

Zašto volimo invarijante i bečke šnicle?

Nika Utrobičić¹

Sažetak

Kakve veze imaju opovrgavanje Riemannove hipoteze, treći Hilbertov problem i Županijsko natjecanje iz matematike 2019.? U ovom ćemo članku objasniti što su to invarijante i zašto ih mi matematičari volimo. Zatim ćemo riješiti par primjera i navesti zadatke za vježbu kako biste uz novoizgrađene invarijantske supermoći i sami mogli riješiti neki važni problem (ili barem dobiti sve bodove na državnom natjecanju)!

O bečkom lunaparku i Riemannovoj hipotezi

*“Ja, once I had to check a really serious attack on disproving the Riemann hypothesis. It was by a very good mathematician, jaaa, first he proved that if it is true, some 5-dimensional integral has to be positive. Then he used some crazy numerical methods to conclude that it is at most negative 0.000000000000000000000005. Ach! It was horrible, I asked my colleague who is well-versed in such numerical methods to check that part. I still don’t understand where the error was, but jaaa, it was wrong. But ACH! If it was right, imagine!”*²



Zvezdasti dodekaedar ispred Matematičkog odsjeka Sveučilišta u Beču.

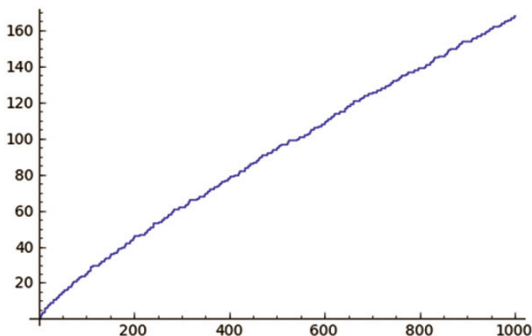
U Beču sam na Erasmusu i život mi *divlja* (slušam predavanja u učionici u kojoj je predavao Kurt Gödel!). Beč je košnica kultura prepuna predstava, festivala, kočija, torti, palača, kuglanja, sushija, cirkusa i vožnji u lunaparku – nikad se nisam ovoliko zabavljala. Uvodno predavanje iz analitičke teorije brojeva zabavnije je i od Pratera i od Cirque du Soleil. Sjedim držeći dah i apsolutno sam voljna platiti kartu za ovaj show znojem, suzama i jadam potrebnim da pošten čovjek shvati što L funkcija zapravo jest. Simpatični bečki profesor započinje svoj ciklus predavanja upoznavajući nas sa svojih 10 omiljenih

¹ Autorica je studentica na diplomskom studiju PMF-a u Zagrebu; e-pošta: utrobicicnika@gmail.com

² “Da, jednom sam provjeravao ozbiljan napad na opovrgavanje Riemannove hipoteze. To je bio rad vrhunskog matematičara: prvo je dokazao da ako je Riemannova hipoteza istinita, neki 5D integral mora biti pozitivan. Onda je nekim ludim numeričkim metodama zaključio da je svakako negativan, ogradio ga je s minus 0.000000000000000000000005. Račun je bio stvano grozomoran, morao sam ga dati kolegi koji to dobro zna da ga provjeri. I dalje ne razumijem gdje je bila greška, ali LJUDI! Zamislite da je bilo točno!”

otvorenih problema u matematici. U prostoriji je muk, svi nestrpljivo gledamo što će se iduće dogoditi na ploči. Kad nam otkriva da je Mertensova slutnja koja je istinita za prvih 10 000 000 000 000 000 prirodnih brojeva³ ipak opovrgnuta, dramatično udišemo. Vrijeme na trosatnom predavanju doslovno leti, a matematika djeluje kao živa. Sad nam se žali da mu se svako par mjeseci pred vratima ureda pojave ljudi u crnim odijelima uvjereni da su riješili Riemannovu hipotezu. Onda im on pokaže da ipak nisu, no oni odbijaju prihvatiti surovu matematičku stvarnost, očajni jer su na problemu radili desetljećima.

Riemannova hipoteza jedna je od najvažnijih slutnji moderne matematike. Sam iskaz je pomalo tehnički i ni sama ga baš potpuno ne razumijem, no ima ogromne posljedice na cijelu matematiku. Primjerice, kad bi bila istinita, mogli bismo puno ljepše procijeniti razmak između dva susjedna prosta broja.



