Izvorni znanstveni članak / Original scientific paper

Deformacija površina pri uspravnoj i poprečnoj Mercatorovoj projekciji

Miljenko LAPAINE – Zagreb[1]

SAŽETAK. Članak se bavi deformacijama površina konformnih cilindričnih projekcija. U tu svrhu istražuju se uspravna i poprečna Mercatorova projekcija sfere, Gauss-Krügerova projekcija i poprečna Mercatorova projekcija rotacijskog elipsoida za Hrvatsku, odnosno HTRS96/TM. Pokazuje se da su izrazi za faktore lokalnih mjerila duljina i površina za sve te projekcije istoga oblika, samo treba uočiti na što se pojedine oznake odnose. To znači da su sve četiri projekcije srodne i da ih možemo na taj način proučavati. Za svaku je projekciju odabran i izrađen po jedan primjer raspodjele deformacija za ilustraciju. Zakon o državnoj izmjeri i katastru nekretnina propisuje da se površine određuju u službenoj kartografskoj projekciji, ali se ne spominje potreba uzimanja u obzir deformacija zbog projekcije. Ovaj članak trebao bi utjecati na promjenu takve prakse.

Ključne riječi: kartografske projekcije, deformacije projekcije, Mercatorova projekcija, poprečna Mercatorova projekcija, Gauss-Krügerova projekcija, HTRS96/TM.

1. Uvod

Površina Zemlje, ostalih nebeskih tijela i nebeskoga svoda u kartografiji se aproksimira plohom elipsoida ili sfere. Kartografska projekcija je, dakle, preslikavanje plohe elipsoida ili sfere u ravninu. Najčešće se zadaje analitički, tj. osnovnim kartografskim jednadžbama $x = x(\varphi, \lambda), y = y(\varphi, \lambda)$, gdje su φ, λ geografske ili geodetske koordinate, a x, y koordinate u ravnini projekcije. U ovom ćemo članku rabiti matematički (desni) koordinatni sustav jer se u literaturi na engleskom jeziku, a koji je u današnje vrijeme dominantan u stručnoj kartografskoj literaturi, redovito rabi matematički koordinatni sus-

[1] prof. emer. dr. sc. Miljenko Lapaine, Sveučilište u Zagrebu – Geodetski fakultet, Kačićeva 26, HR-10000 Zagreb, Hrvatska, e-mail: miljenko.lapaine@geof.unizg.hr

tav. Osim toga, mislim da će studenti imati manje problema sa savladavanjem gradiva iz teorije kartografskih projekcija, ako neće morati razmišljati i o razlikama između koordinatnih sustava u matematici i geodeziji/kartografiji. Kartografska projekcija može se zadati i tablicom koordinata ili opisom konstrukcije mreže meridijana i paralela. Po svojstvima preslikavanja dijele se na konformne, ekvivalentne, ekvidistantne i uvjetne projekcije. Po položaju pola normalne kartografske mreže dijele se na uspravne, poprečne i kose projekcije. Po obliku mreže meridijana i paralela uspravnih projekcija dijele se na konusne, cilindrične, azimutne, pseudokonusne, pseudocilindrične, polikonusne, kružne i ostale projekcije. Kartografska projekcija često nosi ime svojeg autora, npr. Mercatorova, Sansonova, Lagrangeova, Winkelova. Kao posebna skupina kartografskih projekcija često se izdvajaju geodetske projekcije, tj. projekcije za potrebe državne izmjere (Frančula i Lapaine 2008).

U geometriji naziv "projekcija" označava ili ortogonalnu projekciju u kojoj se izrađuju jednostavniji tehnički crteži ili perspektivu. U kartografiji naziv "projekcija" ima mnogo šire i općenitije značenje, pa bi bilo bolje umjesto projekcija upotrebljavati naziv preslikavanje. Svaka matematički definirana veza između položaja točke na sferi ili elipsoidu i položaja njezine slike na karti je kartografska projekcija. Većina projekcija koje se primijenjuju u praksi nisu geometrijske projekcije, nego projekcije konstruirane uz određene uvjete. Istaknimo još da kartografska projekcija nije preslikavanje Zemljine plohe/površine nego preslikavanje sa sfere ili elipsoida. Drugim riječima, najprije treba odabrane objekte koje želimo kartirati preslikati/reducirati na plohu elipsoida ili sfere da bismo mogli primijeniti odabranu kartografsku projekciju.

Promjene duljina, površina i kutova koje nastaju pri kartografskoj projekciji nazivamo deformacijama ili distorzijama projekcije. Plohu sfere ili elipsoida nije moguće preslikati u ravninu sa svim deformacijama jednakim nuli.

Izložit ćemo osnovna svojstva deformacija cilindričnih projekcija. Poseban naglasak daje se na uspravnu konformnu cilindričnu projekciju, poznatu pod nazivom Mercatorova projekcija, a zatim na poprečnu konformnu cilindričnu projekciju, poznatu još pod nazivom Lambert-Gaussova ili poprečna Mercatorova projekcija. Svi izvodi napravljeni su za sferni Zemljin model kako bi bili što kraći i pregledniji. Na kraju, dolaze izvodi za faktore lokalnih linearnih i površinskih mjerila Gauss-Krügerove i poprečne Mercatorove projekcije rotacijskog elipsoida za Hrvatsku (HTRS96/TM).

