Hrvatski matematički elektronički časopis *math.e*

Broj 13

http://e.math.hr/

Distribucija prim brojeva i Riemannova zeta-funkcija; prvi dio

Boris Širola

Sadržaj:

Uvod

Kad su jednom prigodom, prije stotinjak godina, pitali *Davida Hilberta* bi li mogao reći koji bi to bio glavni problem (tadašnje) matematike, on je odgovorio: "*Riemannova hipoteza* (RH); to je najveći problem svjetske znanosti uopće, a ne samo matematike!" Naravno, i onda, kao i danas, mnogi bi nematematičari imali (s punim pravom) štošta prigovoriti takvom odgovoru. Ali isto tako, i onda, kao i danas, najveći će dio matematičara reći da RH doista jest centralni matematički problem. Naša je namjera ovdje dati, ili barem pokušati dati, odgovore na sljedeća dva pitanja. Prvo: **što je Riemannova hipoteza?** I drugo: **Zašto je sama RH, i "sve oko nje", toliko važno za matematiku?** Kažimo odmah da je odgovor na prvo pitanje zapravo mnogo lakši nego onaj drugi; iako, kako ćemo barem malo vidjeti, poprilično je truda potrebno da bi se krenulo "od nule", i onda u jednom trenu moglo reći da doista razumijemo sam problem i (donekle) zašto to stvarno ima karizmu "tvrda oraha". Naime, drugi odgovor, uz neke neupitne razloge koji govore da bi ispravnost RH imala brojne bitne posljedice u okviru *teorije brojeva*, zapravo mora imati i jednu "filozofsko- špekulativnu dimenziju". Temeljni razlog ovom posljednjem vezan je uz termin "važnost" koji je, lako ćemo se svi složiti, "apsolutno relativan". Jer čak i u okviru same matematike, moguće je da npr. neka fundamentalna, duboka i/ili originalna spoznaja, ili pak rješenje nekog teškog i važnog problema, u okviru neke matematičke discipline, "ostavi ravnodušnim" matematičare koji se time ne bave. (Naprimjer, nedavni dokaz glasovite slutnje Shimura-Taniyama teško da će pobuditi veću pozornost i uzbuđenje kod nekoga tko se bavi primijenjenom matematikom.) Zato bi jedan dio odgovora mogao biti i ovakav: Tijekom 150 godina, u pokušajima velikog broja slavnih, i manje slavnih matematičara da dokažu RH, napravljen je velik napredak i razvijene su mnoge nove teorije i metode, s mnoštvom velikih teorema, u okvirima mnogih matematičkih disciplina; kako teoriji brojeva, tako i u *kompleksnoj analizi*, *algebarskoj geometriji*, *teoriji reprezentacija* itd. (Ako ništa drugo, uz nezaobilazne muke, patnje, frustracije i neprospavane noći, u rečenih je 150 godina plejada matematičara imala i vrhunsku zabavu; koja još traje...)

Sada ćemo dati "prvu grubu aproksimaciju" odgovora na gore spomenuto prvo pitanje. (Nije nam ovdje namjera navesti nešto u nadi da će većina onih koji ovo čitaju odmah i točno razumijeti o čemu je riječ. Namjera je tek "detektirati" neke nepoznate pojmove te eventualno prvi put čuti neke tvrdnje i/ili činjenice, kako bismo dobili ideju za plan o tome "kako dalje". Poseban je naglasak, ili bolje rečeno zamolba, čitatelju da se nikako ne obeshrabri od mogućeg početnog "bombardiranja" mnogim "nepoznanicama"!)

Ako je $s \in \mathbf{C}$, takav da je njegov realni dio $\mathrm{Re}\, s > 1$, onda definiramo funkciju $\zeta(s)$ kao red

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots .$$

Budući da gornji red konvergira, na $\mathrm{Re}\, s > 1$, onda je sa $s \mapsto \zeta(s)$ dobro definirana funkcija. Ta se funkcija zove **Riemannova zeta-funkcija**. Budući da je konvergencija reda koji definira $\zeta(s)$ apsolutna i lokalno uniformna, na $\mathrm{Re}\, s > 1$, lako se pokazuje da je ta funkcija na spomenutom skupu štoviše i analitička. No onda je razumno pitati postoji li njezino *analitičko/meromorfno produljenje* na neki veći podskup od $\mathbf{C}$. Kao prvi korak, pokazuje se da postoji meromorfno produljenje od $\zeta(s)$ na $\mathrm{Re}\, s > 0$, s jedinim polom, 1. reda, u $s = 1$. Sasvim precizno, ako definiramo funkciju $\zeta_2(s)$ redom

$$\zeta_2(s) := 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \ldots,$$

onda je ta funkcija analitička na $\mathrm{Re}\, s > 0$. Sa

$$\zeta(s) := \left(\frac{1}{1-1/2^{s-1}} \right) \zeta_2(s)$$

definirano je (jedinstveno!) meromorfno produljenje od $\zeta(s)$ sa skupa $\mathrm{Re}\, s > 1$ na skup $\mathrm{Re}\, s > 0$; u $s = 1$ imamo pol, s reziduumom $Res_{s\,=\,1}\, \zeta(s) = 1$. Spomenimo ovdje, zbog važnosti za teoriju, i tzv. integralni oblik meromorfnog produljenja funkcije $\zeta(s)$ s $\mathrm{Re}\, s > 1$ na $\mathrm{Re}\, s > 0$:

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}}\, dx;$$

ovdje je, za $x \in \mathbf{R}$, $\{ x \} := x - \lfloor x \rfloor$ tzv. *razlomljeni dio* od x. Sljedeći je korak pokazati da $\zeta(s)$ štoviše ima meromorfno produljenje na cijeli $\mathbf{C}$, ili drukčije rečeno da ima analitičko produljenje na **C** \ {1} te da zadovoljava **funkcionalnu jednadžbu**

$$Z(s) = Z(1 - s), \qquad \textbf{(FJ)}$$

gdje je

$$Z(s) := \pi^{-s/2}\, \Gamma(s/2)\, \zeta(s)$$

tzv. **kompletirana zeta-funkcija**; ovdje je Γ dobro poznata **gama-funkcija**. Iz (**FJ**) lako se dobije i sljedeći identitet, koji se također zove *funkcionalna jednadžba*:

$$\zeta(1 - s) = \frac{2}{(2\pi)^s}\, \Gamma(s) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(s). \qquad \textbf{(FJ)}$$

Primijetimo ovdje fundamentalnu ulogu funkcionalne jednadžbe za teoriju. Naime, ona govori da ako znamo vrijednost zeta-funkcije ζ(s) u proizvoljnom kompleksnom broju $s \neq 0,1$, onda znamo i vrijednost zeta-funkcije u broju $1 - s$, koji je *centralno-simetričan* broju s u odnosu na broj $1/2 \in$ **C**. Ili drugim riječima, dovoljno je razumijeti zeta-funkciju ζ(s) npr. na skupu $\mathrm{Re}\, s \geq 1/2$.