Funkcija $\pi(x)$ koja mjeri broj prostih brojeva manjih ili jednakih x za prvih 1000 brojeva

Prosti brojevi su oni koji su djeljivi samo sa samim sobom i s jedinicom, i ponašaju se poprilično misteriozno za nešto s tako jednostavnom definicijom. Zašto su prosti brojevi na prvi pogled tako nasumični, pa ipak tako pravilni kad ih se gleda s dovoljne udaljenosti? Izdaleka broj prostih brojeva izgleda kao da prati neko lijepo pravilo – zašto? Kad bismo dokazali Riemannovu hipotezu, mogli bismo o distribuciji prostih brojeva pričati puno preciznije nego što to možemo sada.



Fermat

Po svojoj važnosti i slavi Riemannova je hipoteza usporediva s Fermatovim velikim teoremom, koji kaže da ne postoje prirodni brojevi takvi da $a^n + b^n = c^n$, gdje je $n > 2$. Tvrdnju je naslutio francuski sudac Pierre de Fermat u 17. stoljeću. Slavna je činjenica da je u svojoj knjizi tvrdio da ju je i dokazao na izrazito elegantan način, no “dokaz ne stane na margine ove stranice”. Slutnju je 400 godina kasnije dokazao Andrew Wiles koristeći eliptičke krivulje⁴. Taj dokaz *fakat* ne stane ni na kakve margine – ima više od 100 stranica, provjeravao se dvije godine i Sir Wilesu je priskrbio 18 (osamnaest) prestižnih matematičkih nagrada i *titulu viteza*.

Nažalost, za dokaz Riemannove hipoteze morat ćemo još pričekati. I najveći matematičari našeg vremena muče se s tim problemom. Riječima Terencea Taoa⁵, “*You can’t climb a sheer cliff face a mile high with no handholds whatsoever, no matter how strong you are.*”

³ Ne, ne pretjerujem. Zaista je provjereno za 10^{16} brojeva, a sluti se da je prvi kontraprimjer puno veći i od toga.

⁴ Čitaj: Nešto jako moderno, divlje i napredno što Fermat nije mogao znati ako nije bio vještica.

⁵ Parafraza

*You have to wait until some opening occurs halfway up the cliff. Currently in the quest to prove the RH nothing is really promising.*⁶ Kao što vidite, za našeg bečkog profesora provjeravanje dokaza Riemannove hipoteze mora da je mučan i besmislen posao, nešto poput pranja suda ili prepisivanja telefonskog imenika!

Pa ipak, primijetite zanimljivu činjenicu. Iako ni vi, ni ja, pa čak ni entuzijastični bečki profesor ne znamo izračunati grozomorni integral u pet dimenzija, da je dokaz prošao, svima bi nam bilo jasno što se tu dogodilo!

Treći Hilbertov problem

Je li moguće izrezati poliedar A i iz dobivenih dijelova ponovno sastaviti poliedar tako da bude sukladan danom poliedru B uz uvjet da su A i B jednakih volumena?

Bio je to treći od 13 Hilbertovih problema⁷ predstavljenih u govoru “Problemi matematike” na Međunarodnom kongresu matematičara 1900. godine.⁸ Ujedno je i prvi od njih riješen: iste ga je godine riješio Hilbertov učenik Max Dehn. Kako? Upravo uočavanjem zanimljive invarijante!

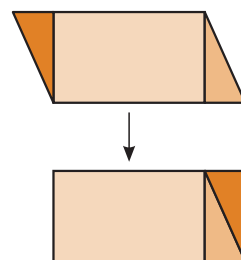
Motivacija

Još je Euklidu bila poznata formula za volumen piramide:

$$V = \frac{\text{baza} \cdot \text{visina}}{3}.$$

Kako da to dokažemo?

U euklidskoj geometriji često dokazujemo jednakost površina dokazima *bez riječi*. Naime, ako neki lik u ravnini možemo izrezati i ponovno sastaviti tako da bude sukladan nekom drugom liku, iz toga slijedi da oni imaju jednake površine. Time neki lik kojem ne znamo izračunati površinu možemo svesti na neki kome znamo, kao u ovom dokazu bez riječi u kojem paralelogram transformiram u pravokutnik iste površine i time pokažemo da je površina paralelograma $a \cdot v_a$.



Grafički dokaz formule za površinu paralelograma

Možemo li nešto slično provesti i za piramidu?

