

Mjerenje brzine pomoću klasičnog Dopplerovog efekta i njegova primjena u medicini

Nato Popara, Selim Pašić, Luka Bajić¹

Uvod

Jeste li se ikada pitali kako policija može izmjeriti brzinu automobila pomoću radarskog uređaja na daljinama većim od stotinu metara? Kako liječnici u stvarnom vremenu mogu izmjeriti brzinu krvi ili vidjeti raspodjelu brzina krvi kroz krvne žile pomoću ultrazvučne sonde? Ili kako astronomi znaju kojom se brzinom udaljuje ili približava neka zvijezda, iako je toliko daleka da joj se ni jedan mjerni uređaj nikada neće moći približiti? Možda ste primijetili da automobil koji se približava proizvodi viši ton, dok nakon što prođe pored vas taj isti zvuk postane dublji. Taj efekt se zove Dopplerov efekt i on je odgovor na sva prethodno postavljena pitanja.

U ovom radu ćemo objasniti što je Dopplerov efekt. Također ćemo predstaviti aparaturu i mjerenja brzine “vlakica” Dopplerovim efektom. Mjerenja ćemo usporediti s rezultatima mjerenja istih brzina vlakica metodom put/vrijeme. Uređaj je kompaktan tako da se može komotno smjestiti na bilo koju školsku klupu. Ovo je i primjer uređaja koji je dizajniran za kvantitativno izučavanje Dopplerovog efekta u školama i sveučilišnim praktikumima, ali koji pokazuje zapanjujuću preciznost mjerenja frekvencije (1 : 100 000), znatno nadmašujući preciznost mjerenja u standardnim laboratorijama. Također ćemo objasniti primjenu Dopplerovog efekta u mjerenju brzine u tehnici i medicini.

Što je Dopplerov efekt?

Dopplerov efekt je promjena frekvencije vala uzrokovana relativnim kretanjem izvora vala i promatrača. Ovaj fenomen vrijedi za sve vrste valova, uključujući zvučne, elektromagnetske (svjetlosne) i vodene valove.

Austrijski fizičar Christian Doppler prvi je opisao ovaj efekt 1842. godine, postavivši temelje za mnoga kasnija znanstvena otkrića i tehnološke primjene. Osnovna ideja je sljedeća: kada se izvor vala približava promatraču za njega se valna duljina vala koju on vidi skraćuje, odnosno frekvencija povećava (f_+). Suprotno tome, kada se izvor udaljava od promatrača, valna duljina se za promatrača produljuje, odnosno frekvencija se smanjuje (f_-) (vidi sliku 1). U oba slučaja izvor je, sa stanovišta promatrača vezanoga za izvor, emitirao istu frekvenciju f_0 . Potpuno identičnu situaciju imamo ako izvor koji miruje emitira val frekvencije f_0 koji se potom reflektira na objektu u gibanju. Ako se objekt giba brzinom u onda je refleksija vala na njemu, ustvari, emisija vala od objekta koji se giba. Stoga će reflektirani val za promatrača imati povećanu frekvenciju f_+ , ako se giba prema

¹ Autori: dr. sc. Nato Popara, viši asistent na Zavodu za fiziku Veterinarskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu; dr. sc. Selim Pašić, izvanredni profesor na Zavodu za fiziku Veterinarskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu; e-pošta: selimpasic@gmail.com; Luka Bajić, student veterinarske medicine na Veterinarskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu.

izvoru (u_+), odnosno smanjenu frekvenciju f_- , ako se giba od izvora (u_-). Veza između frekvencije izvora f_0 , te frekvencije reflektiranih valova f_{\pm} , ako je brzina c vala u mediju kojom se val širi, je dana sljedećim izrazom

$$f_{\pm} = f_0 \left(1 \pm \frac{u_{\pm}}{c} \right). \quad (1)$$

Iz gornjega izraza se lako mogu dobiti brzine približavanja i udaljavanja objekta od izvora

$$u_+ = c \left(\frac{f_+}{f_0} - 1 \right) \quad (2)$$

$$u_- = c \left(1 - \frac{f_-}{f_0} \right). \quad (3)$$

Iz priloženog možemo uočiti izvanredno svojstvo Dopplera – ovisi samo o brzini objekta, odnosno o jednom parametru. To znači da promjena frekvencije ovisi samo o tome koliko objekt brzo mijenja svoj položaj u odnosu na izvor, odnosno promatrača, a ne o udaljenosti objekta od promatrača ili nekom trećem parametru. Naprimjer, sasvim svejedno je da li je vaš automobil kojega snima policijski radar udaljen 20 ili 200 m. Razlika frekvencije koju je radar poslao i primio ovisit će isključivo o brzini automobila. Budući da Dopplerov efekt isključivo ovisi o brzini, on je u svojoj primjeni postao sinonim za mjerenje brzine. Ako vam netko kaže da ide na Doppler dijagnostiku to znači samo jedno – da ide na dijagnostiku u kojoj će mu se mjeriti brzina nečega npr. protoka krvi u arteriji.