2. Osnovno o mjerilima duljina i površina kartografskih projekcija

Pretpostavimo da je zadana sfera polumjera R geografskom parametrizacijom

$$X = R\cos\varphi\cos\lambda,\ Y = R\cos\varphi\sin\lambda,\ Z = R\sin\varphi \tag{1}$$

$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ \lambda \in [-\pi, \pi]. \tag{2}$$

Gaussovi koeficijenti prve diferencijalne forme te parametrizacije su

$$e = \left(\frac{\partial X}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \varphi}\right)^2 = R^2,\ f = \frac{\partial X}{\partial \varphi}\frac{\partial X}{\partial \lambda} + \frac{\partial Y}{\partial \varphi}\frac{\partial Y}{\partial \lambda} + \frac{\partial Z}{\partial \varphi}\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = 0$$

$$g = \left(\frac{\partial X}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \lambda}\right)^2 = R^2 \cos^2 \varphi. \tag{3}$$

Prva diferencijalna forma sfere je dakle

$$ds^2 = ed\varphi^2 + 2fd\varphi d\lambda + gd\lambda^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 \cos^2 \varphi\, d\lambda^2. \tag{4}$$

Neka je sad kartografska projekcija zadana na istom području definicije (2) kao i sfera jednadžbama

$$x = x(\varphi, \lambda),\ y = y(\varphi, \lambda). \tag{5}$$

Gaussovi koeficijenti prve diferencijalne forme preslikavanja (5) su

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2,\ F = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda},\ G = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2, \tag{6}$$

a prva diferencijalna forma

$$ds'^2 = Ed\varphi^2 + 2Fd\varphi d\lambda + Gd\lambda^2. \tag{7}$$

Faktor lokalnog linearnog mjerila (kraće linearno mjerilo) c kartografske projekcije definira se relacijom

$$c^2 = \frac{ds'^2}{ds^2} = \frac{Ed\varphi^2 + 2Fd\varphi d\lambda + Gd\lambda^2}{R^2 d\varphi^2 + R^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2} \tag{8}$$

i ono općenito ovisi o pojedinoj točki i smjeru. U smjeru meridijana $d\lambda = 0$ pa je

$$c = h = \frac{\sqrt{E}}{R}, \tag{9}$$

a u smjeru paralela $d\varphi = 0$ i stoga

$$c = k = \frac{\sqrt{G}}{R \cos \varphi}. \tag{10}$$

Izraz za faktor lokalnog mjerila površina (kraće mjerila površina) je

$$p = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{eg - f^2}} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{R^2 \cos \varphi}. \tag{11}$$

Reći ćemo da je deformacija u smjeru meridijana jednaka nuli ako je $h = 1$, da je deformacija u smjeru paralela jednaka nuli ako je $k = 1$ i da je deformacija površina jednaka nuli ako je $p = 1$ (Borčić 1955, Snyder 1987, Frančula 2004).

3. Faktori lokalnih mjerila duljina i površina pri cilindričnim projekcijama

Uspravne cilindrične projekcije sfere definirane su jednadžbama

$$x = n(\lambda - \lambda_0),\ y = y(\varphi), \tag{12}$$

gdje je n konstanta projekcije, a λ_0 geografska dužina srednjeg meridijana područja preslikavanja (Frančula 2004). Za takve projekcije je

$$h(\varphi) = \frac{\sqrt{E}}{R} = \frac{1}{R}\frac{dy}{d\varphi},\ k(\varphi) = \frac{\sqrt{G}}{R\cos\varphi} = \frac{n}{R\cos\varphi},\ p(\varphi) = \frac{n}{R^2\cos\varphi}\frac{dy}{d\varphi} \tag{13}$$

i

$$F = \frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial\lambda} + \frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\lambda} = 0. \tag{14}$$

U izrazima (13) R je radijus sfere. Iz (14) slijedi da se slike meridijana i paralela u projekciji sijeku pod pravim kutom. Ako za neki par geografskih širina $\varphi_0, -\varphi_0$ vrijedi

$$k(\varphi_0) = k(-\varphi_0) = 1 \tag{15}$$

tada je

$$n = R\cos\varphi_0 \text{ i } k(\varphi) = \frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi}. \tag{16}$$

Da bismo pojednostavili razmatranja razdiobe deformacija za kose i poprečne cilindrične projekcije uočimo najprije da se formula za faktor lokalnog linearnog mjerila c kartografske projekcije koja je definirana relacijom (8) za cilindrične projekcije (12) može napisati i u obliku

$$c^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{R^2\left[\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 dy^2 + \frac{\cos^2\varphi}{n^2}dx^2\right]} \tag{17}$$

pri čemu treba uočiti da je $\varphi = \varphi(y)$. Za faktor lokalnog mjerila površina možemo prema (13) napisati

$$p(\varphi) = h(\varphi)k(\varphi) = \frac{n}{R^2\cos\varphi\frac{d\varphi}{dy}}. \tag{18}$$

4. Mercatorova projekcija

Mercatorova projekcija je uspravna konformna cilindrična projekcija. Iz uvjeta konformnosti

$$h(\varphi) = k(\varphi) \tag{19}$$

i zahtjeva da se ekvator ($\varphi = 0$) preslika u ravnu crtu ($y = 0$) proizlaze jednadžbe te projekcije

$$x = n(\lambda - \lambda_0),\ \ y = n \tanh^{-1}(\sin\varphi). \tag{20}$$

Prema (16) $n = R\cos\varphi_0$. Ako je $\varphi_0 = 0$, onda je $n = R$ i umjesto x i y pisat ćemo $\bar{x}$ i $\bar{y}$ i zvat ćemo ih nereduciranim koordinatama. Ako je $\varphi_0 \neq 0$, pisat ćemo x i y i takve koordinate zvati reduciranima. Pojmove nereduciranih i reduciranih koordinata uveli smo radi lakše usporedbe s uobičejnim pristupom kod Gauss-Krügerove i poprečne Mercatorove projekcije elipsoida s primjenom u geodeziji. Označimo li još

$$k_0 = \frac{n}{R} = \cos\varphi_0 \tag{21}$$

onda je očito

$$x = k_0\bar{x}\ \text{ i }\ y = k_0\bar{y}. \tag{22}$$

Ako bismo uzeli da je $\varphi_0 = 0$, onda je $k_0 = 1$, i reducirane i nereducirane koordinate su međusobno jednake. Drugim riječima, ako u formule projekcije (20) umjesto n stavimo R, dobit ćemo formule za nereducirane koordinate. Nadalje,

$$h(\varphi) = k(\varphi) = \frac{n}{R\cos\varphi} = \frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi},\ p(\varphi) = h^2(\varphi) = \frac{\cos^2\varphi_0}{\cos^2\varphi}. \tag{23}$$

