korelacije X i Y , K_x i K_y su Gramove matrice vrijednosti skalarnih produkata jezgri,

$$K_x[i, j] = k_x(x_i, x_j) \quad K_y[i, j] = k_y(x_i, x_j) \tag{11}$$

H je matrica za standardizaciju podataka, a tr je trag matrice. Osim određivanja signifikantnosti funkcionalne povezanosti $y = f(x)$, ključni cilj svakog znanstvenog istraživanja je odrediti smjer kauzalne povezanosti, na primjer u ekonometriji odgovoriti na pitanje da li je promjena cijene proizvoda X uzrok promjene prodaje $Y(X)$, ili je promjena prodaje uzrok promjene cijene proizvoda $X(Y)$. Za određivanje smjera kauzalnosti primjenom kvantitativnih podataka moguće je primijeniti Kolmogorov koncept mjere algoritamske kompleksnosti (Mitrović i sur., 2018; Allen i McAleer, 2020; Kolmogorov, 1968). Temeljna pretpostavka je da model (algoritam) predikcije posljedice je jednostavniji (manje kompleksan) u usporedbi s modelom predikcije uzroka iz podataka posljedice. Jednostavnim riječima, "lakše i točnije" je objasniti (algoritmom i/ili modelom) posljedicu zavisno o uzroku, nego li objasniti uzrok posljedicom. U ovom radu se kao mjera kompleksnosti predlaže usporedba Pearsonove korelacije r predikcije RKHS modela i izvornih podataka. Ispituje se da li RKHS model $y_{\mathcal{H}}$ predikcije posljedice ima veći Pearsonov koeficijent korelacije varijable posljedice Y , u odnosu na model uzroka $x_{\mathcal{H}}$ odnosno ispituje se statistička značajnost relacije:

$$X \rightarrow Y \quad r(y, y_{\mathcal{H}}(x)) > r(x, x_{\mathcal{H}}(y)) \tag{12}$$

Doseg primjenljivosti odlučivanja temeljem bivarijabilne analize $y = f(x)$ u ekonometriji je ograničen istovremenim utjecajem više i/ili velikog broja endogenih i egzogenih faktora koji su međusobno funkcionalno povezani. Istovremeni utjecaj više faktora često ima za posljedicu paradoksalne zaključke. U ekonometriji mogući su primjeri pojave paradoksalnih

procjena, na primjer Berkensonov paradoks kao sustavna pogreška uzorkovanja populacije, i/ili Simpsonov paradoks kao promjena trenda zavisno o postupku stratifikacije podataka (Pearl, 2009). Ekonomski procesi su dinamički sustavi i vremenski nizovi ekonometrijskih podataka su kauzalno i asocijativno povezani. Za analizu asocijativne vremenske povezanosti modelom linearnih stacionarnih procesa uobičajeno se primjenjuje Grangerov model međusobne povezanosti predikcije vremenskih nizova. Grangerov model je bez analize eksplicitne kauzalnosti, a s time i nemogućnosti protu činjenične analize mogućih odluka (Shojale i Fox, 2022). Da se eliminiira utjecaj paradoksalnih procjena kao posljedica višestrukih utjecaja primjenjuje se Bayesova kauzalna mreža kao usmjereni aciklički graf DAG (engl. *Directed Acyclic Graph*). Određivanje strukture DAG mreže u ekonometriji je složeni problem i u ovom radu je dan primjer algoritma optimizacije BIC kriterija (engl. *Bayes Information Criteria*). BIC je određen ravnotežom vjerodostojnosti (engl. *likelihood*) podataka L i kompleksnosti modela kauzalne mreže. Bayesova kauzalna mreža BCN (engl. *Bayes Causal Network*) određena je skupom čvorova (varijabli X_i) i usmjerenih veza E_i , tj. $BCN = \{X, E\}$. Pretpostavkom da je ekonomski proces koji generira podatke Markovljev sustav, vjerodostojnost k -tog modela DAG_k mreže određena je produktom uvjetne vjerojatnosti pojedine varijable X_i određene pripadajućim varijablama "roditelja" $pa(X_i)$:

$$L(DAG_k) = \prod_{i=1}^N P(X_i | pa(X_i | DAG_k)) \quad (13)$$

Složenost modela pojedine k -te hipotetske BCN mreže određena brojem stupnjeva slobode N_p (broj poveznica E_i) i brojem uzoraka podataka N za učenje mreže. BIC kriterij dan je razlikom složenosti mreže i logaritma uvjetne najveće vjerodostojnosti procjene podataka:

$$BIC(k) = N_p(k) \log(N) - 2 \log(L(DAG_k)) \quad (14)$$

BIC se optimizira iz skupa hipotetskih DAG_k mreža penaliziranjem broja N_p čvorova mreže i podataka N . Ključni korak određivanja kauzalne mreže BCN je definiranje skupa DAG_k mogućih mreža povezivanjem *a priori* poznatih funkcionalnih zavisnosti sa skupom mogućih relacija. Za postupak optimizacije moguće je primijeniti heuristički Hillov postupak određivanja lokalnog optimuma ili postupak traženja globalnog optimuma genetičkim algoritmom.

