



## ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. prosinca 2025. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 3/303.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 72.

### A) Zadaci iz matematike

**4043.** Odredi ostatak pri dijeljenju broja  $2851^{604^{20}}$  brojem 14.

**4044.** Nađi sva rješenja jednadžbe

$$|4x - |x - 2|| + 3| = 16.$$

**4045.** Za svaki pozitivan cijeli broj  $n$  s  $g(n)$  je označen broj uređenih parova  $(x, y)$  pozitivnih cijelih brojeva takvih da je

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}.$$

Odredi  $g(20)$  i  $g(2000)$ .

**4046.** Ako su  $x, y, z$  realni brojevi takvi da je  $x^3 + y^3 + z^3 \neq 0$ , dokaži da je

$$\frac{2xyz - (x + y + z)}{x^3 + y^3 + z^3}$$

jednako  $\frac{2}{3}$  ako i samo ako je  $x + y + z = 0$ .

**4047.** U skupu realnih brojeva riješi sustav jednadžbi

$$x_1 = \frac{1}{2} \left( x_2 + \frac{1}{x_2} \right)$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( x_3 + \frac{1}{x_3} \right)$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \left( x_4 + \frac{1}{x_4} \right)$$

$$x_4 = \frac{1}{2} \left( x_1 + \frac{1}{x_1} \right).$$

**4048.** Odredi i skiciraj u kompleksnoj ravni skup

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C}, 0 < \arg \frac{z-i}{z+i} < \frac{\pi}{4} \right\}.$$

**4049.** Odredi najveću vrijednost izraza

$$(a+b)^4 + (a+c)^4 + (a+d)^4 + (b+c)^4 + (b+d)^4 + (c+d)^4.$$

gdje su  $a, b, c, d$  realni brojevi takvi da je

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1.$$

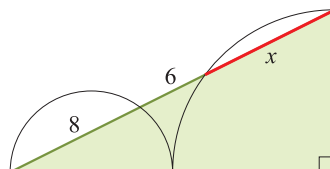
**4050.** Odredi brojeve  $x$  i  $y$  takve da je

$$5(\log_y x + \log_x y) = 26$$

$$xy = 64.$$

**4051.** U trokutu  $ABC$  je  $|BC| = a$ ,  $|AB| = |AC| = b$  i  $\sphericalangle BAC = 80^\circ$ . Dokaži jednakost  $a^3 + \sqrt{3}b^3 = 3ab^2$ .

**4052.** Nađi  $x$  sa slike.



**4053.** Ispitaj periodičnost funkcija:

a)  $f(x) = \sqrt{|\cos x|}$

b)  $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$ .

**4054.** Trokutu  $ABC$  upisana je kružnica. Neka je  $P$  njezino diralište sa stranicom  $\overline{AB}$ , a  $Q$  je točka na kružnici dijametralno suprotna točki  $P$ . Pravac  $CQ$  siječe stranicu  $\overline{AB}$  u točki  $R$ . Dokaži da je polovište stranice  $\overline{AB}$  ujedno i polovište dužine  $\overline{PR}$ .

**4055.** Točke  $A_1$  i  $B_1$  su polovišta kateta  $\overline{BC}$  i  $\overline{AC}$  pravokutnog trokuta  $ABC$ , a  $E$  i  $F$  su presjeci simetrala unutarnjih kutova  $\alpha$  i  $\beta$  s katetama  $\overline{BC}$  i  $\overline{AC}$ . Ako je  $|AA_1| = m_a$ ,  $|BB_1| = m_b$ ,  $|AE| = s_\alpha$ ,  $|BF| = s_\beta$ ,  $r$  i  $R$  radijusi upisane i opisane kružnice, dokaži nejednakost

$$\frac{m_a^2}{s_\alpha^2} + \frac{m_b^2}{s_\beta^2} \geq \frac{5}{8} \left( 3 + \frac{r}{R} \right).$$

**4056.** Petar se sprema školske praznike provesti s grupom izviđača. Njegovi planovi su točno definirani: svaki drugi dan kupat će se u moru, svaki treći dan njegov je red za odlazak u obližnji dućan po namirnice, a svaki peti dan posvetit će se rješavanju matematičkih zadataka. Prvi dan će provesti, naravno, sve troje. Ako

planira na odmoru provesti 90 dana, koliko će biti dana kada ne mora ni prstom maknuti?

## B) Zadaci iz fizike

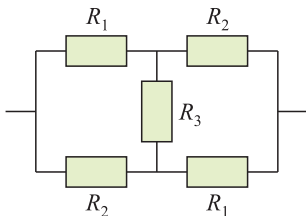
**OŠ – 554.** Učenici su serijski spojili četiri jednaka otpornika na izvor napona 6 V. Ampermetar spojen u taj krug je izmjerio struju od 100 mA. Njihov ampermetar može mjeriti struju do 2 A. Mogu li ga koristiti ako iste otpornike spoje paralelno na isti izvor?

**OŠ – 554.** Automobil se uspinje na brdo visoko 400 m po cesti dugačkoj 5 km. Do vrha mu je trebalo 10 min. Masa automobila zajedno s vozačem je 1500 kg, a prosječna sila trenja iznosi 300 N. Kolika je snaga automobilskog motora?

**OŠ – 556.** Drvena kocka ima volumen  $8 \text{ cm}^3$ . Kolikom tlakom ona tlači podlogu? Koliki volumen ima kocka ispod koje je tlak dvostruko veći? Gustoća drva od kojeg su kocke napravljene iznosi  $700 \text{ kg/m}^3$ .

**OŠ – 557.** Učiteljica je dala zadatak učenicima u kojem su trebali odrediti gustoću nepravilnog komadića metala koristeći samo preciznu vagu i malu plastičnu čašu. Učenici su prvo izvagali metal i odredili da ima 24 g. Zatim su čašu do vrha napunili vodom i izvagali ju. Imala je 57 g. U punu čašu su pažljivo stavili svoj metal i kad se dio vode izlio iz nje ponovo ju izvagali. Sada joj je masa bila 77 g. Učenici znaju da je gustoća vode  $1000 \text{ kg/m}^3$  i pomoću tog podatka su izračunali gustoću metala. Kolika je gustoća tog metala?

**1875.** Izračunajte ukupan omski otpor strujnog kruga na slici za  $R_1 = 1 \Omega$ ,  $R_2 = 4 \Omega$  i  $R_3 = 2 \Omega$ .



**1876.** Valjak polumjera 2 cm i mase 200 g pluta u uspravnom položaju u tekućini gustoće  $2 \text{ g/cm}^3$ . Nakon što ga potisnemo malo dublje

u tekućinu i otpustimo pritisak, valjak počne titrati. Kolika je frekvencija njegova titranja ako je prigušenje titranja zanemarivo?

*(Zadatak osmislio Duje Dodig.)*

**1877.** U posudu je naliveno 5 litara mješavine vode i etanola. Mješavinu zagrijavamo grijačem radne snage 1 kW i učinkovitosti zagrijavanja 80 %. Ako se mješavina zagrijala od  $20^\circ\text{C}$  do  $50^\circ\text{C}$  za točno 10 minuta, odredite ukupnu masu tekućine. Uzmite da je volumen smjese jednak zbroju volumena pojedinih tekućina. Koristite sljedeće vrijedosti: specifični toplinski kapacitet vode  $4200 \text{ J/kgK}$ , specifični toplinski kapacitet etanola  $2400 \text{ J/kgK}$ , gustoću vode  $1000 \text{ kg/m}^3$  i gustoću etanola  $780 \text{ kg/m}^3$ .