Iz (20) može se izvesti

$$h(y) = k(y) = \frac{n}{R}\cosh\frac{y}{n} = k_0\cosh\frac{y}{Rk_0}. \tag{24}$$

Uz uvedene oznake u (21) i (22) možemo (24) napisati ovako

$$k(\bar{y}) = k_0\cosh\frac{\bar{y}}{R}. \tag{25}$$

Ako se za male vrijednosti od $\frac{\bar{y}}{R}$ funkcija kosinus hiperbolni, koja je na desnoj strani formule (25), razvije u Maclaurinov red, dobije se

$$k = k_0\left(1 + \frac{\bar{y}^2}{2R^2} + \frac{\bar{y}^4}{24R^4} + \ldots\right). \tag{26}$$

To je po obliku jednaka formula onoj koju susrećemo kod Gauss-Krügerove projekcije uz odgovarajući izbor radijusa R (Borčić 1955, Borčić 1976, Frančula 2004) te uz zamjenu oznaka k s m, k_0 s m_0, i uočavanja da je sada $\bar{y}$ ordinata, a ne apscisa (desni koordinatni sustav). U današnje doba takav razvoj u red nije potreban. U ovom članku su razvoji u red napisani samo zato da bi čitatelji mogli lakše uočiti istovjetnost s formulama poznatim iz literature (Borčić 1955, Borčić 1976, Frančula 2004).

Deformaciju duljina d_d odredit ćemo prema izrazu

$$d_d = k - 1, \tag{27}$$

odnosno približno

$$d_d = k_0\left(\frac{\bar{y}^2}{2R^2} + \frac{\bar{y}^4}{24R^4} + \ldots\right) + k_0 - 1. \tag{28}$$

Dakle, ako je faktor lokalnog mjerila duljina jednak 1, onda je deformacija duljina jednaka 0, a to će biti onda kad je $\bar{y} = y = 0$. Za mjerilo površina imamo najprije

$$p = k_0^2 \cosh^2 \frac{y}{Rk_0}, \tag{29}$$

a zatim

$$p = k_0^2 \cosh^2 \frac{\bar{y}}{R} = k_0^2\left(1 + \frac{\bar{y}^2}{R^2} + \frac{\bar{y}^4}{3R^4} + \ldots\right). \tag{30}$$

Deformaciju površine d_p odredit ćemo prema izrazu

$$d_p = p - 1, \tag{31}$$

odnosno približno

$$d_p = k_0^2\left(\frac{\bar{y}^2}{R^2} + \frac{\bar{y}^4}{3R^4} + \ldots\right) + k_0^2 - 1. \tag{32}$$

Dakle, ako je faktor lokalnog mjerila površina jednak 1, onda je deformacija površina jednaka 0, a to će biti onda kad je $\bar{y} = y = 0$. Borčić (1956) i Frančula (2004) ne raspravljaju o deformacijama površina. Kod Borčića (1976), riječ je o Gauss-Krügerovoj projekciji, ali je oblik formule isti. Umjesto izraza (32) uz vrijednost $k_0 = 0{,}9999$, $k_0^2 = 0{,}9998$ kod Borčića (1976) nema faktora k_0^2 ispred zagrade i izračunao je da je $0{,}9998 - 1 = -0{,}0002$

$$d_p = \frac{\bar{y}^2}{R^2} + \frac{\bar{y}^4}{3R^4} - 0{,}0002. \tag{33}$$

Razlog je vjerojatno u tome što množenje brojem $0{,}9998$ neznatno utječe na rezultat.

Primjer

Pretpostavimo da u uspravnoj Mercatorovoj projekciji sfere polumjera R=6370 km treba izraditi kartu Hrvatske. Neka se područje preslikavanja proteže od paralele 41°,61083 na jugu do paralele 46°,56083 na sjeveru. Traži se standardna paralela za koju će razlika između faktora lokalnog linearnog mjerila na sjevernoj paraleli i 1 biti jednaka razlici između 1 i faktora lokalnog linearnog mjerila na južnoj paraleli.

Označimo s k_j faktor lokalnog linearnog mjerila uzduž južne paralele, s k_s faktor lokalnog linearnog mjerila uzduž sjeverne paralele i s k_{sr} faktor lokalnog linearnog mjerila uzduž standardne paralele.
Prema formuli (25) možemo napisati

$$k_j = k_0 \cosh\frac{\bar{y}_j}{R},\ \ k_s = k_0 \cosh\frac{\bar{y}_s}{R},\ \ k_{sr} = k_0 \cosh\frac{\bar{y}_{sr}}{R}, \tag{34}$$

gdje smo s $\bar{y}_j$, $\bar{y}_s$ i $\overline{y_{sr}}$ označili odgovarajuće vrijednosti ordinata. Postavljeni uvjeti mogu se napisati ovako:

$$k_s - 1 = 1 - k_j \ \text{ i } \ k_{sr} = 1. \tag{35}$$

Iz (35) slijedi da je

$$k_{sr} = \frac{k_j + k_s}{2} \tag{36}$$

i zatim s obzirom na (25)

$$\cosh\frac{\bar{y}_{sr}}{R} = \frac{\cosh\frac{\bar{y}_j}{R} + \cosh\frac{\bar{y}_s}{R}}{2}. \tag{37}$$

Vrijednosti s desne strane u (37) mogu se izračunati jer je

$$\bar{y}_j = R\tanh^{-1}(\sin\varphi_j),\ \ \bar{y}_s = R\tanh^{-1}(\sin\varphi_s), \tag{38}$$

a geografske širine najjužnije i najsjevernije paralele su zadane. Nakon toga izračunamo $\cosh\frac{\bar{y}_{sr}}{R}$, a budući da je $k_{sr} = 1$, imamo

$$k_0 = \frac{1}{\cosh\frac{\bar{y}_{sr}}{R}}. \tag{39}$$

Sad možemo prema (34) izračunati k_j i k_s. Osim toga, iz $k_0 = \cos\varphi_{sr}$ možemo izračunati geografsku širinu standardne paralele. Za zadane vrijednosti

$$\varphi_j = 41°,61083 \ \text{ i } \ \varphi_s = 46°,56083 \tag{40}$$

račun daje

$$\varphi_{sr} = 44°,24437 \tag{41}$$

$$k_0 = 0{,}71637,\ k_j = 0{,}95813,\ k_s = 1{,}04187. \tag{42}$$

Parametar k_0 možemo interpretirati kao faktor lokalnog mjerila duljina za točke na ekvatoru. Prema (30), na južnoj paraleli je faktor lokalnog mjerila površina $p_j = 0{,}91802$, a na sjevernoj paraleli $p_s = 1{,}08548$.