Dakle, sada imamo ζ(s), funkciju koja je analitička na **C** \ { 1 }, s polom 1. reda u $s = 1$. Onda možemo postaviti prirodno pitanje koje se na prvi pogled čini ne sasvim preciznim, a možda i malo naivnim, no pokazuje se da je ono zapravo nevjerojatno duboko i smisleno:

Što je skup nultočaka $\mathcal{N}(\zeta)$ od zeta-funkcije $\zeta(s)$?

Prvi korak prema željenom odgovoru na to pitanje je jednostavna posljedica jedne druge fundamentalne opservacije, koju dugujemo *L. Euleru*, o vezi zeta-funkcije i skupa prim brojeva $\mathcal{P}$ = { 2,3,5,7,11,... } u **N**. To je tzv. **Eulerova produktna formula**

$$\zeta(s) = \Gamma_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \qquad \mathrm{Re}\, s > 1. \qquad \textbf{(EPF)}$$

Spomenuta jednostavna posljedica od (**EPF**) glasi:

ζ(s) *nema nultočaka na poluravnini* $\mathrm{Re}\, s > 1$.

Drugi je korak dokaz sljedećeg netrivijalnog i važnog rezultata koji je, među ostalim, bio i ključni moment u slavnom dokazu tzv. *Teorema o prim brojevima*, koji su na kraju 19. stoljeća dali, neovisno jedan o drugome, *J. Hadamard* i *C.-J. de la Vallée Poussin*; više o tome kasnije.

Teorem.
Zeta-funkcija $\zeta(s)$ nema nultočaka na pravcu Re $s = 1$.

Dalje, kao jednostavna posljedica (**FJ**), pokaže se ova činjenica:

$\zeta(s)$ *ima nultočke u* $s = -2, -4, -6, ...;$

to su tzv. **trivijalne nultočke** zeta-funkcije. Isto tako, lako se vidi da je posebno $\zeta(0) = -1/2$, a onda kao posljedicu gornjeg teorema, i ponovo funkcionalne jednadžbe, imamo ovu činjenicu:

$\zeta(s)$ *nema nultočaka na pravcu* Re $s = 0$.

Kao rezime svega do sada rečenog, slijedi da se u vezi s gore postavljenim pitanjem o nultočkama zeta-funkcije moramo koncentrirati na (otvorenu) "prugu"

$0 < \mathrm{Re}\, s < 1,$

u kompleksnoj ravnini **C**. Naime, sve (eventualne) ne-trivijalne nultočke zeta-funkcije $\zeta(s)$ nalaze se unutar te pruge, koja se zove **kritična pruga**. Teorija Riemannove zeta-funkcije (i mnogih njezinih generalizacija, kao što su razne vrste tzv. *L-funkcija*), u posljednjih stotinjak godina, bavi se poglavito problemom *lociranja skupa nultočaka* $\mathcal{N}(\zeta)$ unutar kritične pruge. Pritom, kao glavni cilj i glavna nit vodilja u teoriji, figurira glasovita slutnja *B. Riemanna*, koja se zove **Riemannova hipoteza**:

(**RH**) *Sve (netrivijalne) nultočke zeta-funkcije* $\zeta(s)$ *nalaze se na pravcu* Re $s = 1/2$.

Kažimo ovdje tek dvije stvari o (**RH**). Prvo: unatoč detaljnom proučavanju svih pronađenih Riemannovih rukopisa/neobjavljenih radova, koji se nalaze u Niedersächische Staats und Universitäts Bibliothek u Götttingenu, do dana današnjeg nisu jasni svi razlozi koji su ga ponukali na formulaciju te glasovite slutnje. I drugo: iako je velik broj eksperata danas sklon vjerovati da (**RH**) jest točna, mnogi će ipak reći da postoji "realna mogućnost" i za onaj drugi (jako neželjeni!) ishod. Bilo kako bilo, u Odjeljku 7 vidjet ćemo da su mnogi važni i duboki rezultati, u smjeru (eventualnog) dokaza (**RH**), dobiveni. (A to će onda dati i neke vrlo "uvjerljive" razloge za spomenuto vjerovanje da (**RH**) doista stoji.) Ali isto tako, moglo bi se reći kako je zapravo nevjerojatno da se usprkos enormnim naporima brojnih matematičara, u izvjesnom smislu, još uvijek malo zna o skupu nultočaka $\mathcal{N}(\zeta)$.

Ovaj je pregledni rad prvi dio nečega što bi se moglo zvati "Uvod u Analitičku teoriju brojeva; Riemannova zeta-funkcija i Riemannova hipoteza"; za više detalja vidjeti npr. [Ed], [Pa] i [Ch], ili [Iv] i [Ti] ako se želi doći još dalje. Kao što smo već rekli, namjera je pokušati objasniti što je teorija Riemannove zeta-funkcije, što je RH i kakve to sve ima veze s nekim drugim problemima matematike i/ili teorijama. Ali, kao što se već moglo vidjeti iz gore navedenoga, nije baš sasvim jednostavno govoriti o tim stvarima nemamo li neko minimalno predznanje o analitičkim funkcijama i elementarnoj teoriji brojeva. Imajući to na umu, u nadi da se "netrenirani" čitatelj neće brzo "umoriti", napravili smo jedan kompromis u našem izlaganju. Naime, neminovno je kada je riječ o ovakvim situacijama ("razuman" opseg/duljina rada), da većinom moramo "preskakati" znatne dijelove teorija (uglavnom analitičke teorije brojeva i teorije analitičkih funkcija) da bismo dobili povezanu i smislenu, a u isto vrijeme dosta kratku "priču". No, takav pristup nosi "realnu opasnost" da onoga tko to čita ti "skokovi" za koje nismo dali odgovarajuće argumente stavljaju u "nelagodan osjećaj". Zato se naš kompromis sastoji u sljedećem. U ovom prvom dijelu, nakon što smo zapravo već rekli što je RH, s podosta detalja u dva odjeljka govorimo o nekim stvarima koje su priprema za ono što će slijediti. Tako u Odjeljku 1, koji nosi naslov "Kompleksna analiza", dajemo kratak pregled nekih osnovnih pojmova i rezultata o analitičkim funkcijama, koji su u isto vrijeme nezaobilazno oruđe analitičke teorije brojeva. Taj je odjeljak zamišljen kao skup "naputaka i komentara" koji će čitatelju pomoći kada (eventualno) samostalno krene na "put" od definicije derivacije kompleksne funkcije pa do fundamentalnog Hadamardova teorema faktorizacije. Odjeljak 2 ima za namjeru staviti analitičku teoriju brojeva u "povijesni kontekst". Naime, ta je teorija fundirana u 19. stoljeću, u radovima niza matematičara: npr. Gaussa, Dirichleta, Riemanna, Hadamarda, *von Mangoldta*, *Mertensa* i dr. Kao početak uzima se rad na dva velika problema tadašnje matematike, koji je rezultirao dvama osnovnim teoremima: Teoremom o prim brojevima i Dirichletovim teoremom o prim brojevima u aritmetičkim nizovima. U Odjeljku 2 precizno formuliramo te teoreme i dajemo neke potrebne napomene i argumente. Napokon, kao treći dio toga odjeljka, s dosta detalja dajemo tek mali dio cijele teorije zeta-funkcije; preciznije, računamo $\zeta(2k)$, za $k \in \mathbf{N}$. Tu nam je namjera bila pokušati na primjeru dati "osjećaj" da se vidi koja to vrsta argumenata i/ili rezultata figurira u teoriji.