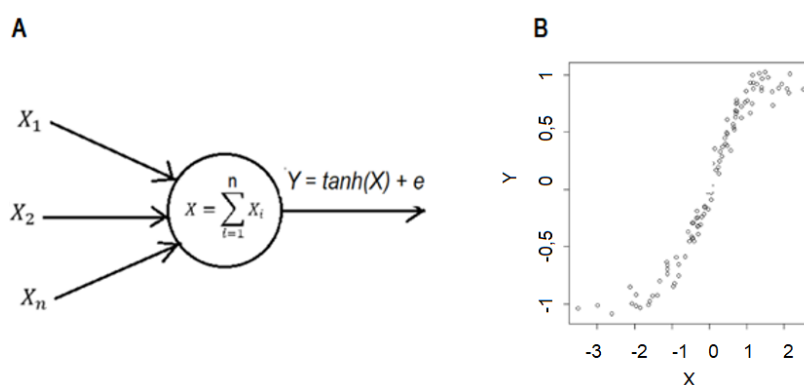
$$\widehat{DAG} = \underbrace{\min}_k (BIC(k)) \quad (15)$$

Moguće nesuglasnosti i moguće pogreške kao i posljedice nelinearnih odnosa na kauzalne relacije implicirane prihvaćene optimalne DAG mreže moguće je provjeriti preslikavanjem podataka u RKHS prostor i određivanjem parcijalnih korelacija višestrukih regresijskih modela:

$$X \rightarrow Y \quad pcor(y, y_{\mathcal{H}}(x)) > pcor(x, x_{\mathcal{H}}(y)) \quad (16)$$

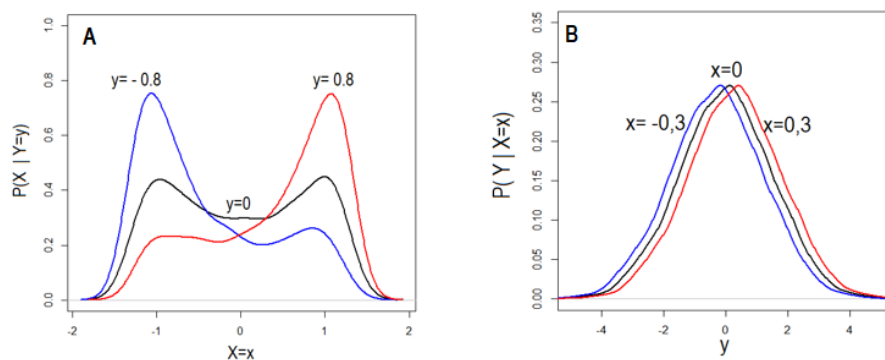
3. Teorijski kauzalni modeli

Za provjeru točnosti i kao ilustraciju mogućnosti primjene predloženog postupka preslikavanja podataka u RKHS prostor za određivanje bivarijabilne kauzalnosti, primijenjeni su podaci dobiveni simulacijom teoretskih modela i realnim podacima iz ekonometrijskih baza. Kao temeljni primjer za određivanje smjera kauzalnosti odabran je model neurona (Tablica 1). Matematički neuron je paradigmatski model umjetne inteligencije AI (engl. *Artificial Intelligence*) s primjenama u ekonometriji i mnogobrojnim drugim znanstvenim područjima. U ovom radu primijenjen je matematički model dan izrazom $Y = \tanh(X) + e$, pri čemu je e ukupna razina poremećaja, Y je odziv neurona, a mjerni šum je Gaussov proces s normalnom razdiobom $e \sim N(0; 0,4)$. Na Slici 1 prikazani su simulirani podaci zavisnosti odziva neurona Y o razini ukupnog poremećaja X .



Slika 1. A) Shematski prikaz modela neurona i B) simulirani podaci

Za numeričku obradu simulirani podaci povezani su u jedinstvenu matricu podataka bez naznake koja varijabla je uzrok, a koja posljedica. Na Slici 2 prikazane su uvjetne razdiobe dobivene simulacijom, tj. na A dijelu slike prikazane su KDE procjene gustoće vjerojatnosti u protukauzalnom smjeru $P(X|Y=y) \approx KDE(X)$ za izabrane vrijednosti odziva neurona $y = (-0,8; 0; 0,8)$, a na djelu B su prikazane razdiobe $P(Y|X=x) \approx KDE(Y)$ za izabrane vrijednosti razine ulaznog signala $x = (-0,3, 0, 0,3)$. Ovi grafički prikazi jasno pokazuju veliku razliku u kompleksnosti modela zaključivanja u protukauzalnom smjeru (Slika 2A) u odnosu na model u kauzalnom smjeru (Slika 2B).



Slika 2. Uvjetne razdiobe gustoća vjerojatnosti A) zavisnosti $P(X|Y=y)$ i B) zavisnosti $P(Y|X=x)$