Svaki dokaz gore navedene formule koristi višu matematiku, što je spomenuo Gauss u pismu svom učeniku Christianu Ludwigu Gerlingu, koji je uspio pokazati da se dva simetrična tetraedra mogu rezanjem i preslagivanjem pretvoriti jedan u drugoga. Znamo da je, po Wallace-Bolyai-Gerwienovom teoremu, bilo koji poligon moguće transformirati na taj način u bilo koji drugi poligon iste površine. . . To je potaklo Hilberta da se zapita: “Je li to moguće napraviti i u tri dimenzije?”

⁶ “Ne možeš ispenjati strmu liticu bez ikakvih klinova i rupa, neovisno o tome koliko si dobar alpinist. Trebaš čekati da se negdje otvori neka rupa, neki manji cilj. Što se tiče Riemannove hipoteze, trenutno ništa ne izgleda posebno obećavajuće.”

⁷ Kasnije je lista Hilbertovih problema proširena na njih 23

⁸ Mnogi slavni matematičari imaju liste problema koje su smatrali posebno zanimljivima. Tako se na listi Paula Erdősa nalaze i dva problema koji su 2023. godine riješili matematičari sa zagrebačkog PMF-a: Vjekoslav Kovač i Adrian Beker.

Dokaz: Dehnova invarijanta nam razbija snove!

Tužna je činjenica da je odgovor ne. Iako ga je veliki matematičar David Hilbert smatrao dovoljno značajnim da ga uvrsti na svoju slavnu listu, osnovna struktura rješenja ovog problema slični na nešto što biste mogli vidjeti u rješenjima s Državnog natjecanja.

Max Dehn za svaki poliedar definira veličinu koju naziva Dehnova invarijanta. Kako? To je zapravo srce cijelog dokaza i prekomplikirano je za našu priču: mi ćemo o njoj samo reći da uzima u obzir kutove između strana i duljine bridova.

Njeno osnovno svojstvo je to da se rezanjem i lijepljenjem zbroj Dehnovih invarijanti dijelova ne mijenja. To možemo pročitati i iz samog naziva: invarijanta je veličina koja ne varira⁹.

Sad dolazimo do zaključka:

Kako zbroj Dehnovih invarijanti svih komadića originalnog poliedra ostaje isti u svakom koraku, početni i krajnji poliedar imaju iste Dehnove invarijante.

No Dehnova invarijanta kocke je 0, a tetraedra uvijek pozitivna, što dokazuje da je odgovor na pitanje **NE**.

Zašto volimo invarijante?

Vratimo se na Zemlju: saznali smo zašto oni koji rješavaju Riemannovu hipotezu i postavljaju liste problema na početcima prošlog stoljeća vole invarijante. Zašto ih volimo? Jer nam uočavanja invarijanti mogu pomoći da riješimo mnoge natjecateljske zadatke! Promotrimo nekoliko primjera.

Kameleoni

Ukoliko ste fanovi popularno-matematičkih sadržaja, ovaj ste zadatak sigurno već vidjeli!

Zadatak. Na danom otoku ima 14 zelenih, 16 plavih i 23 crvena kameleona. Isključivo kameleoni različitih boja se mogu pariti, a njihov potomak bit će treće boje. Nakon što se ovaj okoti, sokol pojede oba roditelja. Ako na kraju ostane samo jedan kameleon, koje će on biti boje?

Rješenje. Najbolje nam je započeti zadatak provođenjem nekoliko nasumičnih poteza i traženjem nečeg što se ne mijenja, primjerice ovako:

redni broj poteza	zeleni	plavi	crveni
0	14	16	23
1	13	15	24
2	14	14	23
3	15	13	22
4	14	14	21

Primijetimo da u svakom koraku broj kameleona svake boje promijeni parnost. Zaista, broj kameleona dvije boje smanji se za 1 zbog sokola, a okoti se jedan kameleon treće

⁹ nemjenjica – naša stara domaća riječ

boje. To znači da **broj zelenih i broj plavih uvijek ostaju iste parnosti**. Znači i na kraju, kad imamo jednog jedinog kameleona, ta dva broja moraju biti jednake parnosti. Dakle, ta dva broja su 0, radi čega je na kraju jedini kameleon sigurno crven.

Djeljivost – kraljica među invarijantama

Jako često je u natjecateljskim zadacima korisno provjeriti što se događa s parnošću ili djeljivošću s nekim drugim brojem.

Zadatak. Na kružnicu je napisano 2017 nula i 2 jedinice. Antonio u svakom potezu bira tri uzastopna broja i dodaje svakom 1. Može li postići da na kraju svi brojevi budu jednaki?