Namjera je, u planiranom drugom dijelu ovog rada, govoriti o sljedećim temama:

3. L-funkcije i Dirichletov teorem
4. Teorem o prim brojevima
5. Gama-funkcija
6. Funkcionalna jednadžba
7. Nultočke zeta-funkcije

U Odjeljcima 3 i 4 navest ćemo, uglavnom bez puno argumenata, glavne korake u dokazima navedenih teorema, te objasniti neke važne pojmove kao što je npr. pojam L-funkcije. Odjeljci 5 i 6 navest će, ukratko, činjenice o gama-funkciji i o funkcionalnoj jednadžbi. U Odjeljku 7 reći ćemo koji su to glavni do danas poznati rezultati o nultočkama zeta-funkcije, te zašto je RH važan matematički problem.

Naglasimo ovdje da ovaj rad nema nikakvu namjeru niti spomenuti makar i najmanji dio onoga što je, na ovaj ili onaj način, u cijelosti ili dijelom, proizišlo iz klasične teorije zeta-funkcije i Dirichletovih L-funkcija (npr. modularne i automorfne forme, razne druge vrste L-funkcija, eliptičke krivulje itd.). Zainteresirani će čitatelj zasigurno lako doći do eventualno potrebne literature.

Na kraju ovog Uvoda ugodna mi je dužnost zahvaliti svojim prijateljima i kolegama A. Dujelli, I. Gusiću i M. Vukoviću na nekim korisnim savjetima i

napomenama u vezi s ovim radom.

Napomena. Pri spominjanju prezimena nekih slavnih matematičara, s pomoću "hiperlinka" (veze), sugerira se čitatelju da dozna više detalja, npr. na [Hi]. Isto tako, naglasimo da se o nekim neobjašnjenim pojmovima i/ili rezultatima u tekstu više može pronaći npr. na [Wi].

1. Kompleksna analiza

Teorija Riemannove zeta-funkcije i raznih drugih sličnih objekata (npr. L-funkcija) pripada grani teorije brojeva koja se zove *analitička teorija brojeva*. Ovdje pridjev "analitička" stoji zato jer tu kao dva glavna izvora korištenih metoda i rezultata jesu kompleksna analiza i (komutativna) *harmonijska analiza*; vidi Odjeljak 6. Glavni je cilj ovog uvodnog odjeljka dati koncizan pregled kroz materiju kompleksne analize, potrebne za ono što slijedi. Napomenimo da se dobar dio onoga što nama ovdje treba predaje u okviru kolegija "Kompleksna analiza" i "Teorija analitičkih funkcija" za studente PMF-MO-a. (Za više detalja i značenje nekih pojmova koji nisu dolje precizno objašnjeni, vidite npr. [KK], [Un]; za temeljitije proučavanje kompleksne analize vidite npr. [Ma].)

Za funkciju $f : \Omega \to \mathbf{C}$, gdje je skup $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ otvoren, kažemo da je *derivabilna u točki* $z_0 \in \Omega$ ako postoji limes

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0};$$

broj f &prime(z_0) zovemo *derivacijom* od f u z_0. Kažemo da je f *derivabilna na* Ω, ako je ona derivabilna u svakoj točki z_0 iz Ω. Kao fenomenalna i gotovo nevjerojatna pokazuje se činjenica da svaku derivabilnu funkciju $f : \Omega \to \mathbf{C}$ možemo u "maloj" okolini bilo koje točke $z_0 \in \Omega$ razviti u *Taylorov red*

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n (z - z_0)^n, \qquad a_n \in \mathbf{C}.$$

Podsjetimo da se funkcije koje imaju Taylorov razvoj još zovu i *analitičke funkcije*, pa tako imamo da su pojmovi "derivabilna funkcija" i "analitička funkcija", u kompleksnoj analizi, sinonimi. Iz tog se razloga kompleksna analiza često zove i *teorija analitičkih funkcija*.

Dalje se pokazuje i ovaj jednostavan, ali za nas ovdje vrlo bitan rezultat.

Teorem a.
Ako je funkcija $f : \Omega \to \mathbf{C}$ derivabilna i različita od konstante, onda je svaka njezina nultočka *izolirana*. Nadalje, skup $\mathcal{N}(f)$, nultočaka od f, je prebrojiv.

Ako je $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ neki podskup i $f : \Omega \to \mathbf{C}$ funkcija, kažemo da je točka $z_0 \in \operatorname{Int} \overline{\Omega}$ (:= nutrina zatvarača od Ω) *singularitet* od *f*, ako *f* u z_0 nije derivabilna ili uopće nije definirana; nas zanimaju samo funkcije s *izoliranim singularitetima*. Dobro je poznata podjela singulariteta na *uklonjive singularitete*, *polove* i *bitne singularitete*; nas uglavnom zanimaju funkcije čiji su svi singulariteti polovi.

Podsjetimo se da je funkcija *f cijela* ako je definirana na čitavom **C**, te je na čitavom **C** i derivabilna; npr., kompleksni polinomi i funkcije e^z, $\sin z$, $\cos z$ su cijele. Nadalje, funkcija *f* je *meromorfna* na **C**, ako postoje cijele funkcije *g*, *h* takve da je $f = g / h$ i *h* nije ekvivalentna 0. (Primijetimo da su zapravo meromorfne funkcije poopćenje racionalnih funkcija; inače, u grčkom μεροσ znači "razlomak", a μορφη znači "oblik".) Iz niže navedenog *Weierstrassovog teorema* slijedi sljedeći rezultat (v. [Ma], Vol. II, Sect. 50).

Propozicija a.
Funkcija *f* je meromorfna na **C**, ako i samo ako postoji skup $\mathcal{S} \subseteq \mathbf{C}$ takav da: (1) $\mathcal{S}$ nema gomilišta u **C**; (2) *f* je analitička na $\mathbf{C} \setminus \mathcal{S}$; (3) svaka točka $z_0 \in \mathcal{S}$ je pol funkcije *f*.

Dalje; dobro je poznato da se, npr. *Cauchyjevom metodom*, meromorfne funkcije mogu razvijati u parcijalne razlomke. Tako imamo npr. rastav funkcije ctg *z* na parcijalne razlomke

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2 \pi^2};$$

tu imamo lokalno uniformnu konvergenciju gornjeg reda na $\mathbf{C} \setminus \mathcal{S}$, gdje je $\mathcal{S} = \{ k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$ skup polova funkcije ctg *z*.