5. Poprečna Mercatorova projekcija sfere

Ta se projekcija u literaturi još naziva Lambert-Gaussovom ili poprečnom konformnom cilindričnom projekcijom. Kose i poprečne projekcije sfere nastaju iz uspravnih tako da se umjesto geografskih koordinata φ i λ upotrijebe odgovarajuće sferne ili pseudogeografske koordinate φ' i λ'. Jednadžbe poprečne cilindrične projekcije bit će dakle

$$x = n\lambda', y = y(\varphi'), \tag{43}$$

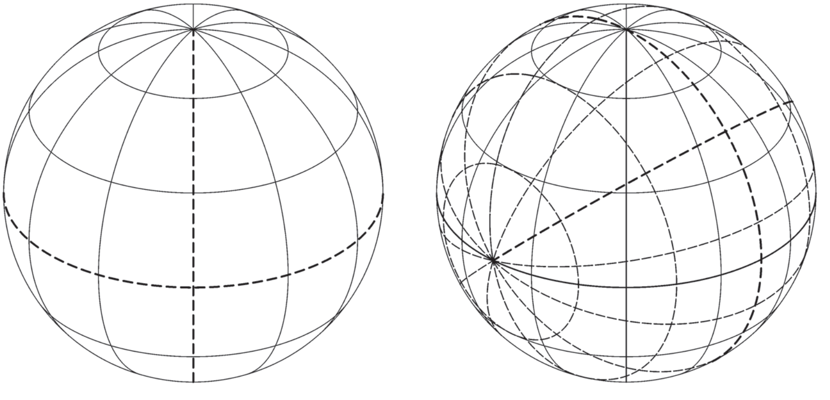
gdje su pseudogeografske koordinate φ', λ' povezane s geografskim koordinatama φ, λ na sljedeći način (Borčić 1955, str. 184; Frančula 2004, str. 64):

$$\sin\varphi' = \cos\varphi\sin\lambda, \tan\lambda' = \frac{\tan\varphi}{\cos\lambda}. \tag{44}$$

Pri tome je n konstanta projekcije, a λ se ne odnosi na početni meridijan, nego na srednji meridijan područja preslikavanja. Da bismo to naglasili, napisat ćemo umjesto (44) ovako

$$\sin\varphi' = \cos\varphi\sin(\lambda - \lambda_0), \tan\lambda' = \frac{\tan\varphi}{\cos(\lambda-\lambda_0)}. \tag{45}$$

Na taj smo način osigurali da slika srednjeg meridijana kojem odgovara geografska dužina λ_0 bude u središtu projekcije.



Slika 1. *Uspravna mreža sfernog koordinatnog sustava (lijevo) podudara se s geografskom mrežom meridijana i paralela. Poprečna mreža sfernog koordinatnog sustava (desno) koja se sastoji od pseudoparalela i pseudomeridijana (almukantarata i vertikala) nastaje rotacijom geografske mreže za 90° oko ishodišta.*

Na slici 1 prikazane su mreže meridijana i paralela od kojih ona na lijevoj strani odgovara geografskom koordinatnom sustavu, a ona s desne strane je mreža pseudoparalela i pseudomeridijana koja odgovara pseudogeografskom koordinatnom sustavu na kojem se temelje poprečne kartografske projekcije.

Formule za faktore lokalnih mjerila duljina, odnosno površina izgledaju ovako

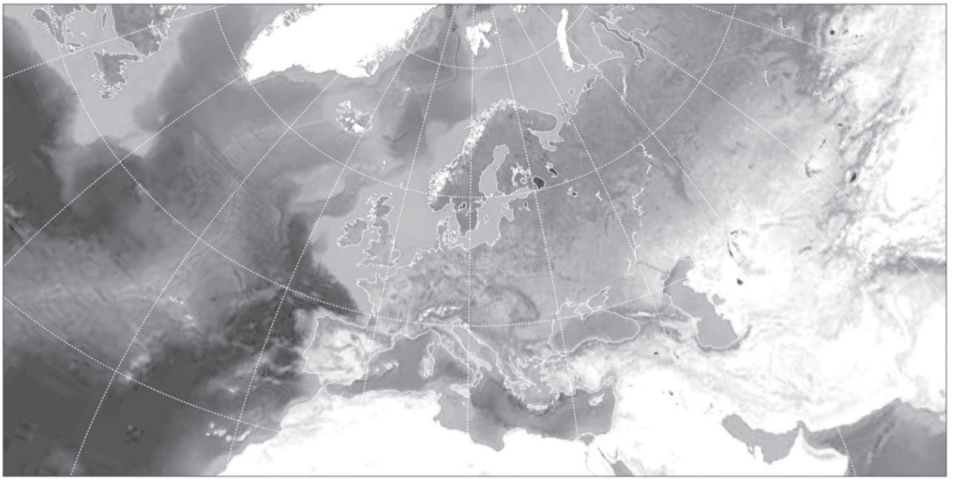
$$h(\varphi') = \frac{\sqrt{E}}{R} = \frac{1}{R}\frac{dy}{d\varphi'},\ k(\varphi') = \frac{\sqrt{G}}{R\cos\varphi'} = \frac{n}{R\cos\varphi'},\ p(\varphi') = \frac{n}{R^2\cos\varphi'}\frac{dy}{d\varphi'}. \quad (46)$$

Pri istraživanju deformacija možemo postupiti na nekoliko načina. Jedan je izraziti mjerila pomoću geografskih koordinata i na taj ih način dovesti u vezu s meridijanima i paralelama, drugi je proučavati njihova svojstva u odnosu na pseudoparalele i pseudomeridijane, a treći izraziti mjerila duljina s pomoću koordinata x i y u ravnini projekcije. Prvi pristup je relativno složen, a drugi i treći je moguće izravno preuzeti na temelju odgovarajućih formula izvedenih za uspravne projekcije.