**1878.** U sljedećim nuklearnim raspadima odredite nepoznate atomske ( $Z_1, Z_2$ ) i masene ( $A_1, A_2$ ) brojeve izotopa te oznake nepoznatih elemenata ( $x, y$ ):

$${}_{88}^{A_1}x \rightarrow \alpha + {}_{Z_2}^{213}y$$

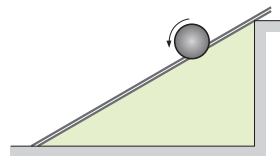
$${}_{67}^{142}x \rightarrow p + {}_{Z_2}^{A_2}y$$

$${}_{9}^{9}x \rightarrow n + {}_{Z_2}^{A_2}\text{He}$$

$${}_{Z_1}^{A_1}x \rightarrow e^- + {}_{11}^{24}y$$

$${}_{Z_1}^{122}x \rightarrow e^+ + {}_{54}^{A_2}y$$

**1879.** Kosina je sastavljena od dvije paralelne šipke, svaka od kojih je jednim krajem oslonjena o rub police određene visine, a drugim je uprta o tlo. Šipke su udaljene 2 cm. Niz njih je iz mirovanja u kotrljanje bez proklizavanja puštena homogena kugla polumjera 2 cm. Ako je početna visina središta kugle nad tlom 10 cm, kolika je njezina brzina u trenutku kada dotakne tlo?



*(Zadatak osmislio Duje Dodig.)*

**1880.** Elektron-pozitron par proljeće uz mirujućeg promatrača i zatim anihilira u tri fotona. Jedan foton emitiran je u smjeru gibanja para, a preostala dva okomito na taj smjer. Ako svi fotoni imaju istu energiju, kolika je početna brzina para? Potreban je relativistički račun.

**1881.** Staklena kugla polumjera 15 cm i indeksa loma 1.5 nalazi se u zraku. Unutar kugle, na udaljenosti 12 cm od njezina središta nalazi se točkasti izvor svjetlosti. Neka je  $\theta$  kut odašiljanja svjetlosne zrake s obzirom na spojnicu središta kugle i svjetlosnog izvora. U kojem rasponu kuta  $\theta$  svjetlosna zraka mora biti odaslana da bi izašla iz kugle? Za koje udaljenosti izvora od središta kugle je moguće da neke zrake ne izađu iz kugle?

### C) Rješenja iz matematike

**4015.** Nadi sve troznamenkaste prirodne brojeve koji pri dijeljenju s 37 daju ostatak 2, a pri dijeljenju s 11 ostatak 5.

**Rješenje.** Neka je  $x$  traženi troznamenkasti broj. Iz uvjeta zadatka možemo pisati:

$$x = 37a + 2, \quad a \in \mathbb{Z} \quad \text{i} \quad x = 11b + 5, \quad b \in \mathbb{Z},$$

$$37a + 2 = 11b + 5$$

$$b = \frac{37a - 3}{11} = 3a + \frac{4a - 3}{11}.$$

Budući da su  $a$  i  $b$  cijeli brojevi vidimo da i  $\frac{4a - 3}{11}$  treba biti cijeli broj. Tako je:

$$\frac{4a - 3}{11} = c, \quad c \in \mathbb{Z}$$

$$a = \frac{11c + 3}{4}$$

$$x = \frac{407c + 119}{4}$$

$$100 \leq \frac{407c + 119}{4} \leq 999$$

$$\frac{281}{407} \leq c \leq \frac{3877}{407}.$$

Jer je  $c \in \mathbb{Z}$ , slijedi  $c \in \{1, 2, \dots, 9\}$ , ali jedine vrijednosti za koje je i  $a \in \mathbb{Z}$  su  $c \in \{3, 7\}$  i tada je  $a \in \{9, 20\}$ . Konačno je  $x \in \{335, 742\}$ .

Duje Dodig (4),

Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

**4016.** Dokaži da za svako  $x > 0$  vrijedi nejednakost

$$\sqrt{x}(x + 1) + x(x - 4) + 1 \geq 0.$$

**Rješenje.** Za  $x > 0$  je  $(\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0$ , tj.  
 $x + 1 \geq 2\sqrt{x}$ .

Sada je

$$\begin{aligned} & \sqrt{x}(x + 1) + x(x - 4) + 1 \\ & \geq \sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x} + x(x - 4) + 1 \\ & = 2x + x^2 - 4x + 1 \\ & = x^2 - 2x + 1 \\ & = (x - 1)^2 \\ & \geq 0. \end{aligned}$$

Jednakost se postiže u slučaju  $x = 1$ .

Duje Dodig (4), Zagreb

**4017.** Odredi sve realne brojeve  $b > 1$  takve da je

$$[\log_b x] = [\log_b [x]]$$

za sve realne  $x \geq 1$ .

**Rješenje.** Razmatramo dva moguća slučaja.

1°  $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ .

Ako je  $k = [\log_b [x]]$ , vrijedi:

$$k \leq \log_b [x] < k + 1$$

$$\iff b^k \leq [x] < b^{k+1}.$$

Budući da je  $x$  prirodan broj, to je ekvivalentno s:

$$b^k \leq x < b^{k+1}$$

$$\iff k \leq \log_b x < k + 1$$

$$\iff [\log_b x] = k.$$

2°  $b \notin \mathbb{N}$ .

Tada postoji prirodan broj  $k$  za koji  $x = b^k$  također nije prirodan broj. No, tada vrijedi:

$$[\log_b b^k] = [k] = k = \log_b b^k$$

$$> \log_b [b^k] \geq [\log_b [b^k]]$$

pa nemamo identitet.

Dakle, svi realni brojevi  $b > 1$  za koje vrijedi dana jednakost su iz skupa:

$$\{b \mid b \geq 2, b \in \mathbb{N}\}.$$

Duje Dodig (4), Zagreb

**4018.** Odredi i skiciraj skup  $S$  u kompleksnoj ravnini ako je

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} : 0 < \arg \frac{z - i}{z + i} < \frac{\pi}{4} \right\}.$$

**Rješenje.**

$$\begin{aligned} \frac{z-i}{z+i} &= \frac{x+(y-1)i}{x+(y+1)i} \cdot \frac{x-(y+1)i}{x-(y+1)i} \\ &= \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2} + \frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}i. \end{aligned}$$

Iz uvjeta zadatka je:

$$0 < \arctg \frac{-2x}{x^2+y^2-1} < \frac{\pi}{4}, \quad \text{tj.}$$

$$0 < \frac{-2x}{x^2+y^2-1} < 1.$$

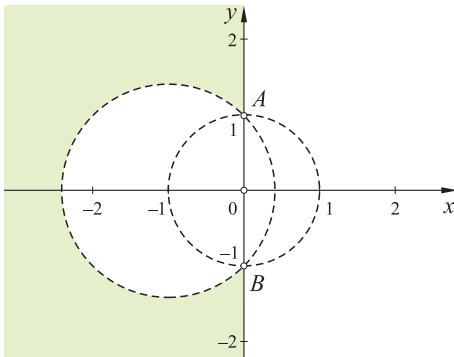
Vidimo iz uvjeta zadatka da je broj  $\frac{z-i}{z+i}$  u prvom kvadrantu pa je lijevi dio gornje nejednakosti ekvivalentan s:

$$\left. \begin{aligned} -2x > 0 \\ x^2+y^2-1 > 0 \\ x < 0 \\ x^2+y^2 > 1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Iz

$$\begin{aligned} \frac{-2x}{x^2+y^2-1} < 1 / \cdot x^2+y^2-1 (> 0) \\ x^2+y^2-1 > -2x \\ (x+1)^2+y^2 > (\sqrt{2})^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Konačno rješenje je presjek uvjeta (1) i (2) što ćemo prikazati u Gaussovoj ravnini.