Eksperiment

U eksperimentu koristimo ultrazvučne (UZ) valove. Eksperimentalni uređaj koji koristimo se temelji na COBRA-3 ultrazvučnom generatoru od kompanije PHYWE, i osim generatora uključuje dva ultrazvučna odašiljača/prijemnika (u slučaju ultrazvučnih uređaja, isti uređaj obično ispunjava obje uloge) na podesivom stalku, softverski paket Measure za mjerenje frekvencije UZ vala, i motorizirani “vlakić” odnosno pokretno postolje za jedan od UZ odašiljača/ prijemnika. Ovaj “vlakić” je postavljen na metalnu tračnicu koja mu omogućava lako kretanje duž pravca.

Postavimo “vlakić” na metalnu tračnicu i na njega pričvrstimo UZ odašiljač. Provjerimo da su odašiljač i prijemnik, koji stoji na zasebnom, nepomičnom stalku postavljenom na jedan kraj metalne tračnice, poravnati. Uključimo generator UZ vala, postavljen na proizvoljni napon (Dopplerov efekt ne ovisi o amplitudi UZ vala). Da bi izmjerili frekvenciju UZ vala, koristimo program Measure na povezanom računaru. Takva mjerenja obavljamo u tri situacije:

- (1) kad “vlakić” miruje mjeri se (f_0);
- (2) kad se “vlakić” giba prema prijemniku (f_+);
- (3) kad se “vlakić” udaljava od prijemnika (f_-).

Rezultati za seriju mjerenja koju smo proveli na ovakvoj aparaturi su dani u tablici 1.

f_0 (Hz)	40282	40282	40283	40282	40282	40283	40282	40283	40282	40283
f_+ (Hz)	40295	40295	40296	40295	40295	40295	40295	40295	40295	40295
f_- (Hz)	40270	40270	40271	40270	40270	40270	40270	40270	40270	40270

Tablica 1. Frekvencije koje prijemnik registrira kad izvor UZ miruje (f_0), giba se prema prijemniku (f_+) ili od njega (f_-).

Obradom podataka dobijemo rezultate za frekvencije:

$$f_0 = 40282.4 \pm 0.5 \text{ Hz}, \quad f_+ = 40295.1 \pm 0.3 \text{ Hz}, \quad f_- = 40270.1 \pm 0.3 \text{ Hz}. \quad (4)$$

Njih možemo koristiti da indirektno izmjerimo brzinu “vlakića” na koji je bio pričvršćen odašiljač. Koristeći relaciju (2) i (3) i uzevši da je brzina ultrazvučnog vala u zraku otprilike $c = 343 \text{ m/s}$ dobivamo brzinu vlakića prema izvoru od

$$u_+ = 0.108 \pm 0.005 \text{ m/s}, \quad (5)$$

i brzinu vlakića od izvora

$$u_- = 0.105 \pm 0.005 \text{ m/s}. \quad (6)$$

Nepouzdanost brzine je dana s

$$\Delta u_{\pm} = c \sqrt{\left(\frac{\Delta f_{\pm}}{\bar{f}_0}\right)^2 + \left(\frac{\bar{f}_{\pm} \Delta f_0}{\bar{f}_0^2}\right)^2}. \quad (7)$$

U drugom dijelu našeg eksperimenta mjerit ćemo brzinu vlakića metodom put/ vrijeme. Dakle, mjerit ćemo preciznom štopericom koliko vlakiću treba da prijeđe udaljenost između dvije oznake međusobno razmaknute 60 cm. Rezultati su u tablici 2.

t_+ (s)	5.44	5.37	5.37	5.38	5.43	5.34	5.5	5.45	5.47	5.5
t_- (s)	5.78	5.79	5.84	5.75	5.84	5.78	5.72	5.78	5.75	5.83

Tablica 2. Vremena prolaska za oba smjera u kojima se “vlakić” može gibati.