Primjena formula (43) dat će sliku srednjeg meridijana položenu vodoravno, a sliku ekvatora okomito. S obzirom na to da smo navikli da je slika ekvatora postavljena vodoravno, a srednjeg meridijana okomito, tj. da je sjeverni pol "gore", a južni pol "dolje", obično se kod poprečnih projekcija zamijene koordinatne osi što znači da jednadžbe projekcije izgledaju ovako:

$$y = n\lambda',\ x = x(\varphi'), \quad (47)$$

pa i o tome treba povesti računa.



Slika 2. *Karta Europe u poprečnoj Mercatorovoj projekciji. G. Projector i world_topo_bathy_200407.jpg (softver i podaci: https://www.giss.nasa.gov/tools/gprojector/).*

Poprečna Mercatorova projekcija sfere ima jednadžbe

$$x = n\ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2}\right) = n\tanh^{-1}(\sin\varphi'),\ y = n\lambda', \quad (48)$$

odnosno

$$x = n \tanh^{-1}[\cos\varphi \sin(\lambda - \lambda_0)],\ y = n \tan^{-1} \frac{\tan\varphi}{\cos(\lambda-\lambda_0)}, \tag{49}$$

jer su pseudogeografske koordinate φ', λ' povezane s geografskim koordinatama φ, λ izrazom (45).

Na slici 2 prikazana je karta Europe u poprečnoj Mercatorovoj projekciji. Karta je izrađena s pomoću softvera G.Projector i podataka s karte world_topo_bathy_200407.jpg.

Ako određujemo faktore lokalnih mjerila duljina na temelju formula (48) na isti način na koji smo izveli te faktore za uspravnu Mercatorovu projekciju dobit ćemo

$$k = k_0 \cosh\frac{\bar{x}}{R}, \tag{50}$$

odnosno nakon razvoja u red

$$k = k_0\left(1 + \frac{\bar{x}^2}{2R^2} + \frac{\bar{x}^4}{24R^4} + \ldots\right). \tag{51}$$

Slično za faktore lokalnih mjerila površina

$$p = k_0^2 \cosh^2\frac{\bar{x}}{R}, \tag{52}$$

a zatim

$$p = k_0^2\left(1 + \frac{\bar{x}^2}{R^2} + \frac{\bar{x}^4}{3R^4} + \ldots\right). \tag{53}$$

Uočimo da smo u formulama za faktore lokalnih mjerila duljina i površina uspravne Mercatorove projekcije imali s desne strane $\bar{y}$, a u analognim formulama za poprečnu Mercatorovu projekciju stoji s desne strane $\bar{x}$ (koordinatni sustav je matematički).

Primjer

Pretpostavimo da u poprečnoj Mercatorovoj projekciji sfere polumjera $R = 6370$ km treba izraditi kartu Hrvatske. Srednji meridijan područja preslikavanja neka ima geografsku dužinu $\lambda_0 = 16°30'$. Pretpostavimo nadalje da je područje preslikavanja široko 250 km od srednjeg meridijana na istok i na zapad te da bi faktor lokalnog linearnog mjerila na srednjem meridijanu trebalo biti toliko manje od jedan koliko je na udaljenosti od 250 km od srednjeg meridijana istočno ili zapadno veće od jedan. Postavlja se pitanje raspodjele deformacija. Koliko treba uzeti k_0 i na kojoj udaljenosti od srednjeg meridijana će biti $k = 1$.

Iz jednadžbe $1 - k_0 = k - 1$ slijedi $k_0 = \frac{2}{1+\cosh\frac{\bar{x}}{R}}$, što uz $\bar{x} = 250$ km daje $k_0 = 0{,}9996$.

Nadalje, iz uvjeta $k=1$ slijedi $\cosh\frac{\bar{x}}{R}=\frac{1}{k_0}$, i zatim $\bar{x}=R\cosh^{-1}\frac{1}{k_0}$, što uz izračunani k_0 daje $\bar{x}=\pm 180$ km. Isti rezultat dobio bi se uz uvjet $p=1$. Na udaljenosti 250 km od srednjeg meridijana faktor lokalnog mjerila duljina bit će $k=k_0\cosh\frac{250}{R}=1{,}00037$, a faktor lokalnog mjerila površina $p=1{,}00074$.

6. Deformacije pri Gauss-Krügerovoj projekciji

Prema Borčiću (1976) faktor lokalnog mjerila duljina (ili u njegovoj terminologiji linearni modul) je približno

$$m=1+\frac{y^2}{2R^2}+\frac{y^4}{24R^4}, \tag{54}$$

ako je faktor lokalnog linearnog mjerila uzduž srednjeg meridijana jednak 1, odnosno općenito

$$m=m_0\left(1+\frac{y^2}{2R^2}+\frac{y^4}{24R^4}\right). \tag{55}$$

U izrazima (54) i (55) R je geometrijska sredina polumjera zakrivljenosti meridijana i polumjera zakrivljenosti presjeka po prvom vertikalu u promatranoj točki. Prema Borčiću (1976) faktor lokalnog mjerila površina (ili u njegovoj terminologiji površinski modul) je približno

$$p=1+\frac{y^2}{R^2}+\frac{y^4}{3R^4}, \tag{56}$$

odnosno

$$p=0{,}9999\left(1+\frac{y^2}{R^2}+\frac{y^4}{3R^4}\right)=1+\frac{y^2}{R^2}+\frac{y^4}{3R^4}-0{,}0002\,. \tag{57}$$

Pri tome izraz (56) vrijedi kad je na srednjem meridijanu deformacija duljina jednaka nuli, a izraz (57) kad je na srednjem meridijanu faktor lokalnog mjerila duljina jednak 0,9999, faktor lokalnog mjerila površina −0,9998 ili deformacije površina −0,0002. Osim toga, koordinatni sustav Gauss-Krügerove projekcije nije matematički ili desni, nego lijevi, tj. koordinatna os y usmjerena je u smjeru zapad-istok, a koordinatna os x u smjeru jug-sjever.