Kružnice se sijeku u točkama  $A(0, 1)$  i  $B(0, -1)$ .

Duje Dodig (4), Zagreb

**4019. Pokaži da je**

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1x + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2x + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3x + b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^3) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

**Rješenje.** Retke ili stupce determinante pomnožene nekim brojem možemo dodavati drugim retcima ili stupcima, a da se njihova vrijednost ne mijenja. Dakle, oduzimanjem prvog stupca pomnoženog s  $x$  od drugog stupca imamo:

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1x + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2x + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3x + b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1x + b_1 - x(a_1 + b_1x) & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2x + b_2 - x(a_2 + b_2x) & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3x + b_3 - x(a_3 + b_3x) & c_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 + b_1x & (1-x^2)b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2x & (1-x^2)b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3x & (1-x^2)b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= (1-x^2) \begin{vmatrix} a_1 + b_1x & b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2x & b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= (1-x^3) \begin{vmatrix} a_1 + b_1x - b_1x & b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2x - b_2x & b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3x - b_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= (1-x^3) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

gdje smo od prvog stupca oduzeli drugi pomnožen s  $x$ .

Duje Dodig (4), Zagreb

**4020.** Pravokutnik je upisan u trokut sa stranicama 10 cm, 17 cm i 21 cm, tako da dva njegova vrha leže na jednoj stranici trokuta. Odredi stranice pravokutnika ako je njegov opseg 22.5 cm.

**Rješenje.**

$$a = 21, \quad b = 10, \quad c = 17$$

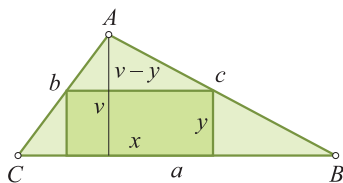
$$o_p = 2(x + y) = 22.5 \implies x + y = 11.25$$

$$s = \frac{a + b + c}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

$$P = \frac{av}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{24 \cdot 3 \cdot 14 \cdot 7} = 84$$

$$v = \frac{2 \cdot 84}{21} = 8.$$



Sličnost trokuta:

$$\frac{v-y}{x} = \frac{v}{a} \implies \frac{v-y}{11.25-y} = \frac{v}{a}$$

$$\implies \frac{8-y}{11.25-y} = \frac{8}{21}$$

$$\implies y = 6, \quad x = 5.25.$$

Franka Horvat (2),

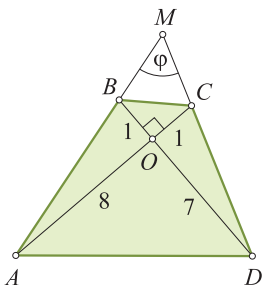
X. gimnazija "Ivan Supek", Zagreb

**4021.** Dijagonale konveksnog četverokuta ABCD sijeku se u točki O pod pravim kutom tako da je  $|AO| = 8$ ,  $|BO| = |CO| = 1$  i  $|DO| = 7$ . Produžeci stranica  $|AB|$  i  $|CD|$  sijeku se u točki M. Koliki je  $\sphericalangle AMD$ ?

**Rješenje.** Vidimo da je:

$$\operatorname{tg} \sphericalangle BAO = \frac{1}{8}, \quad \operatorname{tg} \sphericalangle OAD = \frac{7}{8},$$

$$\operatorname{tg} \sphericalangle ODA = \frac{8}{7}, \quad \operatorname{tg} \sphericalangle ODC = \frac{1}{7}.$$



Sada je:

$\sphericalangle AMD$

$$= 180^\circ - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{8} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{7}{8} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{8}{7} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{7}$$

$$= 180^\circ - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{8} - \underbrace{\left( \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{7}{8} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{8}{7} \right)}_{90^\circ} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{7}$$

$$= 90^\circ - \left( \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{8} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{7} \right)$$

$$= 90^\circ - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\frac{1}{8} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7}} = 90^\circ - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{3}{11}$$

$$= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{11}{3}.$$

Duje Dodig (4), Zagreb

**4022.** Neka su  $a, b, c$  duljine stranica trokuta sa svojstvom da su za svaki prirodan broj  $n, a^n, b^n, c^n$  duljine stranica trokuta. Dokaži da je trokut jednakokratan.

**Prvo rješenje.** Neka je  $a \geq b \geq c$ . Ako su  $a^n, b^n, c^n$  stranice trokuta mora biti:

$$a^n < b^n + c^n \implies a^n - b^n < c^n$$

$$\implies (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) < c^n \quad (1)$$

Zbog  $a \geq b \geq c$  je:

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1} \geq n \cdot c^{n-1}$$

i nejednakost (1) pišemo u obliku:

$$(a-b) \cdot nc^{n-1} < c^n \implies a-b < \frac{c}{n}.$$

Posljednja nejednakost mora biti ispunjena za svaki  $n \in \mathbb{N}$ , a to je moguće samo u slučaju ako je  $a = b$ , tj. ako je trokut jednakokratan.

Duje Dodig (4), Zagreb

**Drugo rješenje.** Pretpostavimo da je trokut raznostraničan.

Neka je  $c$  najdulja stranica. Tada je za svako  $n, c^n < a^n + b^n$  za  $n \geq 1$ . To je ekvivalentno s

$$1 < \left(\frac{a}{c}\right)^n + \left(\frac{b}{c}\right)^n, \quad n \geq 1.$$

Kako je  $a < c < b < c$  prelakom na limes kada  $n \rightarrow \infty$  dobivamo  $1 < 0$ , što nije moguće.

Dakle, trokut je jednakokratan.

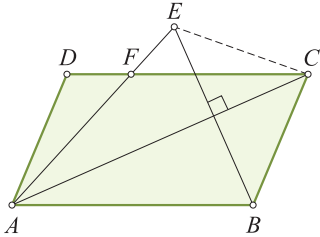
Franka Horvat (2), Zagreb

**4023.** Dan je paralelogram  $ABCD$ ,  $E$  točka osnosimetrična točki  $B$  u odnosu na pravac  $AC$  i  $F$  sjecište pravaca  $AE$  i  $CD$ . Dokaži da su trokuti  $ADF$  i  $CEF$  sukladni.

**Rješenje.** Iz svojstava paralelograma vrijedi

$$\triangle ADC \cong \triangle CBA \cong \triangle CEA$$

pa je  $|AD| = |CE|$  i  $\sphericalangle ADF = \sphericalangle CEF$ .

