Što dobivamo kada promatramo nešto na drugi način?

Željko Hanjš, Alija Muminagić

Trokut je naizgled jednostavna geometrijska figura, ali ima mnoga interesantna svojstva. Između njh smo ovaj puta izabrali četiri karakteristične ili značajne točke trokuta. To su središte U upisane kružnice, središte O opisane kružnice, ortocentar ili sjecište visina H i težište ili sjecište težišnica T. Svaka od njih je jedinstvena.

Prisjetimo se da za njih vrijede ovi poučci:

Poučak 1. Simetrale unutarnjih kutova trokuta sijeku se u jednoj točki. To je središte U upisane kružnice.

Poučak 2. Simetrale stranica trokuta sijeku se u jednoj točki. To je središte O opisane kružnice.

Poučak 3. Neka su O i H središte opisane kružnice i ortocentar trokuta ABC te M, N, P polovišta njegovih stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$. Tada vrijedi:

(1) $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{CH}$

(2) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$ (Hamiltonov[1] poučak)

(3) $2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CH}$.

Poučak 4. Pravci određeni visinama trokuta sijeku se u jednoj točki. To je ortocentar trokuta H.

Poučak 5. Težišnice trokuta sijeku se u jednoj točki T koju zovemo težište trokuta. Ono dijeli svaku težišnicu u omjeru $2:1$, mjereći od vrha trokuta.

U ovom prilogu želimo prikazati na jedan drugi, ali manje poznat način, kako konstruirati točke U, O, H i T.

Središte U upisane kružnice

Neka je $|AB| = c$ najdulja stranica u trokutu ABC, $|BC| = a$, $|AC| = b$.

Lukovi sa središtima u vrhovima A i B polumjera $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ sijeku stranicu $\overline{AB}$ u točkama D i E, a lukovi sa središtima B i A polumjera $\overline{BD}$ i $\overline{AE}$ sijeku stranice $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ u točkama F i G. Tada je:

$$|BD| = |BF| = c - b, \qquad |AE| = |AG| = c - a$$

$$|FC| = a - (c - b) = a + b - c, \qquad |CG| = b - (c - a) = a + b - c$$

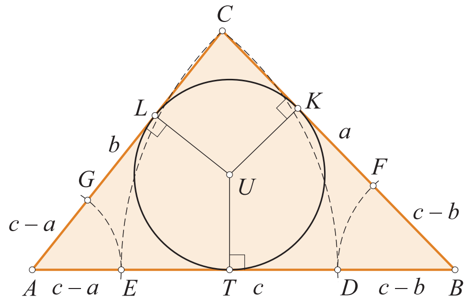
pa je $|FC| = |CG|$.

[1] V. R. Hamilton () irski je matematičar

Simetrale dužina $\overline{FC}$ i $\overline{CG}$ (kroz njihova polovišta K i L) sijeku se u točki U. Sada imamo:

$$\Delta CLU \cong \Delta CKU \quad (|CL| = |CK|, \ \ \overline{CU} \text{ je zajednička stranica i pravi kutovi})$$

i iz te podudarnosti slijedi $\measuredangle LCU = \measuredangle KCU$, tj. CU je simetrala kuta $\measuredangle KCL$.



Slika 1.

Iz slike 1 imamo:

$$|AL| = |AG| + |GL| = |AG| + \frac{1}{2}|CG| = c - a + \frac{1}{2}(a+b-c) = \frac{1}{2}(b+c-a),$$

$$|BK| = |BF| + |FK| = |BF| + \frac{1}{2}|FC| = c - b + \frac{1}{2}(a+b-c) = \frac{1}{2}(a+c-b).$$

Ako je T polovište dužine $\overline{DE}$ imamo:

$$|AT| = |AE| + \frac{1}{2}|ED| = |AE| + \frac{1}{2}(|AB| - |AE| - |BD|) = \frac{1}{2}(b+c-a) = |AL|,$$

$$|BT| = |AB| - |AT| = c - \frac{1}{2}(b+c-a) = \frac{1}{2}(a+c-b) = |BK|.$$

Gore smo pokazali da je

$$|AT| = |AL| = \frac{1}{2}(b+c-a) \qquad \text{i} \qquad |BT| = |BK| = \frac{1}{2}(a+c-b)$$

i osim toga je

$$|CK| = |CL| = |AC| - |AL| = b - \frac{1}{2}(b+c-a) = \frac{1}{2}(a+b-c)$$

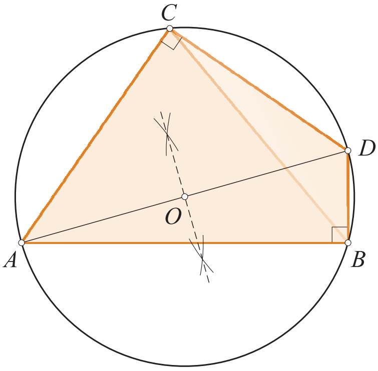
pa prema poučku o udaljenostima vrhova od dirališta trokutu upisane kružnice: udaljenost vrha trokuta od dirališta upisane kružnice sa stranicama trokuta, kojima je taj vrh zajednički, jednaka je razlici poluopsega i duljine tom vrhu nasuprotne stranice, slijedi da su točke K, L, T upravo dirališta upisane kružnice u trokut ABC.