Nadalje, deformaciju površine Borčić određuje po formulama

$$d_p=\frac{y^2}{R^2}+\frac{y^4}{3R^4}, \tag{58}$$

odnosno

$$d_p=\frac{y^2}{R^2}+\frac{y^4}{3R^4}-0{,}0002\,. \tag{59}$$

opet ovisno o tome je li na srednjem meridijanu faktor lokalnog mjerila duljina jednak 1, izraz (58), ili je na srednjem meridijanu faktor lokalnih deformacija duljina jednak 0,9999, izraz (59). To znači da je u prvom slučaju na srednjem meridijanu, odnosno na osi x, deformacija površine jednaka nuli, a u drugom slučaju da je jednaka $d_p = -0{,}0002$ ili da je na 10 000 m^2 (na jednom hektaru) deformacija 2 m^2. Svaki je hektar površine na srednjem meridijanu manji za 2 m^2, a na kraju meridijanske zone veći za 2 m^2.

Ako je na srednjem meridijanu linearna deformacija jednaka nuli, onda su površine u ravnini karte u toj projekciji uvijek veće od onih na elipsoidu.

Ako gledamo umanjene deformacije duljina ili površina, deformacije površina na srednjem meridijanu, odnosno na osi x, iznose −2 m^2, na 90. kilometru su 0, a na 127. kilometru +2 m^2 (slika 3).

Borčić (1976) na kraju zaključuje da ćemo o deformacijama u ovoj projekciji voditi računa u izuzetnim slučajevima, kad je riječ o površinama velike vrijednosti ili o površinama većih područja.

Ponekad je potrebno odrediti razliku između duljina na elipsoidu i na fizičkoj Zemljinoj površini (Borčić 1976). Ta razlika ovisi o nadmorskim visinama točaka. Ako se ne traži velika točnost, može se uzeti u obzir samo srednja nadmorska visina. Označimo li s d horizontalnu duljinu na fizičkoj Zemljinoj površini, s d_0 duljinu na elipsoidu, h srednju nadmorsku visinu i R srednji Zemljin radijus, onda vrijedi

$$d_0 = m_h d, \tag{60}$$

gdje je

$$m_h = \frac{R}{R+h} \,. \tag{61}$$

Faktor m_h određuje odnos između duljina na Zemljinoj fizičkoj površini i njima odgovarajućih duljina na plohi elipsoida. Npr. ako je $h = 500$ m, onda je $m_h = 0{,}9999$.

Ako je potrebno odrediti razliku između neke duljine na Zemljinoj fizičkoj površini i duljine u ravnini projekcije (na karti), onda se treba poslužiti skupnim faktorom (Borčić 1976). Taj skupni faktor m_s bit će jednak umnošku faktora lokalnog mjerila duljina m i m_h, tj.

$$m_s = m\, m_h \tag{62}$$

Ako je riječ o konformnom preslikavanju, onda će skupni faktor površina p_s biti jednak umnošku kvadrata od m i m_h, tj.

$$p_s = m^2 m_h^2 \,. \tag{63}$$

7. Poprečna Mercatorova projekcija elipsoida za Hrvatsku (HTRS96/TM)

Koordinatnim sustavom poprečne Mercatorove projekcije – HTRS96/TM obuhvaćeno je cijelo područje Republike Hrvatske sa srednjim meridijanom 16°30' i faktorom lokalnog linearnog mjerila 0,9999 uzduž srednjeg meridijana. Posljedica toga je da su linearne deformacije u područjima udaljenim manje od 127 km od srednjeg meridijana manje od 1dm na 1 km, a što se smatra prihvatljivim za radove katastra, inženjerske geodezije i topografije.

U ostalim područjima Republike Hrvatske koja su udaljena više od 127 km istočno ili zapadno od srednjeg meridijana potrebno je prilikom računanja u ravnini projekcije uzeti u obzir i deformacije projekcije. Kako u praktičnim radovima ne bi trebalo uvijek iznova razmišljati o tome treba li ili ne treba voditi brigu o deformacijama projekcije, preporuča se upotreba takvog softverskog rješenja koje će uvijek voditi računa o mogućim deformacijama. Ako su one zanemarive, jasno je da njihov utjecaj neće doći do izražaja u konačnom rezultatu (DGU 2009).

U toj projekciji, kao i kod Gauss-Krügerove projekcije, razlikujemo reducirane i nereducirane koordinate i označavamo:

E = reducirana istočna koordinata

N = reducirana sjeverna koordinata

$\overline{\mathrm{E}}$ = nereducirana istočna koordinata, tj. $\overline{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{E}-500000}{0{,}9999}$

$\overline{\mathrm{N}}$ = nereducirana sjeverna koordinata, tj. $\overline{\mathrm{N}} = \frac{\mathrm{N}}{0{,}9999}$

U tehničkim specifikacijama (DGU 2009) nalaze se formule za računanje faktora lokalnog linearnog mjerila iz pravokutnih koordinata u projekciji. Osnovne formule imaju točnost 10^{-15}, a pojednostavljene formule imaju točnost 10^{-6}. Ova posljednja točnost dovoljna je za sva praktična računanja, a proizlazi iz primjene formule za faktor lokalnog linearnog mjerila na srednjem meridijanu:

$$m = 1 + \frac{1+\eta^2}{2N^2}\overline{\mathrm{E}}^2 . \qquad (64)$$

U toj je formuli m faktor lokalnog linearnog mjerila na srednjem meridijanu, $\overline{\mathrm{E}}$ nereducirana istočna koordinata, N (u kurzivu da se razlikuje od reducirane sjeverne koordinate N) polumjer zakrivljenosti presjeka elipsoida po prvom vertikalu

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi_F}} , \qquad (65)$$

i uobičajena oznaka

$$\eta^2 = e'^2\cos^2\varphi_F . \qquad (66)$$

Vrijednosti od N i η^2 treba izračunati za $\varphi = \varphi_F$, a geodetska širina φ_F može se izračunati prema formulama za geodetsku širinu ako je zadana nereducirana sjeverna koordinata točke (DGU 2009). U posebnom slučaju, ako u (64) umjesto $\frac{1+\eta^2}{N^2}$ po uzoru na Borčića stavimo $\frac{1}{R^2}$, dobit ćemo

$$m = 1 + \frac{\overline{\mathrm{E}}^2}{2R^2}. \tag{67}$$

Budući da je faktor lokalnog linearnog mjerila uzduž srednjeg meridijana jednak 0,9999, to će formula za faktor lokalnog linearnog mjerila u bilo joj točki projekcije biti

$$m = 0{,}9999\left(1 + \frac{\overline{\mathrm{E}}^2}{2R^2}\right). \tag{68}$$

U tehničkim specifikacijama (DGU 2009) za praktičnu upotrebu projekcije HTRS96/TM ne nalazimo izraze za deformaciju površina. Međutim, budući da je riječ o konformnom preslikavanju za koje je $p = m^2$, lako možemo dobiti

$$p = 0{,}9998\left(1 + \frac{\overline{\mathrm{E}}^2}{2R^2}\right)^2 \approx 0{,}9998\left(1 + \frac{\overline{\mathrm{E}}^2}{R^2}\right). \tag{69}$$