Za teoriju analitičkih funkcija fundamentalan je i pojam *beskonačnog produkta*, tj., metoda razvoja analitičke funkcije u beskonačan produkt; razlog za to je taj da će tako napisana funkcija imati bolju vezu sa skupom svojih nultočaka. Naime, za niz (a_n) u $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ definiramo tzv. *niz parcijalnih produkata* $p_n := a_1 \cdots a_n$. Ako postoji $p \in \mathbf{C}^*$ takav da niz (p_n) konvergira prema *p*, onda kažemo da beskonačan produkt $\Pi_n a_n$ *konvergira*, prema *p*. Primijetimo: ako $\Pi_n a_n$ konvergira, onda je $\lim_n a_n = \lim_n p_n / p_{n-1} = 1$. Zato je uobičajeno pisati $a_n = 1 + u_n$; jasno, $\lim_n u_n = 0$. Jedna od osnovnih činjenica o beskonačnim produktima je ta da se oni mogu logaritmirati; tj. imamo ovu propoziciju koja povezuje beskonačne produkte s redovima.

Propozicija b. Beskonačan produkt $\Pi_n (1 + u_n)$ konvergira ako i samo ako red $\sum_n \ln (1 + u_n)$ konvergira. U tom je slučaju

$$\prod^{\infty} \left(1 + u_n \right) = \exp\left(\sum^{\infty} \ln\left(1 + u_n \right) \right) .$$

$n=1$ $n=1$

Posebno su zanimljivi beskonačni produkti funkcija; tj. kada umjesto niza brojeva (u_n) gledamo niz funkcija $u_n : \Omega \to \mathbf{C}$, za neki podskup $\Omega \subseteq \mathbf{C}$. Za takve je produkte jedan od glavnih rezultata ovaj teorem.

Teorem b.
Neka je skup Ω otvoren i povezan, te neka su sve funkcije $u_n(z)$ analitičke. Ako red $\sum_n \ln(1 + u_n(z))$ konvergira lokalno uniformno na Ω, onda beskonačan produkt $\Pi_n (1 + u_n(z))$ definira neku analitičku funkciju $f : \Omega \to \mathbf{C}$, koja nigdje ne iščezava.

Kažimo ovdje još i to da je korisno klasu beskonačnih produkata malo proširiti tako da dopustimo da u $\Pi_n a_n$ bude najviše konačno mnogo a_n-ova jednakih 0; tj., $\exists\ N \in \mathbf{N}$ takav da $a_n \neq 0$, $\forall\ n>N$. Onda kažemo da $\Pi_n a_n$ konvergira ako produkt $\Pi_{n>N} a_n$ konvergira u smislu prije dane definicije konvergencije. Razlog za tu proširenu definiciju je ovaj: sada, za neki $\Pi_n a_n$ imamo da je taj beskonačan produkt jednak 0 ako i samo ako postoji n takav da je $a_n = 0$, što možemo shvatiti kao generalizaciju činjenice, naučene u osnovnoj školi, da je $\mathbf{C}$ integralna domena.

Do kraja ovog odjeljka cilj nam je navesti još dva osnovna teorema o analitičkim funkcijama; jedan je *Weierstrassov*, a drugi Hadamardov. Posebno, Hadamardov teorem osnova je za ozbiljnije proučavanje nultočaka cijelih funkcija, a onda i meromorfnih funkcija; mi ćemo to primijeniti na zeta-funkciju. Ali, kao motivaciju za ono što slijedi, pogledat ćemo jedan specijalan slučaj. Najprije, ako je dan neki polinom $P(z) \in \mathbf{C}[z]$, stupnja $\deg(P) \geq 1$, onda se on može napisati kao

$$P(z) = z^a, P_1(z),$$

za neki $a \in \mathbf{N_0}$ i polinom $P_1(z)$ takav da $P_1(0) \neq 0$. Ako je i stupanj $\deg(P_1) = k \geq 1$, onda postoji $c \in \mathbf{C}$ i (ne nužno međusobno različiti) $z_1, \ldots, z_k \in \mathbf{C}^*$ takvi da je

$$P_1(z) = c\,(z - z_1) \cdots (z - z_k);$$

to je zapravo Osnovni teorem algebre. Imajući u vidu da je $P_1(0) = c\,(-z_1) \cdots (-z_k)$, slijedi

$$P(z) = z^a\, P_1(0) \left(1 - \frac{z}{z_1} \right) \cdots \left(1 - \frac{z}{z_k} \right).$$

Neka je sada

$$f(z) := \sin z = z\, f_1(z), \qquad f_1(z) := 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots$$

Primijetimo da je $f_1(0)=1$ i $\mathcal{N}(f_1)= \{ \pm k\pi \mid k \in \mathbf{N}\}$, skup nultočaka od f_1. Po analogiji s gornjim razmatranjem za polinome, sada bismo dobili identitet

$$\sin z = z\, f_1(0)\left(1 - \frac{z}{\pi}\right)\left(1 - \frac{z}{-\pi}\right)\cdots\left(1 - \frac{z}{k\pi}\right)\left(1 - \frac{z}{-k\pi}\right)\cdots = z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{(k\pi)^2}\right)$$

Naravno, nije baš jasno jesmo li mi tu uopće dobili smislen identitet. No, iako je naš "argument" bio "sirova analogija" s Osnovnim teoremom algebre, pokazuje se da napisani identitet za sin z doista vrijedi; istini za volju, treba poprilično "teorije" (npr. Hadamardov teorem faktorizacije) da bismo to rigorozno opravdali...

Pretpostavimo sada da je $f(z)$ *cijela transcendentna funkcija*, ili kraće CTF; to je funkcija koja je cijela i nije polinom. Isto tako, pretpostavimo da je skup nultočaka $\mathcal{N}(f)$ beskonačan; preciznije, kako smo već prije primijetili, prebrojivo beskonačan. Onda $\mathcal{N}(f) \setminus \{0\}$ poredamo u *standardno numeriran* niz

$$a_1, a_2, \ldots \qquad \text{tako da } 0 < | a_1 | \leq | a_2 | \leq \cdots ;$$

pojam "standardno numeriran" znači da svaka nultočka $\neq 0$ od f dolazi u gornjem nizu onoliko puta kolika joj je kratnost. (Primijetimo, kao jednostavnu posljedicu činjenice da su nultočke analitičke funkcije izolirane, da je $\lim_n a_n = \infty$.) Cilj nam je funkciju $f(z)$ "raspisati po nultočkama u pogodnoj formi beskonačnog produkta"; to će biti Hadamardov teorem faktorizacije, koji se može shvatiti kao poopćenje Osnovnog teorema algebre (za slučaj polja $\mathbf{C}$). Ali najprije imamo važan pripremni rezultat. Njegov prvi dio govori da za svaki standardno numeriran niz kompleksnih brojeva, koji još pritom teži u beskonačnost, postoji bar jedna CTF f kojoj je taj niz upravo skup nultočaka $\mathcal{N}(f)$. Zatim kao jednostavnu posljedicu toga dobivamo prvu varijantu tražene faktorizacije CTF po njezinim nultočkama. Sasvim precizno, imamo ovaj teorem (v. [Ma], Vol. II, Sect. 46).