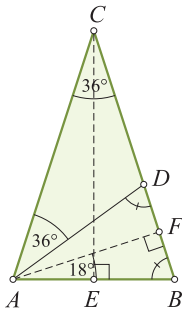


Iz jednakosti sukuta  $\sphericalangle AFD = \sphericalangle CFE$ , prema KSK poučku o sukladnosti slijedi tvrdnja  $\triangle ADF \cong \triangle CEF$ .

Duje Dodig (4), Zagreb

**4024.** Neka je  $x = \sin 18^\circ$ . Dokaži da je  $4x^2 + 2x = 1$ .

**Rješenje.** Neka je  $ABC$  jednakokračan trokut s kutom od  $36^\circ$  pri vrhu  $C$ . Povucimo simetralu  $AD$  kuta  $\sphericalangle BAC$ . Vidimo da je i  $\triangle ACD$  jednakokračan i  $\triangle ABC \sim \triangle BDA$ .



Iz  $\triangle BCE$  je:

$$\sin 18^\circ = \frac{|EB|}{|BC|} = \frac{|AB|}{2|BC|}$$

$$\Rightarrow |AB| = 2 \sin 18^\circ |BC|,$$

odnosno

$$|CD| = |AD| = |AB| = 2x|BC|. \quad (1)$$

Iz  $\triangle ABF$  je:

$$\sin 18^\circ = \frac{|BF|}{|AB|} = \frac{|BD|}{2|AB|}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |BD| &= 2 \sin 18^\circ |AB| \\ &= 2x|AB| = 4x^2|BC|. \quad (2) \end{aligned}$$

Sada je:

$$|BC| = |BD| + |CD| = (4x^2 + 2x)|BC|$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 2x = 1.$$

Duje Dodig (4), Zagreb

**4025.** Za kutove trokuta vrijedi  $\alpha : \beta : \gamma = 4 : 2 : 1$ . Dokaži da za njihove stranice vrijedi  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ .

**Prvo rješenje.** Kako je  $\alpha = 4k$ ,  $\beta = 2k$ ,  $\gamma = k$ , iz sinusova poučka imamo:

$$\frac{a}{\sin 4k} = \frac{b}{\sin 2k} = \frac{c}{\sin k}, \quad \text{tj.}$$

$$a = \frac{\sin 4k}{\sin k} c, \quad b = \frac{\sin 2k}{\sin k} c.$$

Sada je:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &= \frac{\sin k}{\sin 4k \cdot c} + \frac{\sin k}{\sin 2k \cdot c} \\ &= \frac{\sin k}{c} \cdot \left( \frac{1}{\sin 4k} + \frac{1}{\sin 2k} \right) \\ &= \frac{\sin k}{c} \cdot \frac{1 + 2 \cos 2k}{\sin 4k} \\ &= \frac{\sin k}{c} \cdot \frac{\sin^2 k + \cos^2 k + 2(\cos^2 k - \sin^2 k)}{\sin 4k} \\ &= \frac{\sin k}{c} \cdot \frac{3 \cos^2 k - \sin^2 k}{\sin 4k} \\ &= \frac{\sin k}{c} \cdot \frac{3 - 4 \sin^2 k}{\sin 4k} \\ &= \frac{1}{c} \cdot \frac{3 \sin k - 4 \sin^3 k}{\sin 4k} \\ &= \frac{1}{c} \cdot \frac{\sin 3k}{\sin 4k} \\ &= \frac{1}{c} \cdot \frac{\sin(180^\circ - 4k)}{\sin 4k} \\ &= \frac{1}{c} \cdot \frac{\sin 4k}{\sin 4k} = \frac{1}{c}. \end{aligned}$$

Duje Dodig (4), Zagreb

**Drugo rješenje.** Dobivamo  $\alpha = \frac{4\pi}{7}$ ,  $\beta = \frac{2\pi}{7}$ ,  $\gamma = \frac{\pi}{7}$ . Stavimo  $x = \frac{\pi}{7}$ . Iz poučka o sinusima imamo:

$$a = 2R \sin 4x, \quad b = 2R \sin 2x, \quad c = 2R \sin x,$$

$$\text{tj. } \frac{1}{\sin 4x} + \frac{1}{\sin 2x} = \frac{1}{\sin x}.$$

Kako je  $4x = \pi - 3x$  imamo

$$\frac{1}{\sin 3x} + \frac{1}{\sin 2x} = \frac{1}{\sin x}.$$

Nadalje,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin 2x} &= \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin 3x} \\ &= \frac{\sin 3x - \sin x}{\sin x \sin 3x} \\ &= \frac{2 \cos 2x \sin x}{\sin x \sin 3x} \\ &= \frac{2 \cos 2x}{\sin 3x}, \quad \text{tj.} \end{aligned}$$

$$\sin 3x = 2 \sin 2x \cos 2x = \sin 4x,$$

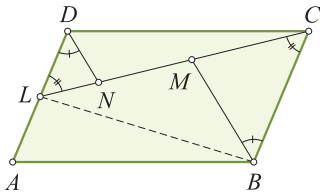
što vrijedi jer je  $\sin 4x = \sin(\pi - 3x) = \sin 3x$ .

Ur:

**4026.** Vrh  $C$  paralelograma  $ABCD$  spojen je s polovištem  $L$  stranice  $\overline{AD}$ . Na dužini  $\overline{LC}$  izabrane su točke  $M$  i  $N$  tako da je  $BM$  paralelno s  $DN$  (točka  $N$  je između  $L$  i  $M$ ). Odredi omjer površina mnogokuta  $ABMND$  i trokuta  $CDN$ .

**Rješenje.** Vidimo da je  $\triangle LND \sim \triangle CMB$  s koeficijentom sličnosti

$$k = \frac{|LD|}{|BC|} = \frac{1}{2}.$$



Za površine tih trokuta je  $\frac{P_{\triangle LND}}{P_{\triangle CMB}} = \frac{1}{4}$ .

Očito je  $\frac{P_{\triangle ABL}}{P_{\triangle BCL}} = \frac{1}{2}$  (visine iz vrhova  $B$  i  $L$  na nasuprotne osnovice su jednake). Stavimo

$P_{\triangle LND} = x$  i  $P_{\triangle ABL} = y$ , imamo:

$$\begin{aligned} &\frac{P_{ABMND}}{P_{\triangle CND}} \\ &= \frac{P_{\triangle ABL} + P_{\triangle BCL} - P_{\triangle BCM} + P_{\triangle LND}}{P_{\triangle CDL} - P_{\triangle LND}} \\ &= \frac{y + 2y - 4x + x}{y - x} = \frac{3y - 3x}{y - x} = 3. \end{aligned}$$

Duje Dodig (4), Zagreb

**4027.** Na stolu se nalazi  $a$  bijelih,  $b$  crnih i  $c$  crvenih kuglica. U jednom koraku može se izabrati dvije kuglice različitih boja i zamijeniti ih s kuglicom treće boje. Na kraju ostane samo jedna kuglica čija boja ne ovisi o toku igre. Kada se to može dogoditi?

**Rješenje.** Najprije uočimo da se svakim korakom broj kuglica na stolu smanjuje za 1, pa će se igra završiti u konačno mnogo koraka. Npr. ako smo u prvom koraku izabrali jednu bijelu i jednu crnu kuglicu i njih zamijenili crvenom kuglicom, na stolu imamo  $a - 1$  bijelih,  $b - 1$  crnih i  $c + 1$  crvenih kuglica. Također vidimo da broj kuglica u sve tri boje mijenja svoju parnost nakon svakog koraka. Ako jedan od brojeva ima različitu parnost od druga dva, to će svojstvo zadržati do kraja igre bez obzira na njezin tok. Kuglica te boje će na koncu jedina ostati na stolu.