Izraz za deformaciju površina bit će

$$d_p = p - 1 = 0{,}9998\left(1 + \frac{\overline{\mathrm{E}}^2}{R^2}\right) - 1 \approx \left(\frac{\overline{\mathrm{E}}}{R}\right)^2 - 0{,}0002. \tag{70}$$

Napomena

U Zakonu o državnoj izmjeri i katastru nekretnina (DGU 2024) piše: „Površine katastarskih čestica te površine njihovih dijelova koji se upotrebljavaju na različite načine su površine u službenoj ravninskoj kartografskoj projekciji iz članka 12. stavka 1. ovoga Zakona, a iskazuju se u kvadratnim metrima." Iako smo već više puta pisali da nema smisla govoriti "ravninska" kartografska projekcija, jer su sve kartografske projekcije preslikavanja u ravninu (vidi npr. Lapaine 2020), pridjev "ravninska" i dalje se provlači kroz službene dokumente. Osim toga, u spomenutom zakonu nigdje se ne spominje potreba uzimanja u obzir deformacija zbog projekcije.

Primjer

Neka se na udaljenosti $\overline{\mathrm{E}} = 200$ km od srednjeg meridijana područja preslikavanja nalazi zemljište veličine 20 000 ha (npr. oranice Belja, HTE 2025). Deformacija površina prema formuli (70) bit će približno $d_p = 0{,}000786$. Ako taj broj pomnožimo s 20 000 ha, dobit ćemo 15,7 ha. Dakle, ako računamo površinu toga zemljišta u projekciji (npr. iz koordinata lomnih točaka) ne uzimajući u obzir deformaciju površine zbog projekcije, dobit ćemo površinu koja je za 15,7 ha veća od stvarne površine.

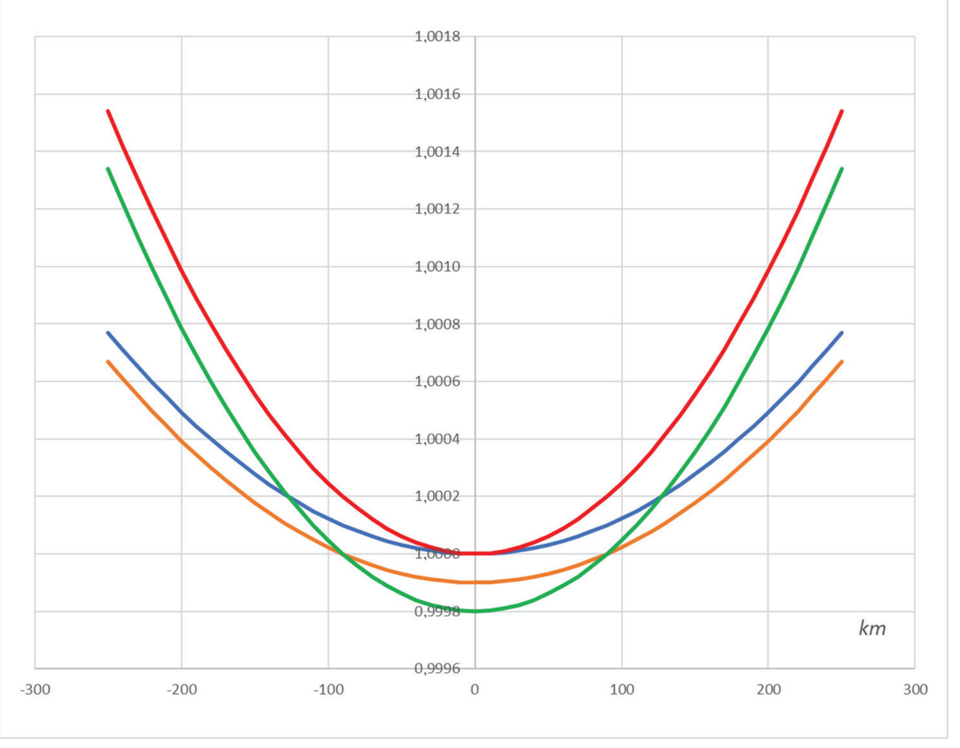
8. Zaključak

Članak se bavi deformacijama površina konformnih cilindričnih projekcija. U tu svrhu istražuju se uspravna i poprečna Mercatorova projekcija sfere, Gauss-Krügerova projekcija i poprečna Mercatorova projekcija elipsoida za Hrvatsku, odnosno HTRS96/TM. Pokazuje se da su izrazi za faktore lokalnih mjerila duljina i površina za sve te projekcije istoga oblika, samo treba uočiti na što se pojedine oznake odnose. Pregled konačnih formula za faktore lokalnih deformacija duljina i površina u navedenim projekcijama dan je u tablici 1. Za svaku je projekciju za ilustraciju odabran i izrađen po jedan primjer raspodjele deformacija.