Posljedica kompleksnosti modela zaključivanja u protukauzalnom smjeru su velika nesigurnost u procjenama vrijednosti ciljanih varijabli i donošenje pogrešnih odluka u postupcima upravljanja sustavima. Zaključivanje o smjeru kauzalnosti temeljem podataka provedeno je primjenom kriterija usporedbe Pearsonove korelacije (12) podataka i modela u Hilbertovom prostoru (8). Testirani nelinearni modeli dani su u Tablici 1. Dane su Pearsonove korelacije izvornih podataka (x, y) s procjenama regresijskih modela (y) intervali pouzdanosti C.I., i rezultati kauzalne analize. Za model $y = x^3 + x + \varepsilon$ Pearsonova korelacija izvornih podataka $x, y \in R$ je $r(x, y) = 0,945$ što ukazuje da je zbog većine podataka u intervalu $(-\sigma, +\sigma)$ zavisnost je približno linearno proporcionalna $y = a + bx$. Budući da su za linearno zavisne varijable uvjetovane razdiobe gustoće vjerojatnosti simetrične (identične), $P(X|Y) = P(Y|X)$, za dvije linearno povezane varijable u prostoru R izvornih podataka nije moguće odrediti smjer kauzalnosti. Da bi se moglo zaključiti o smjeru potrebno je modelirati nelinearne odnose među podacima. Podaci su preslikani u RKHS prostor gdje su procijenjeni regresijski modeli $y_{\mathcal{H}}(x)$ i $x_{\mathcal{H}}(y)$, (Racine, 2008). Dobivene su Pearsonove nesimetrične korelacije RKHS modela i pripadajućih izvornih podataka, $r(y, y_{\mathcal{H}}(x))$ i $r(x, x_{\mathcal{H}}(y))$.

Da se provjeri statistička signifikantnost razlika u korelacijama određene su pripadni intervali pouzdanosti CI (engl. *confidence intervals*), $CI[r(y, y_{\mathcal{H}}(x))]$ i $CI[r(x, x_{\mathcal{H}}(y))]$. Budući da nema preklapanja intervala pouzdanosti procjena korelacija s RKHS modelima one su značajno različite (Tablica 1). Temeljem Kolmogorovog kriterija povezanosti kompleksnosti i kauzalnosti (12) potvrđuje se uzročna veza odziva y neurona o razini ulaznog signala x . Predloženi postupak određivanja kauzalne bivarijabilne relacije, osim modela neurona, testiran je na nizu složenih funkcija u uvjetima nestacionarnosti kada je razina slučajnog utjecaja proporcionalna heteroskedastičnosti. Testirane su kombinacije transcendentnih i periodičnih funkcija. Ulazna funkcija x je slučajna veličina definirana s konstantnom distribucijom gustoće vjerojatnosti u području $X \in [-2, 2]$, izvor šuma je slučajna varijabla ε s normalnom razdiobom $N(0; 0,4)$, a heteroskedastičnost je modelirana produktom ulazne varijable i normalne razdiobe slučajnog šuma. Simulirano je $ns = 1000$ uzoraka.

Tablica 1. Rezultati analize bivarijabilne kauzalnosti

Model	ε	$r(x, y)$	$r(y, y_{\mathcal{H}}(x))$	$CI[r(y, y_{\mathcal{H}}(x))]$	$r(x, x_{\mathcal{H}}(y))$	$CI[r(x, x_{\mathcal{H}}(y))]$	$y = f(x)$
$y = x^3 + x + \varepsilon$	ε_1	0,945	0,992	0,991–0,993	0,983	0,981–0,985	$x \rightarrow y$
	$\varepsilon_2(x)$	0,945	0,992	0,991–0,993	0,983	0,980–0,985	$x \rightarrow y$
	$\varepsilon_3(x)$	0,944	0,991	0,990–0,992	0,975	0,972–0,978	$x \rightarrow y$
$y = \log(x + 10) + x^6 + \varepsilon$	ε_1	-0,009	1,000	0,999–1,000	0,009	-0,05–0,071	$x \rightarrow y$
	$\varepsilon_2(x)$	-0,009	0,899	0,899–1,000	0,033	-0,03–0,095	$x \rightarrow y$
	$\varepsilon_3(x)$	-0,009	0,899	0,899–0,999	-0,004	-0,07–0,058	$x \rightarrow y$
$y = \sin(10x) + e^{3x} + \varepsilon$	ε_1	0,637	1,000	1,000–1,000	0,931	0,923–0,939	$x \rightarrow y$
	$\varepsilon_2(x)$	0,637	1,000	1,000–1,000	0,932	0,924–0,940	$x \rightarrow y$
	$\varepsilon_3(x)$	0,637	1,000	1,000–1,000	0,935	0,920–0,942	$x \rightarrow y$
$y = \tanh(x) + \varepsilon$	ε_1	0,944	0,993	0,993–0,995	0,966	0,950–0,980	$x \rightarrow y$
$y = 2x + \varepsilon$	ε_1	0,976	0,977	0,973–0,979	0,978	0,975–0,981	$x \leftrightarrow y$
	$\varepsilon_2(x)$	0,976	0,976	0,973–0,979	0,978	0,975–0,981	$x \leftrightarrow y$
	$\varepsilon_3(x)$	0,972	0,972	0,968–0,975	0,977	0,974–0,980	$x \leftrightarrow y$