Duje Dodig (4), Zagreb

**4028.** Ako je  $p$  prost broj, dokaži

$$(p - 1)! \equiv p - 1 \pmod{1 + 2 + \dots + p - 1}.$$

**Rješenje.** Za  $p = 2$  tvrdnja vrijedi.

Za  $p > 2$  treba dokazati da je:

$$(p - 1)! - (p - 1) \equiv 0 \pmod{\frac{p(p - 1)}{2}}$$

$$(p - 1)[(p - 2)! - 1] \equiv 0 \pmod{p \cdot \frac{p - 1}{2}}.$$

Dovoljno je pokazati da je lijeva strana djeljiva s  $\frac{p - 1}{2}$  i s  $p$ . Očito je djeljivo s  $\frac{p - 1}{2}$ . Pokažimo da je

$$(p - 2)! - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Kako je za prost broj  $p$

$$(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

imamo

$$\begin{aligned} -1 &\equiv (p-1)! \equiv (p-2)!(p-1) \\ &\equiv -(p-2)! \pmod{p}, \quad \text{tj.} \\ (p-2)! - 1 &\equiv 0 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Helena Rukavina (4),  
Gimnazija "Isidora Sekulić", Novi Sad

## D) Rješenja iz fizike

**OŠ – 546.** Staza koja od Bjelskog vodi na vrh Kleka je duga 2.9 km. Izletnici su krenuli u 9:30 i na vrh su stigli u 11:05, ali su se u planinarskom domu, prije glavnog uspona, odmarali 15 minuta. Na vrhu su proveli 10 minuta. Silazak im je bio lakši pa su se na Bjelsko vratili već u 11:45. Koliko je puta prosječna brzina silaska veća od prosječne brzine uspinjanja?

**Rješenje.**

$$s = 2.9 \text{ km}$$

$$t_1 = 9 : 30$$

$$t_2 = 11 : 05$$

$$t_3 = 15 \text{ min}$$

$$t_4 = 10 \text{ min}$$

$$t_5 = 11 : 45$$

$$\frac{v_{\text{silaska}}}{v_{\text{uspinjanja}}} = ?$$

$$\begin{aligned} t_{\text{uspinjanja}} &= t_2 - t_1 - t_3 \\ &= 11 \text{ h } 5 \text{ min} - 9 \text{ h } 30 \text{ min} - 15 \text{ min} \\ &= 1 \text{ h } 20 \text{ min} \end{aligned}$$

$$v_{\text{uspinjanja}} = \frac{s}{t_{\text{uspinjanja}}} = \frac{2.9 \text{ km}}{1.3 \text{ h}} = 2.175 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$\begin{aligned} t_{\text{silaska}} &= t_5 - t_2 - t_4 \\ &= 11 \text{ h } 45 \text{ min} - 11 \text{ h } 5 \text{ min} - 10 \text{ min} \\ &= 30 \text{ min} = 0.5 \text{ h} \end{aligned}$$

$$v_{\text{silaska}} = \frac{s}{t_{\text{silaska}}} = \frac{2.9 \text{ km}}{0.5 \text{ h}} = 5.8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$\frac{v_{\text{silaska}}}{v_{\text{uspinjanja}}} = \frac{5.8 \text{ km/h}}{2.175 \text{ km/h}} = 2.7.$$

Katja Delić (8),  
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

**OŠ – 547.** Najhladniji planet u Sunčevom sustavu nije Neptun, najdalji od Sunca, nego Uran. Prosječna udaljenost Urana od Sunca iznosi oko 2.871 milijardu kilometara, dok je Neptunova oko 4.5 milijarde kilometara. Uran je u prošlosti imao sudar s nekim velikim tijelom što ga je "prevrnulo na bok", os rotacije mu je nagnuta 98 stupnjeva u odnosu na putanju oko Sunca. U tom je sudaru vjerojatno izgubio dio svoje topline. Koliko dulje putuje Sunčeva svjetlost do Neptuna nego do Urana? Brzina svjetlosti u vakuumu iznosi 299 792 458 m/s.

**Rješenje.**

$$r_U = 2.871 \cdot 10^9 \text{ km}$$

$$r_N = 4.5 \cdot 10^9 \text{ km}$$

$$c = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 299\,792.458 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$t_N - t_U = ?$$

$$\begin{aligned} t_N &= \frac{r_N}{c} \\ &= \frac{4\,500\,000\,000 \text{ km}}{299\,792.458 \text{ km/s}} = 15\,010.4 \text{ s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_U &= \frac{r_U}{c} \\ &= \frac{2\,871\,000\,000 \text{ km}}{299\,792.458 \text{ km/s}} = 9\,676.6 \text{ s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_N - t_U &= 15\,010.4 \text{ s} - 9\,676.6 \text{ s} \\ &= 5\,333.8 \text{ s} = 1.48 \text{ h.} \end{aligned}$$

Emma Stanešić (8),  
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

**OŠ – 548.** U utrci na 100 m je mjereno vrijeme ubravanja trkača koji kreće iz niskog starta. Izmjereno je da je on 2 s ubrzavao i nakon toga je do cilja trčao stalnom brzinom. Utrku je istrčao za 10.2 s. Koliku je brzinu postigao tijekom ubravanja?

**Rješenje.**

$$s = 100 \text{ m}$$

$$t_1 = 2 \text{ s}$$

$$t_2 = 10.2 \text{ s} - 2 \text{ s} = 8.2 \text{ s}$$

$$v = ?$$

$$s = \frac{at_1^2}{2} + vt_2 = \frac{at_1^2}{2} + at_1t_2$$

$$= a \left( \frac{t_1^2}{2} + t_1t_2 \right)$$

$$a = \frac{s}{\frac{t_1^2}{2} + t_1t_2}$$

$$= \frac{100 \text{ m}}{\frac{4 \text{ s}^2}{2} + 2 \text{ s} \cdot 8.2 \text{ s}} = 5.435 \text{ m/s}^2$$

$$v = at_1$$

$$= 5.435 \text{ m/s}^2 \cdot 2 \text{ s} = 10.87 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Lovro Juraić (8),  
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

**OŠ – 549.** Etanol na  $20^\circ\text{C}$  ima gustoću  $789 \text{ kg/m}^3$ . Kad ga se zagrije za  $1^\circ\text{C}$  njegov se obujam poveća za  $1.1 \cdot 10^{-3}$  početnog volumena. Kolika će biti gustoća pola litre etanola početne temperature  $20^\circ\text{C}$  ako ju se 2 minute zagrijava grijačem snage  $200 \text{ W}$ ? Specifični toplinski kapacitet etanola je  $2400 \text{ J/kgK}$ .