Teorem. (Weierstrassov teorem)
Pretpostavimo da je $\lambda \in \mathbf{N}_0$, i neka je (a_n) niz u $\mathbf{C}^*$, standardno numeriran, takav da je $\lim a_n = \infty$. Tada postoji CTF f takva da je njezin skup nultočaka $\mathcal{N}(f)$ jednak

$$0, \ldots , 0, a_1, a_2, \ldots ;$$

0 se u gornjem nizu pojavljuje λ puta.
S druge strane, ako je f CTF čiji je, standardno numeriran, skup nultočaka $\mathcal{N}(f)$ jednak kao gore, onda tu funkciju možemo napisati kao

$$f(z) = e^{g(z)}\, z^{\lambda} \quad {}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \exp\left(\frac{z}{a_n} + \ldots + \frac{z}{n a_n^{\;n}}\right)\right),$$

gdje je $g(z)$ neka cijela funkcija.

Ako pozorno pogledamo gornju faktorizaciju od f, vidimo da je za $n \in \mathbf{N}$ odgovarajući faktor, u beskonačnom produktu, oblika "$(1 - z/a_n)$−puta−exp (polinom stupnja n)". Pitanje, ne sasvim precizno, je može li se ovdje faktor $\exp(\cdots)$ nekako pojednostavniti. Odgovor je "DA"; i to bitno. No prije nego što damo preciznu tvrdnju, moramo uvesti još neke oznake i pojmove, kao što su npr. "red funkcije" i "eksponent konvergencije niza". Prvo: ako je f cijela funkcija, za $r > 0$ definiramo $M(r) := \max_{|z| = r} | f(z)|$; $r \mapsto M(r)$ je tzv. *funkcija maksimuma modula*. Posebno, ako je f CTF, onda se lako pokaže da je $\lim_{r\to\infty} \ln M(r) / \ln r = \infty$; ili, drugim riječima, CTF rastu brže od bilo koje fiksne potencije od r. Imajući to na umu, ideja je mjeriti rast takvih funkcija s pomoću "najjednostavnije brzorastuće funkcije"; tj. s pomoću funkcije $z \mapsto e^z$.

Definicija. CTF f je *funkcija konačnog reda*, ako postoji $\mu > 0$ takav da je

$$M(r) < e^{r^{\mu}}, \qquad \text{za } r = r(\mu) \text{ dovoljno velik.} \tag{KR}$$

Broj

$$\rho = \rho(f) := \inf \{ \mu \mid \mu \text{ zadovoljava } (\mathbf{KR})\}$$

zovemo *red* funkcije f. Ako uvjet (**KR**) nije ispunjen ni za koji μ, kažemo da je *f beskonačnog reda*.

Sada definirajmo pojam eksponenta konvergencije.

Definicija. Neka je (a_n) niz u $\mathbf{C}^*$, koji je standardno numeriran i takav da $\lim_n a_n = \infty$. Za $\alpha \in (0, \infty)$ gledamo red

$$\sum_n \frac{1}{| a_n|^{\alpha}}. \tag{EK}$$

Broj

$$\tau := \mathit{inf} \{ \alpha > 0 \mid \text{red } (\mathbf{EK}) \text{ konvergira}\}$$

zovemo *eksponent konvergencije* niza (a_n).
Ako red (**EK**) divergira, za svaki $\alpha > 0$, stavimo $\tau := \infty$.

Vezano uz eksponent konvergencije, definirajmo još jednu veličinu. Ako je (a_n) niz kao gore, neka je κ najveći među svim $k \in \mathbf{N_0}$ takvima da red $\sum_n 1/|a_n|^k$ divergira. Sada napokon možemo iskazati ovaj osnovni teorem (v. [Ma], Vol. II, Sect. 48).

Teorem. (Hadamardov teorem faktorizacije)
Neka je f CTF za koju je, standardno numeriran, skup $\mathcal{N}(f)$ dan kao $0,\dots, 0, a_1, a_2,\dots$; ovdje se 0 pojavljuje λ puta, $\lambda \in \mathbf{N_0}$. Tada f možemo zapisati u obliku

$$f(z) = e^{g(z)} z^\lambda \prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{z}{a_n} \right) \exp\left(\frac{z}{a_n} + \dots + \frac{z^\kappa}{\kappa a_n^\kappa} \right) \right),$$

gdje je g neki <u>*polinom*</u> stupnja $\leq \lfloor\rho\rfloor$, *najveće cijelo* od $\rho = \rho\,(f)$; ako je $\kappa = 0$, onda imamo

$$f(z) = e^{g(z)} z^\lambda \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n} \right)$$

Napomena. Nije teško vidjeti da se eksponent konvergencije τ, nekog niza (a_n), računa kao

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\ln n}{\ln |a_n|}.$$

Nadalje, iz definicije broja κ jasno je da imamo nejednakosti $\kappa \leq [\tau]$ i $\tau \leq \kappa + 1$. Zatim, još jedan netrivijalan Hadamardov rezultat je nejednakost $\tau \leq \rho$. Posljedica gornjih dviju tvrdnji je i nejedankost $\kappa \leq [\rho]$.

2. Povijest i motivacija; od Eulera do Riemanna

Povijesno gledajući, postoje dva "važna puta" koja su rezultirala dvama osnovnim teoremima onoga što danas zovemo analitičkom teorijom brojeva; isti su bili među glavnim dostignućima matematike 19. stoljeća, a osim toga rezultirali su i razvojem ideja i teorija, te formulacijom novih zanimljivih problema, koji su i dan-danas u centru modernih matematičkih istraživanja. Ta dva teorema su tzv. *Teorem o prim brojevima* i *Dirichletov teorem* (o prim brojevima u aritmetičkim nizovima). Ono što je posebno interesantno, kako ćemo vidjeti, je činjenica da se kao "glavna glumica" u cijeloj toj teoriji pojavljuje upravo zeta-funkcija. Cilj ovog odjeljka je formulirati rečene teoreme i objasniti povijesni kontekst u kojem su nastali, te navesti još neke relevantne rezultate i dati/skicirati dokaze za neke od njih. Prvo ćemo se kratko pozabaviti Teoremom o prim brojevima, a onda Dirichletovim teoremom čiji je dokaz, usput rečeno, bio pravi izvor ideja i metoda za matematiku 20. stoljeća.