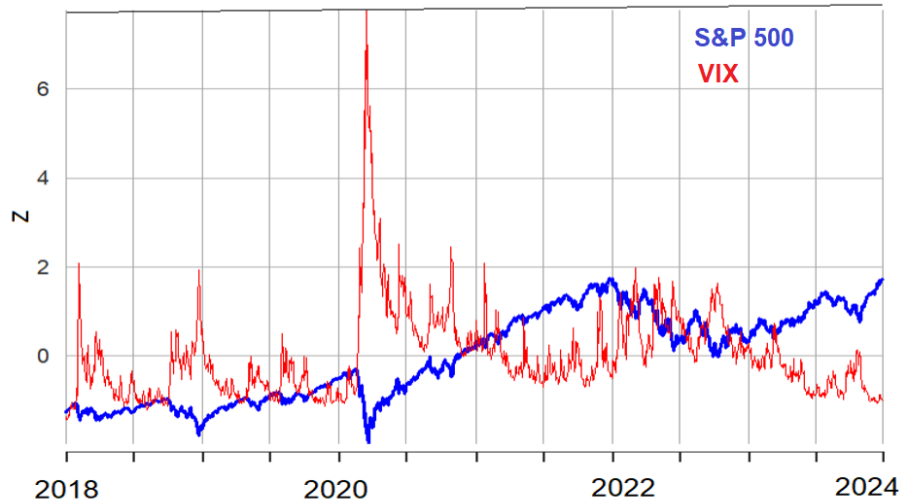
Bilješka: postavke simulacija $X \in [-2, 2]$, $ns = 1000$, $\varepsilon_1 \sim N(0; 0,4)$, $\varepsilon_2(x) \sim N(0; 0,4)(1 + 0,1x)$, $\varepsilon_3(x) \sim N(0; 0,4)\log(|x|)$, $y_{\mathcal{H}}(x) = E_y(Y_{\mathcal{H}}|X = x)$, $x_{\mathcal{H}}(y) = E_x(X_{\mathcal{H}}|Y = y)$

Za provjeru predloženog kriterija kauzalnosti testirana su četiri nelinearna i jedan linearni model. Izabrani su nelinearni modeli s podatkovno slabo i s jako izraženom nelinearnošću, odnosno s zanemarivim i visokim stupnjem korelacije testiranih podataka. Testirani nelinearni polinom trećeg stupnja i model neurona $\tanh(x)$, za izabranu domenu ulaznog poremećaja, nemaju podatkovno izraženu nelinearnost i stoga imaju visoki stupanj korelacije testiranih podataka $r(x, y) = 0,94$. Podaci testiranog modela kombinacije logaritamske funkcije i polinoma šestog stupnja imaju izrazito nelinearnu zavisnost i nesigurnu korelaciju $r(x, y) = 0,009$. Podaci modela kombinacije trigonometrijske i eksponencijalne funkcije su izrazito nelinearni s korelacijom $r(x, y) = 0,637$. Usporedba Pearsonovih korelacija testiranih podataka i odgovarajućih regresijskih modela u RKHS prostoru pokazuje razlike koje impliciraju kompleksnost protu kauzalnih modela i time procjenu smjera kauzalne veze. Značajnost razlika korelacija potvrđena je ne preklapanjem intervala pouzdanosti. Za sve primjere potvrđena je točnost procjene smjera kauzalne zavisnosti, osim za linearni model za koji teoretski ne postoji razlika kompleksnosti modela, odnosno uvjetne razdiobe gustoće vjerojatnosti u oba smjera su jednake, $P(X|Y) = P(Y|X)$.

4. Primjeri kauzalnosti ekonometrijskih podataka

Ispitivanje bivarijabilne kauzalnosti s realnim ekonometrijskim i socio-ekonomskim podacima je znatno složenije i nesigurnije. Razlog je to što su u realnim sustavima faktori međusobno povezani i dolazi do manjeg ili većeg preklapanja i interferencije različitih uzroka i posljedica. U takvim uvjetima analiza kauzalnosti izdvajanjem samo dva faktora je ograničena i često ima za posljedicu pristrane procjene. U svrhu testiranja predloženog algoritma određivanja kauzalnosti primijenjena je analiza socio-ekonomskih, finansijskih i burzovnih podataka. Zaključci o smjeru kauzalnog učinka i statistički parametri dani su u [Tablici 2](#). Temeljem podataka iz baze "Datarium" ([Kassambara, 2019](#)), ispitana je kauzalna veza između prodaje i posjeta društvenim mrežama Facebook, YouTube i oglašavanja u tiskovinama. Rezultati pokazuju da prodaja ima pozitivni povratni utjecaj na broj posjeta društvenim mrežama. Najizraženija je veza između prodaje i broja posjeta YouTube mreži, $r(x, y) = 0,782$, ali bez jednoznačne procjene smjera kauzalnosti. Najmanji učinak na prodaju ima oglašavanje u novinama ($r(x, y) = 0,228$). Neodređenost smjera kauzalnosti je posljedica istovremenog preklapanja učinaka koja nije uzeta u obzir u ovoj bivarijabilnoj analizi. Temeljem podataka iz baze parova varijabli "Tübingen" ([Mooi i sur., 2015](#)), analizirana je kauzalna povezanost dionica banaka. Hang Seng Bank je sestra banke HSBC, a banke Hutchinson i Cheung Kong posluju samostalno. Vrijednosti dionica banaka su čvrsto povezane s koeficijentima korelacije od $r = 0,703$ do $r = 0,814$. Nesimetričnost uvjetnih korelacija s pripadajućim RKHS modelima ne omogućuje jednoznačno određivanje smjera kauzalnog utjecaja. Moguće objašnjenje je neraspoloživost ostalih faktora nužnih za kauzalnu analizu. Kao jednostavniji primjer neposrednog kauzalnog utjecaja uzeti su podaci o odnosu dobi djelatnika i osobnog dohotka. Odabrani su podaci iz dvije baze, "Tübingen" i Canadian Census Public ([Racine, 2008](#)). Iako su podaci iz dvije različite zemlje, Njemačke i Kanade, rezultati su sukladni, koeficijenti korelacija su $r = 0,223$ i $r = 0,231$, a iz nesimetričnosti uvjetnih korelacije s RKHS modelima pouzdano je potvrđen očekivani smjer kauzalnosti. Ekonometrijski najvažniji primjer je određivanje kauzalnog odnosa između S&P500 i VIX indeksa. Finansijska tržišta su izrazito kompleksna zbog mnogobrojnih egzogenih faktora (ekonomski, politički, psihološke percepcije). VIX indeks je ključan u postupku donošenja poslovnih odluka u trgovini i inves-