**Rješenje.**

$$\rho_{20^\circ\text{C}} = 789 \text{ kg/m}^3$$

$$\Delta V_{1^\circ\text{C}} = 1.1 \cdot 10^{-3} V$$

$$V = 0.5 \text{ L} = 0.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$t_{\text{poč}} = 20^\circ\text{C}$$

$$t = 2 \text{ min} = 120 \text{ s}$$

$$P = 200 \text{ W}$$

$$c = 2400 \text{ J/kgK}$$

$$\rho_{\text{kon}} = ?$$

$$m = V\rho$$

$$= 0.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot 789 \text{ kg/m}^3$$

$$= 0.3945 \text{ kg}$$

$$Q = Pt$$

$$= 200 \text{ W} \cdot 120 \text{ s} = 24000 \text{ J}$$

$$\Delta T = \frac{Q}{cm}$$

$$= \frac{24000 \text{ J}}{2400 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \cdot 0.3945 \text{ kg}} = 25.35 \text{ K}$$

$$\Delta t = 25.35^\circ\text{C}$$

$$\Delta V = \Delta V_{1^\circ\text{C}} \cdot 25.35$$

$$= 1.1 \cdot 10^{-3} \cdot 0.5 \text{ L} \cdot 25.35$$

$$= 0.014 \text{ L}$$

$$V_{\text{kon}} = V + \Delta V$$

$$= 0.514 \text{ L} = 0.514 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$\rho_{\text{kon}} = \frac{m}{V}$$

$$= \frac{0.3945 \text{ kg}}{0.514 \cdot 100^{-3} \text{ m}^3} = 767.5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Leon Hudoletnjak (8),  
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

**1861.** Nuklearni fizičar mjeri aktivnost radioaktivnog uzorka u različitim trenucima. U prvoj (A) rundi mjerenja mjeri je točno u 8 sati ujutro (8:00:00 h) te zatim točno u 9 sati ujutro i za omjer tih aktivnosti dobiva vrijednost  $1/3$ . Ako drugu (B) rundu mjerenja započinje točno u 10 sati ujutro, u kojem trenutku mora ponoviti mjerenje da bi za omjer tih dviju aktivnosti dobio vrijednost  $1/6$ ? Izrazite rezultat u obliku sat:minuta:sekunda.

**Rješenje.** Aktivnost uzorka nakon vremena  $\Delta t$  jednaka je  $A(t) = A_0 e^{-\lambda \Delta t}$ . Primjenjujući formulu na prvi slučaj, uz  $A_1 = A(8 \text{ h})$ ,  $A_2 = A(9 \text{ h})$ ,  $A_2/A_1 = 1/3$  i  $\Delta t = 1 \text{ h}$ , imamo

$$A_2 = A_1 e^{-\lambda \Delta t} \implies \lambda = \frac{\ln 3}{\Delta t} \approx 1.1 \text{ h}^{-1}$$

Primjenom na drugi slučaj, uz  $A_3 = A(10 \text{ h})$ ,  $A_4 = A(t)$ ,  $A_4/A_3 = 1/6$ , za traženi trenutak  $t$  nalazimo

$$A_4 = A_3 e^{-\lambda(t-10 \text{ h})}$$

odakle

$$t = 10 \text{ h} + \frac{\ln 6}{\lambda} = 10 \text{ h} + \frac{\ln 6}{\ln 3} (1 \text{ h}).$$

Brojčana vrijednost je  $t \approx 11.63093 \text{ h}$ , što preračunavanjem u minute i sekunde daje

$$t = 11:37:51 \text{ h.}$$

Duje Dodig (4),  
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

**1862.** Valjak polumjera  $10 \text{ cm}$  zarotiramo početnom kutnom brzinom od  $10$  okretaja u sekundi te ga pažljivo spustimo na horizontalnu podlogu. Čim ga postavimo na podlogu, prestane mo ga pridržavati. Zbog proklizavanja njegova

oboda po podlozi dinamičko trenje će ga translacijski ubrzavati te istovremeno rotacijski usporavati sve dok obodna brzina ne postane jednaka translacijskoj brzini valjka. Uz pretpostavku da nema trenja kortljanja, valjak se nakon toga nastavlja gibati konstantnom brzinom, kortrljajući se bez proklizavanja. Izračunajte konačnu brzinu valjka ako je on:

a) šupalj, tako da je sva masa raspodijeljena duž vrlo tankoga plašta zadanog polumjera;

b) pun i homogen.

**Rješenje.** Sila  $F$  dinamičnog trenja neovisna je o brzini. Dok ono djeluje, translacijsko gibanje valjka jednoliko je ubrzano ( $a = F/m$ ). Kako valjak kreće iz translacijskog mirovanja, vremenska ovisnost njegove brzine tijekom djelovanja trenja je

$$v(t) = \frac{F}{m}t.$$

Računato s osi rotacije valjka, moment sile trenja jednak je  $M = FR$ , uz  $R$  kao polumjer valjka. On uzrokuje rotacijsko usporenje  $\alpha$  kroz  $M = I\alpha$ , uz  $I$  kao moment inercije valjka. Uz  $\omega_0$  kao početnu kutnu brzinu, rotacijsko gibanje jednoliko je usporeno ( $\alpha = FR/I$ ) pa je vremenska ovisnost kutne brzine

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{FR}{I}t.$$

Proklizavanje valjka po podlozi prestaje u trenutku  $T$  kad translacijska brzina postane jednaka obodnoj brzini

$$v(T) = \omega(T)R.$$

Izjednačavanjem

$$\frac{F}{m}T = \omega_0 R - \frac{FR^2}{I}T,$$

nalazimo

$$T = \frac{ImR}{F(I + mR^2)}\omega_0.$$

Povratkom  $T$  u  $v(t)$  nalazimo

$$v(t \geq T) = \frac{IR}{I + mR^2}\omega_0.$$

Moment inercije šupljeg valjka je  $I = mR^2$ , stoga je uz  $\omega_0 = 2\pi \cdot 10 \text{ s}^{-1}$  njegova konačna

brzina

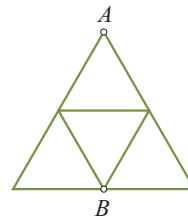
$$v_a = \frac{\omega_0 R}{2} = 3.14 \text{ m/s}.$$

Moment inercije punog homogenog valjka je  $I = mR^2/2$  pa u drugom slučaju slijedi

$$v_b = \frac{\omega_0 R}{3} = 2.06 \text{ m/s}.$$

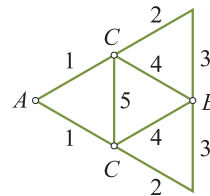
Ur.

**1863.** Na slici je prikazan strujni krug sastavljen od otpornih žica. Sve žice imaju ista otporna svojstva (otpornost i površinu poprečnog presjeka), a svi prikazani trokuti su jednakostranični. Ako je otpor najkraćeg ravnog komada žice  $1 \Omega$ , koliki je ukupan otpor kruga između točaka  $A$  i  $B$ ?

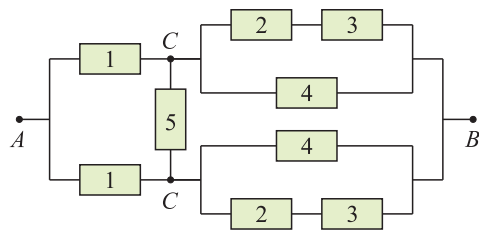


**Uputa.** Nemojte odmah napasti problem računom. Neke od žica mogu se ukloniti iz priče pravilnim argumentom.

**Rješenje.** Kako su stranice svih malih trokuta jednake duljine, svi takvi komadi žica imaju jednak otpor od  $1 \Omega$ . Na shemi



brojevima su označeni pojedini komadi samo zato da bismo ih uspjeli prepoznati u ekvivalentnoj shemi.