- Pojam *prim broja p* u skupu prirodnih brojeva **N** je fundamentalan. Skup svih prim brojeva u **N** označavat ćemo s $\mathcal{P}$; tj.

$$\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\ldots\}$$

Sljedeće dvije činjenice o prim brojevima bile su dobro poznate već i u antičkoj Grčkoj (Euklid, *Elementi*, knjiga 9):

1. Postoji beskonačno mnogo prim brojeva.

2. (Osnovni teorem aritmetike)
   Za svaki $n \in \mathbf{N}$ postoje, jedinstveni do na poredak, prim brojevi $p_1,\ldots, p_k \in \mathcal{P}$ i $e_1,\ldots, e_k \in \mathbf{N}$ takvi da je
   $$n = {p_1}^{e_1} \cdots {p_k}^{e_k}\,.$$

Sada bismo mogli reći da su prim brojevi "osnovni blokovi" od kojih se, s pomoću operacije množenja, dobivaju svi ostali prirodni brojevi; i tih "blokova" ima beskonačno mnogo. Ali jedna od najvećih zagonetki koja muči matematičare već nekoliko tisućljeća je tzv. **problem distribucije prim brojeva**; ili, kako je $\mathcal{P}$ "smješten" kao podskup u **N**? Svatko tko je ikada gledao tablicu (ili je sam načinio!) od npr. prvih 20, 50, 100 ili 1000 prim brojeva, lako će postaviti mnoga pitanja, kako o samim prim brojevima, tako i o toj njihovoj razdiobi unutar skupa **N**. Naša namjera ovdje je pozabaviti se samo jednim takvim pitanjem, koje je doista vrlo prirodno i nameće se kao jedno od prvih. U svojoj "naivnoj formi", to bismo pitanje mogli formulirati ovako:

Koliki je "udio" skupa $\mathcal{P}$ u N?

No da bismo o tome mogli nešto zanimljivo reći, moramo napraviti malu pripremu. Prvo: za proizvoljan $x \in [2,\infty)$ definirajmo

$$\pi(x) := \mathrm{card}\ \{ p \in \mathcal{P} \mid p \leq x\}.$$

Tako dobivamo funkciju $\pi : [2,\infty) \to \mathbf{N}$, koja računa broj prim brojeva p koji su manji ili jednaki od nekog zadanog realnog broja x; npr., $\pi(5) = 3$, $\pi(10) = 4$, $\pi(30) = 10$, $\pi(100) = 25\ldots$ Jedan od prvih velikih problema matematike 19. stoljeća bio je razumjeti ponašanje te funkcije; ili, malo preciznije, dobiti informaciju o asimptotskom ponašanju od π. Prvu "pravu" heurističku opservaciju, ili bolje rečeno slutnju o tom problemu načinili su C.F. Gauss i A.M. Legendre, negdje na prijelazu iz 18. u 19. stoljeće. U pokušajima niza velikih matematičara toga vremena da se rečena slutnja dokaže, ključnim se korakom pokazao rad B. Riemanna *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, objavljen 1859. godine (v. [Ed] za eng. prijevod tog monumentalnog djela). U tom kratkom radu, jedinom iz Teorije brojeva koji je objavio, Riemann je vrlo precizno dao skicu željenog dokaza. U njegovu se pristupu apsolutno bitnom pokazala ideja da se centralnim objektom u okviru rečenog problema promatra zeta-funkcija. I to ne, kako su to radili matematičari prije njega, da se ona gleda kao realna funkcija realne varijable, nego kao kompleksna funkcija kompleksne varijable. Napomenimo ipak da je, usprkos fundamentalnim idejama, za rigoroznu realizaciju istih trebalo nekoliko desetljeća. Naime, tek na kraju 19. stoljeća napokon je dobiven detaljan dokaz, u radovima dvojice matematičara, Hadamarda i de la Valée Poussina, koji su neovisno radili na tome. Kažimo i to da je taj dokaz u biti "čekao" da se teorija analitičkih funkcija razvije u toj mjeri da uspješno može "servisirati" tom "fragmentu" analitičke teorije brojeva. (U tom se poslu, kao centralna figura, našao upravo Hadamard, čiji je navedeni *Teorem faktorizacije* zapravo kruna mnogogodišnjih napora.) Sljedeći je teorem precizna forma rečene slutnje; više o njegovu dokazu reći ćemo u Odjeljku 4.

Teorem o prim brojevima.
Za funkciju π imamo

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \ln x}{x} = 1;$$

tj. za "velike" x imamo asimptotsko ponašanje

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}.$$

• Kako smo već spomenuli u Uvodu, *Eulerova produktna formula* povezuje prim brojeve i zeta-funkciju. Njezin dokaz ide u dva koraka. Prvo: definirajmo funkciju $E(s) := \Pi_{p \in \mathcal{P}} (1 - p^{-s})^{-1}$. Zatim, neka je K proizvoljan kompakt u poluravnini Re $s > 1$. Koristeći se Teoremom b iz Odjeljka 1, lako se pokaže da gornji beskonačan produkt konvergira uniformno na K. Drugim riječima, taj produkt konvergira lokalno uniformno na Re $s > 1$, i tamo predstavlja analitičku funkciju $E(s)$ koja nigdje ne poprima vrijednost 0; tj., $E(s)$ je analitička funkcija na Re $s > 1$, koja na tom skupu nema nultočaka. (Primijetite kako ovo zapravo dokazuje činjenicu, navedenu u Uvodu, da zeta-funkcija nema nultočaka na Re $s > 1$.) Drugi korak, koji je jednostavno ocjenjivanje, pokazuje da za proizvoljan $\varepsilon > 0$ i fiksiran s, Re $s > 1$, imamo $| E((s)- \zeta(s)| < \varepsilon$. Odavde slijedi $\zeta(s) = E(s)$; tj.

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - p^{-s})^{-1}, \quad \mathrm{Re}\, s > 1. \tag{\textbf{EPF}}$$

Gornji je identitet poslužio Euleru za dokaz, potpuno različit od Euklidova (v. Napomenu koja slijedi), da ima beskonačno mnogo prim brojeva. Naime, kad bi skup prim brojeva $\mathcal{P}$ bio konačan, onda bi posebno $E(1)$ bio konačan broj. Ali u isto vrijeme, pišući ne sasvim precizno, $\zeta(1)= \sum_{n \geq 1} 1 / n = \infty$; ili, drugim riječima, harmonijski red divergira. Tako imamo kontradikciju, tj. skup $\mathcal{P}$ je beskonačan. Zapravo, Euler je pokazao još jedan zanimljiv rezultat, koji slijedi iz (**EPF**) logaritmiranjem i zatim jednostavnim ocjenjivanjem:

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p} \text{ je divergentan red.}$$

Primijetimo kako odavde opet slijedi da je skup $\mathcal{P}$ beskonačan. Štoviše, kao "malo" poopćenje gornjeg rezultata, Euler je pokazao i sljedeće (v. [Kn] za više detalja):

Tvrdnja
Postoji beskonačno mnogo prim brojeva oblika $4n$+1 i $4n$+3. Štoviše, imamo

$$\sum_{p \equiv 1 \pmod 4} \frac{1}{p} = \infty = \sum_{p \equiv 3 \pmod 4} \frac{1}{p}.$$

Napomena.
(1) Dokaz dijela gornje tvrdnje koji govori da postoji beskonačno mnogo prim brojeva oblika $4n$+3 zapravo je trivijalan i potpuno analogan dokazu Euklidova rezultata da je $\mathcal{P}$ beskonačan (v. [Mu]). Naime, pretpostavimo da su $p_1,\dots,p_N$ svi prim brojevi tog oblika i definirajmo $A := 4\, p_1 \cdots p_N - 1$. Sada postoji prim broj q, $q \equiv 3 \pmod 4$, takav da $q \mid A$; jasno, $q \neq p_i$, za sve i, i to znači da je q novi prim broj oblika $4n$+3. (Inače, $A = q_1 \cdots q_l$ za neke prim brojeve q_i za koje je $q_i \equiv 1 \pmod 4$, onda $A \equiv 1 \pmod 4$ i zatim $4p_1 \cdots p_N = A + 1 \equiv 2 \pmod 4$; kontradikcija.)