ticijama. Primjena umjetne inteligencije (AI) omogućuje povezivanje brojnih faktora s ciljem utvrđivanja uzoraka ponašanja i predviđanja (Carter, 2025). Iako su predikcije AI modelima uglavnom pouzdane u kvazi stacionarnim ekonomskim i gospodarskim uvjetima, agnostički AI modeli zbog svoje asocijativne prirode ne mogu objasniti očekivanja intervencijskih odluka i protučinjeničnih promišljanja Pearl (2009).



Slika 3. Dnevne standardne vrijednosti indeksa S&P500 (plavo) i VIX (crveno) u razdoblju od 2018. do 2024.

U ovom su radu za kauzalnu analizu korišteni dugogodišnji podaci, od početka 2018. do kraja 2024., dostupni s internet poslužitelja "Chicago Board Options Exchange" (CBOE). Grafički prikaz dinamike dnevne srednje standardizirane vrijednosti indeksa prikazan je na Slici 3, a rezultati kauzalne analize u Tablici 2.

Tablica 2. Bivarijabilna kauzalna analiza ekonometrijskih podataka

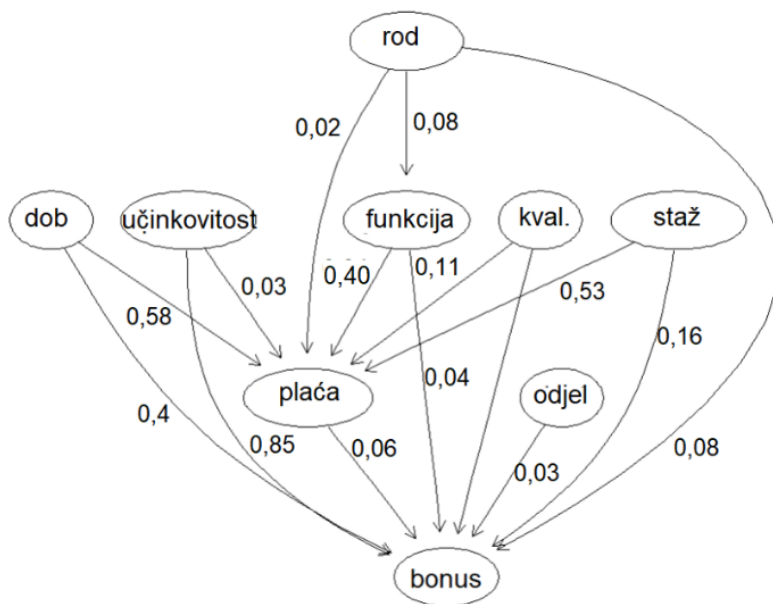
		$r(x, y)$	$r(y, y_{\mathcal{H}}(x))$	$r(x, x_{\mathcal{H}}(y))$	Kauzalni smjer
Marketing (baza "Datarium") $y =$ prodaja	$x =$ Facebook posjeti	0.576	0.574	0.646	$X \leftrightarrow Y$
	$x =$ YouTube posjeti	0.782	0.788	0.833	$X \leftrightarrow Y$
	$x =$ novinski oglasi	0.228	0.271	0.247	$X \leftrightarrow Y$
Financije (baza "Tübingen") $y =$ HSBC dionice	$x =$ Hang Seng Bank dionice	0.814	0.827	0.825	$X \leftrightarrow Y$
	$x =$ Hutchison Bank dionice	0.814	0.825	0.827	$X \leftrightarrow Y$
	$x =$ Cheung Kong dionice	0.703	0.713	0.701	$X \leftrightarrow Y$
Socio-ekonomski $y =$ dohodak	$x =$ dob (baza "Tübingen")	0.223	0.324	0.271	$X \rightarrow Y$
	$x =$ dob (baza "csp71")	0.231	0.564	0.328	$X \rightarrow Y$
$x =$ S&P500 $y =$ VIX	2018–2022	-0.585	0.721	0.662	$X \rightarrow Y$
	2020–2022	-0.689	0.916	0.846	$X \rightarrow Y$
	2022–2024	-0.630	0.659	0.678	$X \leftrightarrow Y$

Korelacije su negativne, tj. povećanje S&P500 ima za posljedicu smanjene indeksa rizika VIX. indeksa su u intervalu od $r = -0,585$ do $r = -0,689$. Za podatke u razdobljima od

2018. do 2020., i 2020. do 2022., jednoznačna procjena smjera kauzalnosti je da promjena S&P500 je uzrok promjene VIX, ali za razdoblje od 2022. do kraja 2024. kauzalni smjer nije jednoznačno procijenjen. Moguće objašnjenje je da postoji i pozitivna povratna veza kojom VIX destabilizira S&P500 indeks.