U općem slučaju ona se ne može svesti na niz serijskih i paralelnih spojeva pa bismo ukupan otpor morali nalaziti Kirchhoffovim zakonima. No kako su svi otpori jednaki, zbog simetrije strujnog kruga električni potencijal u dvjema točkama  $C$  je jednak. Stoga među njima nema napona, a kroz otpornik 5 ne teče struja pa se on ne pojavljuje u Kirchhoffovim jednadžbama, tj. strujni krug ponaša se kao da žica 5 uopće ne postoji. Uklonimo li je iz ekvivalentne sheme, vidimo da se krug svodi na kombinaciju serija i paralela. Prvo računamo serijski spoj otpora 2 i 3:  $R_{23} = 2\ \Omega$ . On je u paralelnom spoju s otporom 4, odakle:  $R_{234} = 2/3\ \Omega$ . Taj spoj je pak u seriji s otporom 1 pa je  $R_{1234} = 5/3\ \Omega$ . Konačno, dva su takva spoja u paraleli pa je ukupan otpor sheme  $5/6\ \Omega$ .

Ur.

**1864.** Dva točkasta izvora svjetlosti udaljena su 1 m. Kamo, duž pravca na kojem leže izvori, treba postaviti konvergentnu leću žarišne duljine 18 cm da bi im se slike našle u istoj točki? Kolika je udaljenost obiju slika od leće? Kakva je priroda tih slika (realna, virtualna)? Gdje se može naći leća: na spojnici izvora (između njih), van njihove spojnice ili oboje? Gdje se nalazi slika? Skicirajte relativne položaje izvora, leće i slike.

**Rješenje.** Za dva izvora (udaljena za  $d$ ) vrijede jednadžbe

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f} \quad \text{i} \quad \frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f},$$

gdje su  $a_i$  udaljenosti izvora od leće, a  $b_i$  udaljenosti njihovih slika od leće. Pri tome  $b_i$  može biti pozitivan (ako je slika realna) ili negativan (ako je virtualna).

Prepostavimo prvo da se leća može naći van spojnice izvora. Tada su oba s iste strane leće pa im slike moraju biti ili obje realne ili obje virtualne da bi se našle u istoj točki. U svakom slučaju mora biti  $b_1 = b_2 = b$ , bez obzira na predznak od  $b$ . U ovom slučaju također vrijedi  $a_2 = d + a_1$ , što uvrštavanjem u jednadžbu leće daje

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad \text{i} \quad \frac{1}{d + a_1} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Odavde je  $a_1 = d + a_1$ , što nije moguće za  $d \neq 0$  pa se ovako slike ne mogu preklapati.

Preostaje mogućnost da se leća nađe između izvora. Sada slika jednog izvora mora biti na suprotnoj strani leće, a slika drugoga na istoj strani na kojoj je on sam, tj. jedna mora biti realna, a druga virtualna ( $b_i$  moraju imati suprotne predznake). Uz  $b_1 = -b_2 = b$  vrijedi  $a_2 = d - a_1$  pa je

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad \text{i} \quad \frac{1}{d - a_1} - \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Eliminacijom člana  $1/b$  imamo

$$\frac{1}{f} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{d - a_1} - \frac{1}{f},$$

što daje kvadratnu jednadžbu za  $a_1$ ,

$$2a_1^2 - 2a_1d + fd = 0,$$

čija su rješenja

$$(a_1)_{\pm} = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 2df}}{2}.$$

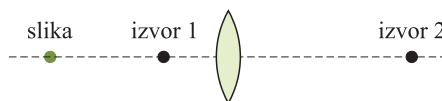
Rješenja su realna, tj. scenarij je moguć samo za  $f \leq d/2$ . U oba slučaja korijenski član manji je od  $d$  pa su oba rješenja unutar  $[0, d]$ . Njihov je zbroj  $d$  pa se  $(a_1)_{\pm}$  očito odnose na slučajeve kad je leća bliža jednome ili drugome izvoru. U tom smislu su ekvivalentna pa možemo zadržati bilo koje od njih. Za  $a_1$  biramo ono s negativnim predznakom (pa drugo izravno daje  $a_2$ ):

$$a_1 = \frac{d - \sqrt{d^2 - 2df}}{2} = 10\ \text{cm}.$$

Početna jednadžba daje  $b$

$$b = \frac{a_1 f}{a_1 - f} = -22.5\ \text{cm}.$$

Dakle, slika izvora bližega leći je virtualna, a slika daljega izvora je realna. Kako je  $|b| > a_1$ , vidimo da se slika našla van spojnice izvora.



Ur.

**1865.** U otvorenoj posudi od jedne litre nalazi se pola litre vode. Vodu pri atmosferskome tlaku zagrijavamo do vrenja. U trenutku dostizanja vrelišta ( $100^\circ\text{C}$ ) posudu hermetički zatvaramo te je nastavljamo zagrijavati. Koliki će biti tlak u posudi nakon što vodi prenesemo još 200 kJ topline? Zrak i vodenu paru smatrajte idealnim plinovima. Pretpostavite da tlak ne

utječe na latentnu toplinu isparavanja. Atmosferski tlak je  $10^5 \text{ Pa}$ . Gustoća vode je  $1000 \text{ kg/m}^3$ . Latentna toplina isparavanja vode je  $2260 \text{ kJ/kg}$ . Molarna masa vode je  $18 \text{ g/mol}$ .

**Rješenje.** Označimo s  $V_{\text{uk}}$  volumen posude ( $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$ ), a s  $V_0$  početni volumen plina u posudi u trenutku njezina zatvaranja. Iz jednadžbe idealnog plina

$$p_0 V_0 = n_0 R T_0$$

i početnih podataka ( $p_0$  kao atmosferski tlak i  $T_0$  kao temperatura vrelišta od  $373 \text{ K}$ ) prvo određujemo količinu tvari  $n_0$  u plinu u trenutku zatvaranja posude

$$n_0 = \frac{p_0 V_0}{R T_0}.$$

Zbog zakona parcijalnih tlakova nebitan je početni sastav plina, tj. od kojih se udjela zraka i vodene pare sastoji. Sve dok imamo mješavinu faza, daljnjim zagrijavanjem temperatura u posudi ostaje ista, dok se isparavanjem smanjuje volumen tekućine, a povećava volumen plina. Uz latentnu toplinu isparavanja  $L$ , maksimalna toplina koju vodi možemo dovesti prije nego što sva ishlapi jednaka je

$$Q_{\text{max}} = (V_{\text{uk}} - V_0) \rho L = 1.13 \text{ MJ},$$

gdje je  $\rho$  gustoća tekuće vode, tako da je  $(V_{\text{uk}} - V_0) \rho$  njezina početna masa. Vidimo da je dodatna dovedena toplina  $Q$  manja od  $Q_{\text{max}}$ , što znači da sve vrijeme imamo mješavinu faza pa ostajemo pri stalnoj temperaturi  $T_0$ , a sva toplina "troši" se na isparavanje vode. Zbog toga ispari masa  $\Delta m = Q/L$ , odnosno volumen vode

$$\Delta V = \frac{\Delta m}{\rho} = \frac{Q}{L \rho}$$

pa se toliko volumena oslobodi za plin (gustoća vode se povećanjem tlaka plina ne mijenja zbog nestlačivosti tekućine). Količina tvari u plinu povećava se za količinu tvari koja je isparila, a koju određujemo iz

$$\Delta n = \frac{\Delta m}{M} = \frac{Q}{L M},$$

gdje je  $M$  molarna masa vode. Dakle, nakon dovođenja dodatne topline  $Q$  plinu je dostupan volumen  $V_0 + \Delta V$  te se u njemu nalazi količina tvari  $n_0 + \Delta n$ . Novi tlak određujemo iz jednadž-

be idealnog plina

$$p = \frac{n_0 + \Delta n}{V_0 + \Delta V} R T_0 = \frac{p_0 V_0 + \frac{Q R T_0}{L M}}{V_0 + \frac{Q}{L \rho}},$$

što daje  $110871 \text{ Pa}$ .