Čitateljima prepuštamo da slična razmatranja izvedu za tupokutan i pravokutan trokut.

Središte O opisane kružnice

Okomice na stranice trokuta ABC u vrhovima B i C sijeku se u točki D. Konveksni četverokut $ABCD$ je tetivni ako i samo ako su mu nasuprotni kutovi suplementni. Četverokut $ABCD$ je tetivni i vrijedi $\measuredangle ABD + \measuredangle ACD = 180°$ (slika 2).

Točke A, B, C, D leže na jednoj kružnici i ona je opisana trokutu ABC. Spojimo točke A i D. Trokuti ABD i ACD su pravokutni sa zajedničkom hipotenuzom $\overline{AD}$ čije polovište O je središte opisane kružnice trokutu ABC.



Slika 2.

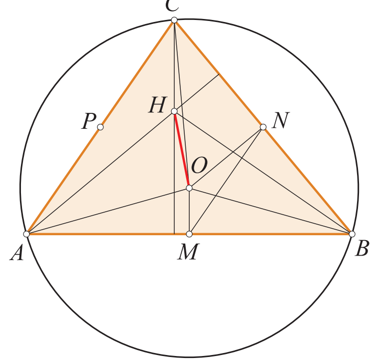
Promatrajte posebno tupokutan i pravokutan trokut.

Hamiltonov poučak

(1) Vektori $\overrightarrow{OM}$ i $\overrightarrow{CH}$ su kolinearni pa je $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{CH}$ i analogno $\overrightarrow{ON} = \beta\overrightarrow{AH}$, za neke $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ koje treba odrediti. Kako je $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HA}$ i s druge strane $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OM} = \beta\overrightarrow{HA} + \alpha\overrightarrow{CH}$ odakle zaključujemo $\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\overrightarrow{HA} + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{0}$. Zbog linearne nezavisnosti vektora $\overrightarrow{HA}$ i $\overrightarrow{CH}$ slijedi $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ tj. $\overrightarrow{CH} = 2\overrightarrow{OM}$.

(2) $\overrightarrow{OC} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OH}$.

(3)
$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH}\\
&= 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OP}\\
&= 2\left((\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BN}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP})\right)\\
&= 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + 2(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP})\\
&= 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})\\
&= 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).
\end{aligned}$$



Slika 3.

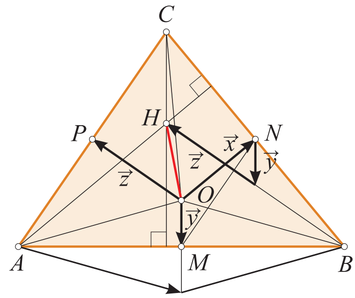
Ortocentar H trokuta

Gore smo dokazali da vrijedi

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$$

(Hamiltonov pučak).

Točku H možemo konstruirati ovako. Konstrukcija točke O nam je poznata (vidi sliku 4). Translatirajmo vektor $\overrightarrow{OB}$ tako da mu je početak (O) završetak vektora $\overrightarrow{OA}$ (A), a zatim konstruiramo vektor $\overrightarrow{OC}$ tako da mu je početak upravo kraj od $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. Prema Hamiltonovom poučku, upravo je taj završetak točka H.



Slika 4.

Drugi način. Neka su O i H središte opisane kružnice i ortocentar, a M, N, P redom polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ trokuta ABC i $\overrightarrow{ON} = \vec{x}$, $\overrightarrow{OM} = \vec{y}$, $\overrightarrow{OP} = \vec{z}$. Tada je

$$\vec{x} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}), \quad \vec{y} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}), \quad \vec{z} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$$

(na osnovu pravila paralelograma za zbrajanje dvaju vektora).

Nakon zbrajanja ovih jednakosti dobivamo

$$\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$$

(na osnovu Hamiltonovog poučka).

Konstrukciju točke H vidimo sa slike 4.

Težište T trokuta

Čitateljima prepuštamo dokaz ovog poučka: U svakom trokutu, koji nije jednakostraničan, središte O opisane kružnice, težište T i ortocentar H leže na istom pravcu. Pritom T leži na dužini $\overline{OH}$ i vrijedi $|OT| : |TH| = 1 : 2$. Nakon dokaza konstruirati točku T.

Literatura

[1] ANĐELKO MARIĆ, *Vektori, zbirka riješenih zadataka*, Element, Zagreb, 1997.

[2] EDGAR HÖNIGER, *Winkelsenkrechte und Mittenhalbierende?*, Die Wurzel, juli 2016.