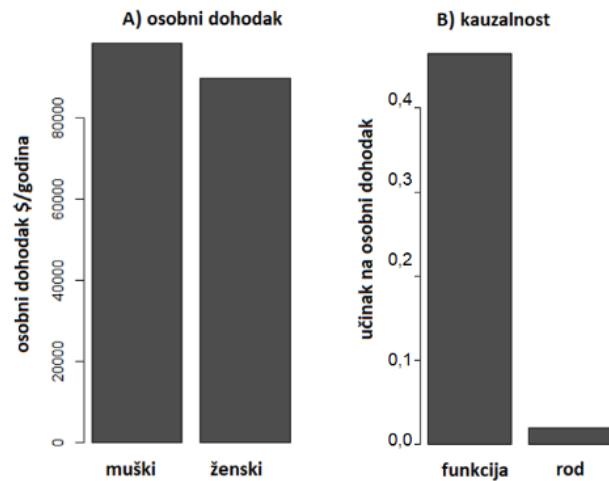
5. Bayesova kauzalna mreža rodnog jaza u ICT industriji

Razvoj informacijske i računalne tehnologija ICT (engl. *Information and Computer Technology*) je najbrže rastući sektor svjetske a tako i hrvatske ekonomije. Analiza razloga i kauzalne povezanosti faktora rodne neravnopravnosti u ICT je od velike važnosti za donošenja odluka održavanja socijalne pravednosti i optimalnog korištenja ljudskog potencijala. Mnogobrojni su ekonomski, kulturološki i socijalni faktori, kao i složenost njihove interakcije, koji se ne mogu reducirati na razinu bivarijabilne kauzalne analize. Kao primjer složenog kauzalnog modela dan je primjer ICT američke tvrtke (Chamberlain, 2016, 2024). Dana je baza podataka s rodno uravnoteženim uzorcima od 1000 djelatnika, 532 muških i 468 ženskih. Prosječna godišnja primanja su 98457 USD i 89942 USD za muške i ženske djelatnike, što čini rodni jaz od 8,7%. Dani su podaci za sljedećih 9 kauzalno važnih faktora: radno mjesto (funkcija), rod, dob, ocjena učinkovitosti, razina obrazovanja, odjel u firmi, radni staž, osnovna plaća, i bonus dodatak. Određena je struktura usmjerenog acikličkog grafa (DAG) modela kauzalne Bayesove mreže optimiranjem Bayesovog informacijskog kriterija BIC (13)–(14). Primijenjen je heuristički Hillov postupak optimiranja DAG strukture (Scutari, 2010). Rezultat je graf kauzalne mreže prikazan na Slici 4. Jakosti neposrednih kauzalnih učinaka određeni su procjenom metodom najmanjih kvadrata parametra linearnih modela sa standardiziranim vrijednostima faktora $z_i = \sum_i \beta_i pa(z_i)$.



Slika 4. Kauzalni Bayesov usmjereni aciklički graf rodnog jaza

Kauzalni Bayesov usmjereni aciklički graf DAG (Slika 4) pokazuje da je osobni dohodak neposredno određen dobom djelatnika, radnim stažom, radnom funkcijom u tvrtki, kvalifikacijom, radne učinkovitosti, i rodom djelatnika. Najveći neposredni učinak na osobni dohodak imaju dob djelatnika $\beta = 0,58$, radni staž u tvrtki $\beta = 0,53$, i položaj odnosno radna funkcija $\beta = 0,4$. Rod djelatnika na osobni dohodak ima najmanji neposredni učinak $\beta = 0,02$. Interesantno je uočiti da rod djelatnika nije kauzalno povezana s ocjenom učinkovitošću na radnom mjestu. Bonus, dodatak osobnom dohotku, nije neposredno kauzalno povezan sa rodom i bitno je određena učinkovitošću na radnom mjestu i dobom starosti djelatnika. Iako je neposredni učinak roda na jaz osobnog dohotka malen, ukupni posredni učinak putem radne funkcije je značajan i iznosi 8,7% (Slika 5).



Slika 5. A) Prikaz rodnog jaza i B) neposredni kauzalni učinak radne funkcije i roda na osobni dohodak

6. Diskusija

Istražena je metodologija procjene kauzalnosti iz ekonometrijskih podataka kao najvažnije informacija za upravljanje ekonomskih sustava na mikro i makro razinama. Predložen je i testiran postupak procjene kauzalne relacije temeljem Kolmogorovog koncepta veze između kompleksnosti sustava (modela) i kauzalnosti. Kriterij određivanja smjera kauzalne veze je usporedba iznosa Pearsonove korelacije između izmjerenih podataka i neparametarskog modela u Hilbertovom reproducirajućih jezgri RKHS. Predloženi kriterij određivanja smjera ispitan je na nizu teoretskih (simuliranih) bivarijabilnih modela i također na brojnim realnim ekonometrijskim, socio-ekonomskih i financijskim podacima iz različitih javno potvrđenih izvora.

Kolmogorova konjektura da se kauzalni smjer može odrediti usporedbom složenosti modela potvrđena je na primjeru simuliranih podataka umjetnog neurona uz superpoziciju odziva neurona i Gaussovog mjernog šuma. Grafički prikazi modela uvjetnih razdioba $P(y_{\mathcal{H}}|x)$ i $P(x_{\mathcal{H}}|y)$ jasno potvrđuje konjekturu i usporedbom Pearsonovih korelacija točni zaključak o smjeru kauzalne veze.