Tablica 1. *Pregled izraza za faktore lokalnih deformacija duljina i površina u uspravnoj i poprečnoj Mercatorovoj projekciji sfere, Gauss-Krügerovoj projekciji i poprečnoj Mercatorovoj projekciji elipsoida za Hrvatsku (HTRS96/TM). Sve oznake objašnjene su u prethodnim poglavljima.*

	Faktor lokalnih deformacija duljina	**Faktor lokalnih deformacija površina**
Uspravna Mercatorova projekcija sfere	$k = k_0 \cosh\frac{\bar{y}}{R}$ (25) $k = k_0\left(1 + \frac{\bar{y}^2}{2R^2} + \frac{\bar{y}^4}{24R^4} + \ldots\right)$	$p = k_0^2 \cosh^2\frac{\bar{y}}{R}$ $p = k_0^2\left(1 + \frac{\bar{y}^2}{R^2} + \frac{\bar{y}^4}{3R^4} + \ldots\right)$
Poprečna Mercatorova projekcija sfere	$k = k_0 \cosh\frac{\bar{x}}{R}$ $k = k_0\left(1 + \frac{\bar{x}^2}{2R^2} + \frac{\bar{x}^4}{24R^4} + \ldots\right)$	$p = k_0^2 \cosh^2\frac{\bar{x}}{R}$ $p = k_0^2\left(1 + \frac{\bar{x}^2}{R^2} + \frac{\bar{x}^4}{3R^4} + \ldots\right)$
Gauss-Krügerova projekcija	$m = 0{,}9999\left(1 + \frac{\bar{y}^2}{2R^2} + \frac{\bar{y}^4}{24R^4}\right)$	$p = 0{,}9998\left(1 + \frac{\bar{y}^2}{R^2} + \frac{\bar{y}^4}{3R^4}\right) =$ $= 0{,}9998 + \frac{\bar{y}^2}{R^2} + \frac{\bar{y}^4}{3R^4}$
HTRS96/TM	$m = 0{,}9999\left(1 + \frac{\bar{E}^2}{2R^2} + \frac{\bar{E}^4}{24R^2}\right)$	$p = 0{,}9998\left(1 + \frac{\bar{E}^2}{2R^2} + \frac{\bar{E}^4}{24R^2}\right)^2 \approx$ $\approx 0{,}9998\left(1 + \frac{\bar{E}^2}{R^2} + \frac{\bar{E}^4}{3R^2}\right)$

Na slici 3 dan je grafički prikaz faktora lokalnih mjerila duljina i površina koji vrijedi za sve četiri istražene projekcije. Sa slike 3 se vidi kako udaljenost od srednjeg meridijana područja preslikavanja utječe na raspodjelu deformacija.



Slika 3. *Raspodjela linearnih i površinskih deformacija kod konformnih cilindričnih projekcija. Na horizontalnoj osi su kilometri, a na vertikalnoj faktori lokalnih linearnih mjerila (plavo i oker) te faktori lokalnih mjerila površina (crveno i zeleno).*

Plava boja: deformacije duljina uz $k_0 = 1$

Oker: deformacije duljina uz $k_0 = 0{,}9999$

Crveno: deformacije površina uz $k_0 = 1$

Zeleno: deformacije površina uz $k_0 = 0{,}9999$

Napomene

Zakon o državnoj izmjeri i katastru nekretnina propisuje da se površine katastarskih čestica te površine njihovih dijelova koji se upotrebljavaju na različite načine određuju u službenoj kartografskoj projekciji. Međutim, u tom zakonu nigdje se ne spominje potreba uzimanja u obzir deformacija zbog projekcije. Ipak, u Tehničkim specifikacijama za postupke računanja i podjelu na listove službenih karata i detaljne listove katastarskog plana u kartografskoj projekciji Republike Hrvatske – HTRS96/TM (DGU 2009) piše da je u područjima Republike Hrvatske koja su udaljena više od 127 km istočno i zapadno od srednjeg meridijana potrebno prilikom računanja u ravnini projekcije uzeti u obzir i deformacije projekcije.

Spomenimo na kraju da iako je bilo riječi samo o cilindričnim projekcijama, nigdje u tekstu nije bio spomenut ni valjak ni cilindar. Naime, opisane cilindrične projekcije ne nastaju ni preslikavanjem ni projiciranjem na plašt valjka. Nazivamo ih cilindričnima zato jer se karta izrađena u takvoj projekciji može savinuti u plašt valjka, odnosno cilindra.

ZAHVALA. Autor zahvaljujem anonimnim recenzentima na korisnim primjedbama.

Literatura

Borčić, B. (1955): Matematička kartografija, Tehnička knjiga, Zagreb.

Borčić, B. (1976): Gauss-Krügerova projekcija meridijanskih zona, Sveučilište u Zagrebu, Geodetski fakultet, Zagreb.

DGU (2009): Tehničke specifikacije za postupke računanja i podjelu na listove službenih karata i detaljne listove katastarskog plana u kartografskoj projekciji Republike Hrvatske – HTRS96/TM, Državna geodetska uprava, Zagreb.

DGU (2024): Zakon o državnoj izmjeri i katastru nekretnina, NN 152/2024, NN 112/2018.

Frančula, N. (2004): Kartografske projekcije, skripta, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.

Frančula, N., Lapaine, M. (2008): Geodetsko-geoinformatički rječnik, Državna geodetska uprava, Zagreb.

HTE (2025): Belje plus d.o.o., Hrvatska tehnička enciklopedija, Leksikografski zavod Miroslav Krleža,
https://tehnika.lzmk.hr/belje-plus-d-o-o/, pristupljeno 4. 1. 2025.

Lapaine, M. (2020): What Are Map Projections and Why Are They So Called? / Što su kartografske projekcije i zašto se tako zovu? Kartografija i geoinformacije, vol. 19, br. 34, 94–103.

Snyder, J. P. (1987): Map Projections: A Working Manual, USGS Professional Paper 1395, USGS, Washington, DC, USA.

Area Distortions in the Normal and Transverse Mercator Projection

ABSTRACT. The article deals with area distortions in conformal cylindrical projections. For this purpose, the normal and transverse Mercator projection of the sphere, the Gauss-Krüger projection and the transverse Mercator projection of the ellipsoid for Croatia, i.e. HTRS96/TM, are researched. It is shown that the expressions for the local scale factors of length and area for all these projections are of the same form, it is only necessary to note what the individual symbols refer to. This means that all four projections are related and that we can study them in this way. For each projection, one example of the distribution of distortions was selected and created for illustration. The Act on State Survey and Real Estate Cadastre stipulates that areas are determined in the official map projection but does not mention the need to consider distortions that are inherent in the projection. This article should influence a change in such practice.

Keywords: map projections, projection distortion, Mercator projection, transverse Mercator projection, Gauss-Krüger projection, HTRS96/TM.

Primljeno / Received: 2025-01-10

Prihvaćeno / Accepted: 2025-05-25