Rješenje. Ne može. Zašto? Primijetimo sljedeće – zbroj svih brojeva u krugu u svakom se potezu povećava za 3. To znači da njegov **ostatak pri dijeljenju s 3** ostaje uvijek isti. Na početku je zbroj 2. Kad bi svi brojevi u krugu bili jednaki nekom n , zbroj bi bio $2019n$, a to je djeljivo s 3. Ali zbroj brojeva na kružnici uvijek daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3, pa je zato odgovor negativan.

A što ako nema brojeva?

Invarijanta ne mora nužno biti izražena brojem. To svojstvo može biti i geometrijsko – primjerice opseg, površina ili smjer pravca!

Zadatak. Eugen ima papirnati jednakostranični trokut. Dopuštena mu je sljedeća operacija: može razrezati trokut na manje mnogokute i zatim od tih dijelova sastaviti kvadrat tako da oba imaju jednaki opseg i površinu. Može li Eugen doći do kvadrata ako je krenuo s jednakostraničnim trokutom?

Rješenje. Promatramo trokut i kvadrat koji imaju jednaki opseg.



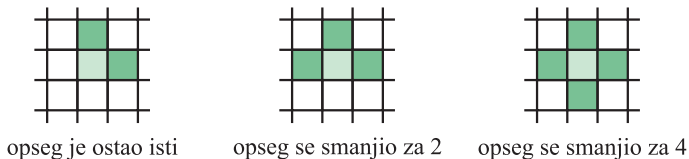
Ako je stranica originalnog trokuta a , opseg mu je $O = 3a$. Kako se opseg ne mijenja, dobivamo da bi stranica kvadrata trebala biti $\frac{3}{4}a$. Ali onda je površina kvadrata $\frac{9}{16}a^2$, a trokuta $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, što je kontradikcija s time da bi površina morala ostati ista.

Bonus: MONOvarijanta

Osim što nam uočavanje nečega što se nikada ne mijenja zna pomoći u rješavanju zadataka, ponekad je korisno uočiti i nešto što uvijek raste ili uvijek pada!

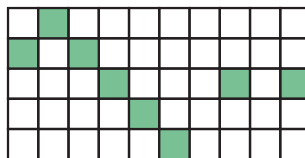
Zadatak. Imamo zemljište 5×10 na kojem je n kvadratnih polja obraslo u korov. Svakog dana, polje koje je prošli dan imalo barem 2 susjedne stranice koje su obrasle u korov, i samo obraste u korov. Nakon nekoliko dana, cijelo zemljište je obraslo u korov. Odredi najmanji n za koji je to moguće.

Rješenje. Recimo da na početku imamo n zaraženih polja. Tada početni opseg može biti najviše $4n$.



Prmatranjem slučajeva uočavamo ključnu činjenicu: **opseg korova ne može se povećati!** Zato je i krajnji opseg najviše $4n$. No krajnji opseg je $2 \cdot 5 + 2 \cdot 10 = 30$, stoga $4n \geq 30$, to jest, $n > 7$.

Za $n = 8$ pronalazimo konstrukciju, primjerice ovakvu:



Ultrasupermegakul trening za buduće matematičke legende

Sad kad smo motivirani i informirani, olovke u ruke i na posao! Pripremila sam vam lijepu selekciju zadataka s domaćih natjecanja kako biste trenirali svoje matematičke mišiće. Možda upravo uočavanje invarijante bude ono što vam dogodine zaradi izlet u Vodice (ili gdje već bude Državno)!

Savjeti za vježbu: Pokušavajte rješavati zadatke **barem 20 minuta**. Kad osjećate da ste ispućali sve ideje, pogledajte uputu i nastavite rješavati. Nakon još 10-ak minuta, ako još uvijek nemate ideju, pročitajte rješenje. Nakon čitanja ga prepričajte svojim riječima i zapišite savjet koji bi pomogao da ga se riješi – tako ćete bolje zapamtiti ideju zadatka!

Za invarijante je korisno napisati listu invarijanti koje su funkcionirale.

1. Ploča 8×8 obojena je kao šahovska ploča. U pojedinom potezu treba odabrati jedan redak ili stupac i svim poljima u tom retku ili stupcu promijeniti boju iz crne u bijelu i obrnuto. Može li se, konačnim nizom takvih poteza, postići da točno jedno polje na ploči bude crno?

Županijsko natjecanje iz matematike 2014., 1. razred

2. Tri skakavca sjede u tri vrha kvadrata. Svake minute jedan od njih preskoči nekog od preostala dva te se smjesti u točku simetričnu onoj iz koje je skočio u odnosu na skakavca kojeg je preskočio. Može li barem jedan od njih nakon konačno mnogo takvih skokova stići u četvrti vrh kvadrata?