Predloženi postupak kauzalne analize provjeren je za različite oblike nelinearnosti (polinomna, eksponencijalna, trigonometrijska) uz heteroskedastični utjecaj egzogenog slučajnog poremećaja. Na svim primjerima potvrđena je točnost metode procjene kauzalnog smjera. Također je potvrđeno da za linearnu zavisnost, kada ne postoji asimetričnost uvjetnih razdioba, ovom metodom nije moguće odrediti smjer kauzalne relacije.

Bivarijabilna kauzalna analiza realnih podataka pokazuje nužnost poznavanja podataka o kofaktorima koji istovremeno utječu na uzrok i posljedicu. Nepoznavanje podataka kofaktora ima za posljedicu pristranost procjene jakosti kauzalnog učinka i moguću pogrešnu procjenu kauzalnog smjera. Kada rezultati usporedbe kompleksnosti modela pokazuju preklapanje pripadajućih intervala pouzdanosti nije moguća jednoznačnost procjena uzročno posljedičnog smjera. Točna i jednoznačna procjena kauzalnosti određena je samo za zavisnost osobnog dohotka o starosti djelatnika jer nema utjecaja kofaktora na dob ljudi. Interesantan rezultat je dobiven za ispitivanje kauzalne zavisnosti VIX indeksa o S&P500 indeksu. Za razdoblje od 2018. do 2022. potvrđen je smjer zavisnosti, ali za razdoblje od 2022. do 2024. taj zaključak nije jednoznačan i implicira mogući povratni utjecaj VIX na S&P500.

Za nepristranu procjenu kauzalnog modela u načelu su potrebni podaci svih faktora koji su neposredno i posredno povezani s ciljnim varijablama. Analiziran je kauzalni model rodnog jaza osobnog dohotka u ICT tvrtki. Primijenjen je model Bayesove kauzalne mreže određene optimiranjem BIC Bayesovog informacijskog indeksa. Model otkriva da rodni jaz od 8,7% nije posljedica neposrednog rodnog utjecaja, već posrednim utjecajem roda na izbor za funkcije na rukovodećim radnim mjestima.

7. Zaključak

Za razumijevanje i upravljanje sociološkim ekonomskim sustavima u središtu znanstvenog interesa i prakse su modeliranje i kauzalna analiza temeljem povezivanja velikog broja podataka i brzine komunikacija. Važnost sustavskog pristupa i povezivanje baza podataka postala je izuzetno istaknuta razvojem umjetne inteligencije AI. U ekonometriji su poznati brojni primjeri primjene strojnog učenja neuronskim mrežama i algoritma dubokog učenja. Najvažniji cilj postojećih AI modela je utvrđivanje pravila povezanosti vladanja, odnosno uzoraka ponašanja, ekonometrijskih, financijskih i socioloških značajki. Većina AI modela smatra se "crnim kutijama", a osnova inteligencije su nelinearni regresijski modeli procjene ciljnih varijabli. Iako ti modeli nemaju znanje o kauzalnim relacijama, u načelu njihova točnost predikcije u uvjetima učenja je značajna i imaju veliku praktičnu primjenu.

Doprinos ovog rada je predloženi algoritam procjene kauzalnosti temeljem Kolmogorove konjektуре o kompleksnosti i kauzalnosti, i statističkim zaključivanjem preslikavanjem ekonometrijskih podataka u Hilbertov prostor jezgri RKHS. Povezivanjem kauzalnih odnosa i optimiranjem Bayesovog informacijskog kriterija BIC određuje se kauzalna Bayesova mreža koja omogućuje zaključivanje i donošenje odluka na sve tri razine znanja: 1) predviđanje regresijom, 2) analiza mogućih intervencije ili odluka upravljanja u sustavu, 3) protučinjenično testiranje hipoteza i uzročno–posljedičnih veza moguće hipotetske intervencije.

Poznavanje uzročno–posljedične veze dviju varijabli, X i Y , temelj je razvoja kauzalnih modela umjetne inteligencije AI, za dinamičke (vremenske nizove), panel analize i prostorno distribuirane sustave.