(2) Dokaz tvrdnje da postoji beskonačno mnogo prim brojeva oblika $4n$+1 malo je teži; za dokaz koji se koristi tzv. *Malim Fermatovim teoremom* vidite npr. [Du], str. 21.

Gornji Eulerovi rezultati i dani argumenti koji ih dokazuju, bili su direktna motivacija *P.G.L. Dirichletu* za formulaciju i dokaz njegova slavnog *Teorema o prim brojevima u aritmetičkim nizovima*.

Dirichletov teorem.
Ako su d i a prirodni brojevi takvi da je njihova mjera $(d, a) = 1$, tj. oni su relativno prosti, onda postoji beskonačno mnogo prim brojeva oblika

$$d\, n + a, \qquad n \in \mathbf{N}_0,$$

tj. postoji beskonačno mnogo prim brojeva u aritmetičkom nizu

$$a,\ d+a,\ 2d+a,\ 3d+a\ldots$$

Štoviše, imamo

$$\sum_{p \equiv a \ (\mathrm{mod}\ d)} \frac{1}{p} = \infty.$$

- Jedno od najzanimljivijih Eulerovih otkrića bila je formula

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

To je Eulera motiviralo i zainteresiralo za općenito računanje redova oblika $\zeta(x)$, posebno kada je $x \in \mathbf{N}$. Kao rezultat njegova rada na tom problemu dobiven je niže navedeni teorem, koji računa vrijednosti zeta-funkcije u parnim prirodnim brojevima. Tako je, specijalno,

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \zeta(6) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945} \ \ldots$$

No, prije nego što iskažemo sam taj teorem i damo skicu njegova dokaza, moramo napraviti malu pripremu o tzv. *Bernoullijevim brojevima*.

Jacob Bernoulli u djelu *Ars Conjectandi* (1713) proučava problem nalaženja opće formule za zbroj k-tih potencija prvih nekoliko prirodnih brojeva, tj.

$$s_k(m) := 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + (m-1)^k, \qquad m, k \in \mathbf{N}.$$

Računa se

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k(m) \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \left(\sum_{j=0}^{m-1} j^k \right) \qquad \text{(zamjena sumacije)}$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(zj)^k}{k!} \right) = \sum_{j=0}^{m-1} e^{zj} = \frac{e^{mz}-1}{e^z-1} = \frac{e^{mz}-1}{z} F(z),$$

gdje je

$$F(z) := \frac{z}{e^z - 1}.$$

Sada, ako F shvatimo kao kompleksnu funkciju, ona je očito derivabilna u svim točkama u kojime je i definirana. Drugim riječima, F je derivabilna u svim točkama iz $\mathbf{C}$, osim u z takvima da je $e^z - 1 = 0$, tj. F je derivabilna u svakom F takvom da je $z \neq \pm 2l\pi\, i$, $l \in \mathbf{N}$. Posebno je F analitička na skupu $|z| < 2\pi$, pa tamo ima Taylorov razvoj, oko $z_0 = 0$,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!},$$

za neke koeficijente $B_n \in \mathbf{C}$.

Definicija.
Brojevi B_n, $n \in \mathbf{N}_0$ zovu se **Bernoullijevi brojevi**.

Napomena.
Ako sada stavimo napisani razvoj od F u gornji račun te izjednačimo koeficijente uz z^k na obje strane jednakosti, odmah dobijemo željenu Bernoullijevu formulu:

$$s_k(m) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B_{k-i} \frac{m^{i+1}}{i+1}.$$

Nadalje, lako se pokazuje da Bernoullijeve brojeve možemo rekurzivno računati iz identiteta

$$B_0\binom{n+1}{0} + B_1\binom{n+1}{1} + \cdots + B_n\binom{n+1}{n} = 0, \qquad n\in\mathbf{N}.$$

Posebno je onda npr.

$$B_0 = 1, \qquad B_1 = -\frac{1}{2}, \qquad B_2 = \frac{1}{6}, \qquad B_3 = 0, \qquad B_4 = -\frac{1}{30}, \qquad B_5 = 0, \qquad B_6 = \frac{1}{42} \ \ldots$$

Nadalje, iz

$$-z = F(z) - F(-z) = 2\sum_{k\geq 0} \frac{B_{2k+1}}{(2k+1)!} z^{2k+1},$$

usporedbom koeficijenata uz z^{2k+1} slijedi da je

$$B_3 = B_5 = \cdots = B_{2k+1} = 0, \qquad \forall\ n \in\mathbf{N}.$$

Kao rezime gornjih razmatranja imamo Taylorov razvoj funkcije F:

$$\frac{z}{e^z-1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}, \qquad |z| < 2\pi.$$

Sada, koristeći se dobro poznatom *Eulerovom formulom*

$$e^{i\,z} = \cos z + i \sin z, \qquad z \in\mathbf{C},$$

odmah se pokazuje da je

$$\mathrm{ctg}\ z = i + \frac{2i}{e^{2i\,z}-1}.$$

Množenjem te jednakosti sa z i stavljanjem $2i\,z$ umjesto z u gornji Taylorov razvoj od F, dobivamo Taylorov razvoj od z ctg z oko 0:

$$z\ \mathrm{ctg}\ z = 1+ \quad {}^{\infty} \quad (-1)^k\, 2^{2k}\, B_{2k}\, z^{2k}, \qquad |z| < \pi\ .$$

$$\sum_{k=1} \quad \frac{}{(2k)!}$$

Zamjenom $z \leftrightarrow z\pi$ slijedi

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} \pi^{2k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}, \quad |z| < 1.$$

S druge strane, u Odjeljku 1 dali smo rastav funkcije ctg z na parcijalne razlomke. Ako i tamo stavimo zamjenu $z \leftrightarrow z\pi$, dobit ćemo

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - m^2}.$$

Ali, za $|z| < 1$, koristeći se razvojem od $(1- z^2/ m^2)^{-1}$ u geometrijski red $\sum_{k \geq 0} z^{2k} / m^{2k}$, zamjenom poretka sumiranja dobivamo

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - m^2} = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k)\, z^{2k-1}.$$

Izjednačavanjem Taylorova razvoja funkcije $\pi \operatorname{ctg} \pi z$ s njezinim rastavom na parcijalne razlomke, uz korištenje posljednje jednakosti, dobit ćemo

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} \pi^{2k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1} = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k)\, z^{2k-1}, \quad |z| <1.$$

Usporedbom koeficijenata uz z^{2k-1} slijedi najavljeni teorem.

Teorem a.