Konačni rezultati za vremena prolaska su $t_+ = 5.43 \pm 0.06 \text{ m/s}$ kad se odašiljač giba prema prijemniku i $t_- = 5.77 \pm 0.04$ kad se odašiljač i prijemnik međusobno udaljavaju. Kao konačan rezultat za brzine izračunate metodom udaljenost/vrijeme dobijemo

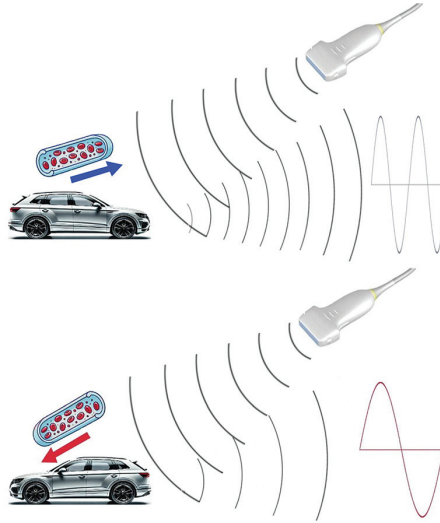
$$v_+ = 0.111 \pm 0.001 \text{ m/s}, \quad (8)$$

$$v_- = 0.1040 \pm 0.0007 \text{ m/s}. \quad (9)$$

Kao što vidimo, brzine koje smo dobili su jako slične brzinama koje smo dobili upotrebom Dopplerovog efekta. Rezultati se razlikuju 2.7 % i 0.9 %, što govori o tome koliko je Dopplerova metoda mjerenja brzine precizna. O preciznosti metode govori i činjenica da su nepouzdanosti reda veličine nekoliko milimetara po sekundi.

Mjerenje brzine automobila i udaljenih nebeskih objekata

Sada je jasno kako policija s radarom lako odredi brzinu našega automobila. Policijski radar je kao svaki ultrazvučni uređaj istovremeno i izvor i detektor ultrazvuka. On emitira kratki ultrazvučni puls koji se reflektira na automobilu i vraća do radara (vidi sliku 1). Iz razlike frekvencije vala koju je poslao radar f_0 i frekvencije (f_+ ili f_-) primljenoga reflektiranog vala, radar prema formulama (2) i (3) izračuna brzinu vozila.



Slika 1. Na slici je prikazano mjerenje brzine automobila i crvenih krvnih zrnaca (krvi) Dopplerovim efektom. Princip mjerenja je potpuno isti. Vidljive su razlike u frekvenciji reflektiranih valova kada se auto i krv gibaju prema i od sonde.

Udaljeni nebeski objekti (planeti, zvijezde itd.) su objekti koji imaju obično vrlo veliku brzinu u odnosu na Zemlju. Ta je brzina tako velika da možemo zamijetiti promjenu frekvencije svjetlosti koja dolazi na Zemlju. Relacije koje povezuju brzinu tako brzih objekata i promjene frekvencije su malo drugačije od gore iznesenih zbog efekata specijalne teorije relativnosti. Kako mi znamo da npr. crvena svjetlost koja dolazi s udaljene zvijezde ili planete ima malo drugačiju frekvenciju od one koja je emitirana s njih? Stoga promatramo spektar nekog elementa. Uzmimo vodikov atom budući da ga ima svugdje u svemiru. Spektar vodikovog atoma ima četiri linije u vidljivom dijelu spektra, koje na Zemlji imaju valne duljine: $H\alpha$ linija: oko 656 nm – to je čista crvena boja, koju imaju crveni laseri i LED pokazivači; $H\beta$ linija: oko 486 nm – plava boja; $H\gamma$ linija: oko 434 nm – prelazi u plavičasto-ljubičasto; $H\delta$ linija: oko 410 nm – ljubičasta boja s nešto plave. Ako vodikov spektar dolazi s udaljene zvijezde ili planete onda su linije spektra pomaknute. Ako se približavaju Zemlji, linije se pomiču prema kraćim valnim duljinama – to zovemo plavi pomak. Ako se udaljavaju od Zemlje, linije se pomiču prema dužim valnim duljinama – to je crveni pomak. Iz tih pomaka izračunamo brzinu zvijezde ili udaljenog planeta kao i njihov smjer gibanja u odnosu na Zemlju.