Literatura

- Allen, D. E. i McAleer, M. (2020). Generalized measures of correlation for asymmetry, nonlinearity, and beyond: Some antecedents on causality. *Journal of the American Statistical Association*, 117(537):214–224. doi: [10.1080/01621459.2020.1768101](https://doi.org/10.1080/01621459.2020.1768101)
- Bareinboim E. i Hünernmund P. (2023). Causal inference and data fusion in econometrics. *The Econometrics Journal*, 28(1):41–82. doi: [10.1093/ectj/utad008](https://doi.org/10.1093/ectj/utad008)
- Buljan A., (2021). *Hilbertovi prostori reproducirajućih jezgri*. (Diplomski rad). Split: Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno–matematički fakultet. <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:166:798236>
- Carter, A. (2025). VIX index revolutionized! How AI predicts market volatility like never before. <https://www.jomfruland.net/vix-index-revolutionized-how-ai-predicts-market-volatility-like-never-before/>
- Chamberlain. A. (2016). Demystifying the gender pay gap: Evidence from Glassdoor salary data. *Glassdoor Research Report*, 1–49. <https://www.glassdoor.com/blog/gender-pay-gap/>
- Chamberlain, A. (2024). Gender pay gap. https://github.com/adchamberlain/gender_pay_gap
- Hastie, T., Tibshirani, R. i Friedman, J. (2017). *The elements of statistical learning: Data mining, inference, and prediction* (Second Edition). Springer: New York. doi: [10.1007/978-0-387-84858-7](https://doi.org/10.1007/978-0-387-84858-7)
- Heckman, J. J. i Pinto, R. (2023). Econometric causality: The central role of thought experiment. *National Bureau of Economic Research Report*, 31945:1–82. doi: [10.3386/w31945](https://doi.org/10.3386/w31945)
- Imbens, G. W. i Rubin, D. B. (2010). Rubin Causal Model. In: Durlauf, S.N., Blume, L.E. (eds) *Microeconomics*. Pages 229–241 The New Palgrave Economics Collection. Palgrave Macmillan, London. doi: [10.1057/9780230280816_28](https://doi.org/10.1057/9780230280816_28)
- Kassambara, A. (2019). *datarium: Data bank for statistical analysis and visualization*. CRAN: Contributed packages. doi: [10.32614/cran.package.datarium](https://doi.org/10.32614/cran.package.datarium)
- Kolmogorov, A. N. (1968). Three approaches to the quantitative definition of information. *International Journal of Computer Mathematics*, 2(1–4):157–168. doi: [10.1080/00207166808803030](https://doi.org/10.1080/00207166808803030)
- Mitrović, J., Sejdinović, D. i Yee Whye, T. (2018). *Causal inference via Kernel deviance measures*. arXiv. doi: [10.48550/arXiv.1804.04622](https://doi.org/10.48550/arXiv.1804.04622)
- Mooi, J. M., Janzing, D., Zscheischler, J. i Scholkopf. (2015). *Cause–effect pairs repository*. <http://webdav.tuebingen.mpg.de/causeeffect/>
- Pearl, J. (2009). Causal inference in statistics: An overview. *Statistics Surveys*, 3:96–146. doi: [10.1214/09-SS057](https://doi.org/10.1214/09-SS057)
- Racine, J. S. (2008). Nonparametric econometrics: A primer. *Foundations and Trends in Econometrics*, 3(1):1–88. doi: [10.1561/0800000009](https://doi.org/10.1561/0800000009)
- Rubin, D. B. (2005). Causal inference using potential outcomes: Design, modeling, decisions. *Journal of the American Statistical Association*, 100(469):322–331. doi: [10.1198/016214504000001880](https://doi.org/10.1198/016214504000001880)
- Ryan, J. A. i Ulrich, J. M. (2024). *quantmod: Quantitative financial modelling framework*. CRAN: Contributed packages. doi: [10.32614/cran.package.quantmod](https://doi.org/10.32614/cran.package.quantmod)
- Scutari, M. (2010). Learning Bayesian networks with the bnlearn R package. *Journal of Statistical Software*, 35(3):1–22. doi: [10.18637/jss.v035.i03](https://doi.org/10.18637/jss.v035.i03)
- Shojale, A. i Fox, E. B. (2022). Granger causality: A review and recent advances. *Annual Review of Statistics and Its Application*, 9(1):289–319. doi: [/10.1146/annurev-statistics-040120-010930](https://doi.org/10.1146/annurev-statistics-040120-010930)
- Vinod, H. D. (2007). *generalCorr: Generalized correlations, causal paths and portfolio selection*. CRAN: Contributed packages. doi: [10.32614/cran.package.generalcorr](https://doi.org/10.32614/cran.package.generalcorr)
- Vinod, H. D. (2020). Nonlinear Granger causal paths, dependence measures and canonical correlations. *SSRN Electronic Journal*. doi: [10.2139/ssrn.3737870](https://doi.org/10.2139/ssrn.3737870)

Causal analysis in econometrics using reproducing kernel Hilbert space

SUMMARY

A procedure for determining nonlinear causal relationships between two variables is proposed by mapping them into a reproducing kernel Hilbert space (RKHS). The analysis of bivariate dependencies is a component of developing causal models in artificial intelligence for the purpose of managing complex systems. Understanding causality provides key information that underpins diagnostics, consequence forecasting, and business decision-making. The determination of causal relationships between variables is performed by estimating the empirical probability density using kernel density estimation (KDE) within the RKHS framework. The direction of the causal link is assessed using the Nadaraya-Watson approximation and by comparing Pearson correlations of the variables X and Y with those of the models in RKHS space, $X_{\mathcal{H}}(Y)$ and $Y_{\mathcal{H}}(X)$. The proposed method was tested on several examples: a neuron model, simulations of complex bivariate models with heteroskedastic disturbances, well-known datasets from the University of Tübingen, marketing "Datarium" data on social media impact, and dependencies between stock indices S&P500 and VIX. Additionally, an analysis of the causal structure related to the gender pay gap was conducted using data of IT company from a U.S. Ambiguity in the direction of the causal relationship is indicated by the overlap of confidence intervals for Pearson correlations. For linear systems, due to the symmetry of conditional distributions in both directions, the proposed method cannot unambiguously determine the direction of causality.

ARTICLE TYPE

Original scientific paper

ARTICLE INFO

Received: March 11, 2025

Accepted: May 10, 2025

DOI: 10.62366/crebss.2025.1.005

JEL: C18, C29, C49

KEYWORDS

causality, RKHS, Hilbert space, kernels, Bayesian causal network