Ur.

**1866.** Kamen mase  $0.5 \text{ kg}$  privezan je za konop duljine  $50 \text{ cm}$  i rotira u vertikalnoj ravni brzinom stalnoga iznosa. Napetost konopa u najnižoj točki kružne putanje je  $45 \text{ N}$ . Ako konop pukne u trenutku kad je brzina kamena usmjerena vertikalno uvis, do koje će se visine (mjereno od točke odvajanja od konopa) dignuti kamen? Koristi  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

(Zadatak osmislio Duje Dodig.)

**Rješenje.** Za silu napetosti  $F_N$  u najnižoj točki putanje vrijedi  $F_N = F_{\text{cp}} + mg$ , odakle slijedi centripetalna sila

$$F_{\text{cp}} = F_N - mg = 40 \text{ N}.$$

Iz  $F_{\text{cp}} = m v_0^2 / R$  za brzinu tijela nalazimo

$$v_0^2 = \frac{F_{\text{cp}} R}{m} = 40 \text{ m}^2/\text{s}^2.$$

Nakon što konop pukne, kamen se giba vertikalno uvis početnom brzinom  $v_0$ . Maksimalna visina je

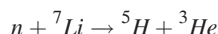
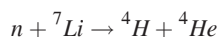
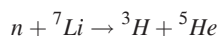
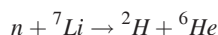
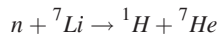
$$h_{\text{max}} = \frac{v_0^2}{2g} = 2 \text{ m}.$$

Duje Dodig (4), Zagreb

**1867.** Čestica mase  $m_a$  sudara se s mirujućom česticom mase  $m_b$ , pri čemu dolazi do reakcije nakon koje područje međudjelovanja napuštaju čestice mase  $m_c$  i  $m_d$  ( $m_a + m_b < m_c + m_d$ ). Odredi minimalnu potrebnu energiju čestice 'a' da bi reakcija bila moguća (tj. energiju praga reakcije). Potreban je relativistički račun.

\*\*\*

Primjenom dobivenog rješenja izračunaj energijske pragove sljedećih reakcija:



u kojoj neutron nalijeće na mirujuću atomsku jezgru  ${}^7\text{Li}$ . Izrazi te energije u megaelektronvoltima (MeV). Nuklearne mase u jedinicama  $\text{MeV}/c^2$  su:

$$m(n) = 939.565 \quad i \quad m({}^7\text{Li}) = 6533.833$$

te:

$$\begin{aligned} m({}^1\text{H}) &= 938.272; & m({}^7\text{He}) &= 6545.509 \\ m({}^2\text{H}) &= 1875.613; & m({}^6\text{He}) &= 5605.534 \\ m({}^3\text{H}) &= 2808.921; & m({}^5\text{He}) &= 4667.679 \\ m({}^4\text{H}) &= 3750.086; & m({}^4\text{He}) &= 3727.379 \\ m({}^5\text{H}) &= 4689.852; & m({}^3\text{He}) &= 2808.391 \end{aligned}$$

(Zadatak osmislio Duje Dodig.)

**Rješenje.** Na pragu reakcije novonastale čestice c i d u sustavu centra mase miruju. U bilo kojem drugom sustavu gibaju se kao jedno cjelovito tijelo, ukupne mase

$$M_{cd} = m_c + m_d$$

(vidi: *Tvorba mase – I. dio*, MFL 291). Stoga na njihovu zajedničku ukupnu relativističku energiju možemo primijeniti *jedinstven* izraz

$$E_{cd} = \sqrt{p_{cd}^2 c^2 + M_{cd}^2 c^4},$$

gdje je  $p_{cd}$  njihova zajednička količina gibanja. Kako je  $p_{cd}$  ukupna količina gibanja nakon reakcije, a prije reakcije svu količinu gibanja nosi samo čestica a, iz zakona očuvanja količine gibanja imamo

$$p_a = p_{cd}.$$

Iz zakona očuvanja energije imamo

$$E_a + E_b = E_{cd},$$

što raspisom u na pragu reakcije u sustavu mirujuće mete te uvrštavanjem  $p_{cd} = p_a$  daje

$$\sqrt{p_a^2 c^2 + m_a^2 c^4} + m_b c^2 = \sqrt{p_a^2 c^2 + M_{cd}^2 c^4}.$$

Kvadriranjem i sređivanjem dolazimo do

$$\begin{aligned} E_a &= \sqrt{p_a^2 c^2 + m_a^2 c^4} \\ &= \frac{M_{cd}^2 - (m_a^2 + m_b^2) c^2}{2m_b}. \end{aligned}$$

Ovo je minimalna relativistička energija projektila potrebna za pokretanje reakcije. Energija praga odgovara kinetičkom dijelu te energije, odnosno razlici ukupne relativističke energije i ener-

gije mirovanja

$$E_{\text{prag}} = E_a - m_a c^2.$$

Sređujemo uz raspis  $M_{cd} = m_c + m_d$  pa je

$$E_{\text{prag}} = \frac{(m_c + m_d)^2 - (m_a + m_b)^2}{2m_b} c^2,$$

što je konačno traženo rješenje. Zgodno je primijetiti da primjenom izraza za razliku kvadrata i korištenjem oznake

$$\Sigma = (m_c + m_d) + (m_a + m_b)$$

za zbroj te

$$\Delta = (m_c + m_d) - (m_a + m_b)$$

za razliku masa prije i poslije reakcije rješenje poprima oblik:

$$E_{\text{prag}} = \frac{\Sigma \Delta}{2m_b} c^2.$$

\*\*\*

Uz pokratu

$$E_A = E_{\text{prag}} ({}^A\text{H} + {}^{8-A}\text{He})$$

za energiju praga danih reakcija, uvrštavanjem zadanih masa nalazimo:

$$E_1 = 11.88 \text{ MeV}$$

$$E_2 = 8.87 \text{ MeV}$$

$$E_3 = 3.66 \text{ MeV}$$

$$E_4 = 4.65 \text{ MeV}$$

$$E_5 = 28.46 \text{ MeV}.$$

Duje Dodig (4), Zagreb

\*\*\*

Ako su  $a_k, b_k, c_k$  strogo pozitivni realni brojevi za  $1 \leq k \leq n$ , dokaži vrijednost

$$\begin{aligned} &\left( \sum_{k=1}^n a_k b_k c_k \right)^3 \\ &\leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^3 \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k^3 \right) \left( \sum_{k=1}^n c_k^3 \right). \end{aligned}$$