Primjena Dopplerovog efekta u medicini

Dopplerov efekt u mjerenju protoka krvi kroz arterije

Doppler ultrazvuka se često koristi za procjenu protoka krvi kroz arterije, omogućujući liječnicima da dijagnosticiraju poremećaje u cirkulaciji. Kada ultrazvučna sonda emitira zvučne valove prema arteriji, oni se odbijaju od crvenih krvnih stanica ili eritrocita (identično automobilu; vidi sliku 1) koja su u pokretu i ponovo dolaze do sonde. Na temelju

promjene frekvencije reflektiranih valova, računa se brzina v i smjer krvotoka (eritrocita). Brzina v i protok krvi Q su povezani na ovaj način:

$$Q = vS \quad (10)$$

gdje je S poprečni presjek arterije, kojeg lako izmjeri ultrazvučni uređaj.

Mjerenje protoka krvi kroz neku arteriju pomoću Dopplera ultrazvuka je vrlo precizna, neinvazivna metoda potpuno neškodljiva za pacijenta, a uz to jeftina i brza. Prije uvođenja Dopplera koristila se invazivna metoda putem katetera koji se uvodio u arteriju te se pomoću njega mjerio pad tlaka. Iz Bernoullijeve jednadžbe se na osnovu pada tlaka procjenjivala brzina, a onda i protok krvi. Takva metoda je imala apsolutno sve nedostatke u odnosu na Doppler: invazivna, s izvjesnom dozom rizika za pacijenta, mnogo manje precizna i zahtijevala je iskusne ruke operatera, sterilne uvjete i puno pripreme. Dakle, dugo je trajala i bila je stoga skupa. Doppler je uklonio sve nedostatke te metode tako da danas ne postoji alternativa za mjerenje brzine i protoka krvi.

Kolor Doppler

Kolor Doppler tehnika je u suštini mala modifikacije prethodnoga mjerenja protoka. Tu se mjeri protok u nekom tkivu u realnom vremenu i rezultat se prikazuje u mapi protoka tkiva obojeno crvenom (kada krv teče prema sondi, dakle veća frekvencija reflektiranog ultrazvuka) i plavom bojom (krv teče od sonde, dakle manja frekvencija reflektiranog ultrazvučnoga vala).

Kolor Doppler uređaji se temelje na mnoštvu kratkotrajnih UZ pulseva, od kojih svaki traje manje od 0.2 ms. Nadalje, podaci dobiveni iz svakog pulsa se filtriraju po vremenu dolaska, tako da se odbacuju svi podaci osim onih dobivenih iz strogo određene dubine u tkivu. Tako dobijemo sliku krvnog toka na točno određenoj dubini. Svaka dubina se uzorkuje s više pulseva, i tako dobivena srednja brzina crvenih krvnih zrnaca se uzima kao brzina krvi.

Ultrazvučna zraka “prebriše” određeni dio prostora u kratkom vremenu, pri čemu svaki prostorni kut odgovara jednom pikselu na odgovarajućoj slici. Svaki piksel je rezultat obrade podataka iz više ultrazvučnih pulseva. Broj pulseva po pikselu se konvencionalno zove “duljina ansambla”. Veća duljina ansambla znači finije razlučivanje, pogotovo za sporije tokove, ali i sliku koja se sporije mijenja, odnosno prikazuje s manje slika po sekundi. Ovako se dobije dvodimenzionalna mapa krvnog toka, koja je izrazito koristan dijagnostički alat u nizu medicinskih polja, od kardiologije do ginekologije. Ovako dobivene mape se mogu kombinirati i sa slikom unutarnjih organa dobivenom konvencionalnim UZ oslikavanjem, u kojem slučaju govorimo o tzv. dupleks sonografiji.

Literatura

- [1] I. ZALUD, D. MAULIK, *Doppler Ultrasound in Obstetrics and Gynecology*, 2. izdanje, Springer Science & Business Media, 2006.
- [2] C. DOPPLER, *Über das farbige Licht der Doppelsterne und einiger anderer Gestirne des Himmels*, 1842.
- [3] B. STRAUGHAN, *Mathematical Analysis of Doppler Effect*, Cambridge University Press, 2017.
- [4] F. W. KREMKAU, *Sonography Principles and Instruments*, Elsevier, 2015.
- [5] E. HUBBLE, *A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae*, Proceedings of the National Academy of Sciences, 1929.