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1}\, 2^{2k-1}\, \pi^{2k} B_{2k}}{(2k)!}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Napomena.
Kao jednostavnu posljedicu prethodnog teorema imamo ovu nejednakost za Bernoullijeve brojeve:

$$|B_{2k}| > \frac{(2k)!}{(2\pi)^{2k}}; \qquad k \in \mathbf{N}.$$

To govori da će za k "velik" i pripadni Bernoullijev broj B_{2k} biti "velik po apsolutnoj vrijednosti" i posebno $\lim_{k\to\infty} |B_{2k}| = \infty$ (usp. s vrijednostima $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$ i $B_6 = 1/42$). Nadalje, budući da je očito $\lim_{k\to\infty} \zeta(2k) = 1$, slijedi da je

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|B_{2k}|\,(2\pi)^{2k}}{2\,(2k)!} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |B_{2k}| \sim \frac{2\,(2k)!}{(2\pi)^{2k}}$$

Uzmimo sada funkciju *sekans* $\sec z = 1 / \cos z$ te napišimo njezin Taylorov razvoj oko 0 kao $\sec z = \sum_{k\geq 0} c_k z^k$, za neke koeficijente $c_k \in \mathbf{C}$. (Jer je sec parna funkcija, vidi se da je zapravo $c_{2k-1} = 0$, za sve $k \in \mathbf{N}$.) Ako definiramo tzv. **Eulerove brojeve**

$$E_{2k} := (-1)^k (2k)!\, c_{2k}, \qquad k \in \mathbf{N}_0,$$

onda gornji Taylorov razvoj možemo zapisati kao

$$\sec z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{E_{2k}}{(2k)!} z^{2k}, \qquad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

Slično kao što smo imali za Bernoullijeve brojeve, lako možemo pokazati da Eulerovi brojevi zadovoljavaju rekurziju

$$E_0 \binom{2k}{0} + E_2 \binom{2k}{2} + \cdots + E_{2k-2} \binom{2k}{2k-2} + E_{2k} \binom{2k}{2k} = 0, \qquad k \in \mathbf{N};$$

odavde slijedi $E_{2k} \in \mathbf{Z}$ i posebno:

$$E_0 = 1, \quad E_2 = -1, \quad E_4 = 5, \quad E_6 = -61, \quad E_8 = 1385\ldots$$

Sada možemo navesti još jednu zanimljivu propoziciju, čiji su specijalni slučajevi sljedeći dobro poznati identiteti:

$$1 - \frac{1}{} + \frac{1}{} - \frac{1}{} + \cdots = \frac{\pi}{},$$

3 5 7 4

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots = \frac{\pi^3}{32},$$

$$1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \cdots = \frac{\pi^5}{1536}.$$

Kažimo da je dokaz ove propozicije analogan dokazu prethodnog teorema. Naime, samo treba izjednačiti Taylorov razvoj za sec z s razvojem te funkcije na parcijalne razlomke

$$\sec z = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)\,\pi}{z^2 - (k-1/2)^2\,\pi^2};$$

tu imamo lokalno uniformnu konvergenciju gornjeg reda na $\mathbf{C} \setminus \mathcal{S}$, gdje je $\mathcal{S} = \{\,(k-1/2)\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$ skup polova.

Propozicija a.

$$1 - \frac{1}{3^{2m+1}} + \frac{1}{5^{2m+1}} - \frac{1}{7^{2m+1}} + \cdots = (-1)^m \frac{\pi^{2m+1}}{2^{2m+2}} \frac{E_{2m}}{(2m)!}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Kao završetak, kažimo tek nekoliko riječi o onome čime smo započeli ovo naše razmatranje koje je rezultiralo gornjim teoremom i propozicijom. To je spomenuti Eulerov interes za računanjem $\zeta(x)$, za neke posebne vrijednosti od x. Nakon dobivenih vrijednosti u teoremu, za $x = 2k$ kada je $k \in \mathbf{N}$, sljedi prirodno pitanje:

Kako računati $\zeta(2k+1)$, $k \in \mathbf{N}$?

Spomenimo tek ovdje, koliko god to možda čudno zvučalo, da je to otvoreni problem! Preciznije rečeno, ne zna se točna vrijednost $\zeta(n)$ ni za koji neparan $n \geq 3$. Štoviše, osim nekih zanimljivih informacija o prvih nekoliko neparnih prirodnih brojeva, ne zna se je li uopće konkretan $\zeta(n)$ iracionalan broj (v. npr. [Po], [Ri] i [Zu]). No ipak, usprkos rečenom neznanju, postoji slutnja koja govori da je

$$\zeta(2k+1)/\pi^{2k+1} \in \mathbf{Q}^*, \qquad k \in \mathbf{N}.$$

Literatura

[Ch] W.W.L. Chen, *Distribution of prime numbers*, 2002. http://www.maths.mq.edu.au/~wchen/lndpnfolder/lndpn.html

[Du] A. Dujella, *Uvod u teoriju brojeva*, skripta, PMF-Matematički odjel, 2008. http://web.math.hr/~duje/utb/utblink.pdf

[Ed] H.M. Edwards, *Riemann's Zeta function*, Dover Publications Inc., 2001. (Reprint originala: Academic Press, New York, 1974.)

[Hi] The MacTutor History of Mathematics archive, 2008. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex.html

[Iv] A.Ivić, *The Riemann zeta-function: Theory and applications*, Dover Publications Inc., 2003. (Reprint originala: Wiley, New York, 1985.)

[K1] A.W. Knapp, *Group representations and harmonic analysis from Euler to Langlands, I*, Notices Amer. Math. Soc. **43** (1996), no. 4, 410-415.

[K2] A.W. Knapp, *Group representations and harmonic analysis, II*, Notices Amer. Math. Soc. **43** (1996), no. 5, 537-549.

[KK] H. Kraljević, S. Kurepa, *Matematička analiza 4; Kompleksne funkcije*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1979.

[Ma] A.I. Markushevich, *Theory of functions of a complex variable. Vol. I, II, III.*, Translated and edited by R. A. Silverman, Chelsea Publishing Co., New York, 1977.

[Mu] M. Ram Murty, *Primes in certain arithmetic progressions*, Journal of the Madras Univ. (1988), 161-169.

[Pa] S.J. Patterson, *An introduction to the theory of the Riemann Zeta-Function*, Cambridge studies in advanced mathematics, Vol. 14, Cambridge Univ. Press, 1988.

[Ri] T. Rivoal, *La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **331** :4 (2000), 267-270.

[Ti] E.C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, 2nd ed., The Clarendon Press, Oxford Univ. Press, New York, 1986.

[Un] Š. Ungar, *Kompleksna analiza*, 2008. http://web.math.hr/~ungar/kompleksna.pdf

[Po] A. van der Poorten, *A proof that Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of* $\zeta(3)$ *. An informal report*, Math. Intelligencer **1** :4 (1978/79), 195-203.

[Wi] Wikipedia, *Mathematics*, Wikipedia, The Free Encyclopedia, studeni 2008. http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematics

[Zu] V.V. Zudilin, *Arithmetic of linear forms involving odd zeta values*, J. Théor. Nombres Bordeaux **16** (2004), 251-291.