Županijsko natjecanje iz matematike 2009., 2. razred

3. Na ploči su zapisani neki cijeli brojevi. U svakom koraku odabiremo brojeve a i b koji se nalaze na ploči, obrišemo ih i umjesto njih zapišemo brojeve $3a - b$ i $13a - 3b$. Ako su na početku na ploči brojevi $1, 2, 3, 4, \dots, 2011, 2012$, mogu li se nakon konačnog broja koraka na ploči nalaziti brojevi $2, 4, 6, 8, \dots, 4022, 4024$?

Državno natjecanje iz matematike 2012., 3. razred

4. Na ploči se nalazi prvih n prirodnih brojeva ($n \geq 3$). Ante ponavlja sljedeći postupak: najprije po volji bira dva broja na ploči, a zatim ih povećava za isti proizvoljni iznos. Odredi sve prirodne brojeve n za koje Ante, ponavljanjem tog postupka, može postići da svi brojevi na ploči budu jednaki.

Državno natjecanje iz matematike 2015., 1. razred

5. Na nekim poljima ploče dimenzija 2017×2017 nalazi se po jedna bubamara; ostala polja su prazna. Bubamare se pomiču po ploči, nikad ju ne napuštajući, prema sljedećim pravilima. Svaka bubamara se svake sekunde pomakne na susjedno polje. Pomaci su horizontalni (na polje lijevo ili desno od onog na kojem se bubamara nalazi) ili vertikalni (na polje iznad ili ispod onog na kojem se bubamara nalazi). Bubamara koja napravi horizontalni pomak u sljedećoj sekundi mora napraviti vertikalni pomak, a bubamara koja napravi vertikalni pomak u sljedećoj sekundi mora napraviti horizontalni pomak. Odredi najmanji broj bubamara tako da, neovisno o njihovom početnom rasporedu i neovisno o njihovim pomacima možemo biti sigurni da će se u nekom trenutku dvije bubamare naći na istom polju.

Državno natjecanje iz matematike 2017., 4. razred

6. Branko ispisuje niz kvadratnih polinoma s realnim koeficijentima. U svakom koraku, nakon prethodno napisanog polinoma $ax^2 + bx + c$, zapisuje polinom $cx^2 + bx + a$ ili polinom $a(x+d)^2 + b(x+d) + c$ za neki realni broj d . Ako započne s polinomom $x^2 - 2x - 1$, može li Branko opisanim postupkom nakon određenog broja koraka dobiti polinom:

a) $2x^2 - 1$,

b) $2x^2 - x - 1$?

Državno natjecanje iz matematike 2018., 2. razred

7. Ukруг je napisano 299 nula i jedna jedinica. Dozvoljeni su sljedeći potezi:

- svakom broju istovremeno oduzeti njemu oba susjedna broja
- odabrati dva broja između kojih se nalaze točno dva broja te ih oba uvećati ili oba umanjiti za 1.

Može li se konačnim nizom dozvoljenih poteza postići da ukруг budu napisane

- a) dvije uzastopne jedinice i 298 nula, b) tri uzastopne jedinice i 297 nula?

Državno natjecanje iz matematike 2019., 2. razred

A što je sa šniclama?

Danas smo pričali o (otvorenim i zatvorenim) problemima današnje matematike i moram priznati da mi se malo vrti u glavi.

Dok sam se natjecala stalno sam bila frustrirana jer nešto ne znam, a po razgovorima s nekima od vas, niste ni vi bili smireniji. Kasnije na faksu čovjek želi iskočiti iz vlastite kože jer nema pojma kako funkcioniraju povlaci i zašto Shorov algoritam funkcionira i što je koprodukt u kategoriji grupa, a nakon toga ide egzistencijalna kriza zvana *Hoću li ikad doprinijeti matematici?* Mi matematičari smo valjda takvi: ono što znamo trivijalno nam je, ono što ne znamo nemoguće i pritom najzanimljivije nego ikad dosad.

Tko se ne bi osjetio malenim i beznačajnim dok pričamo o potrazi za temeljnim istinama o strukturi iza ideja koje koristimo otkad je pisma? Valjda je to normalno. Dok pijem svoju kavu i gledam zalazak sunca, pada mi napamet: lijepo je biti tu, jesti bečke šnicle i slušati o matematici.



Šnicla