# 66. Državno natjecanje iz matematike
# Hrvatska, 28. – 30. travnja 2025. g.

Školsko natjecanje iz matematike ove školske godine održano je 14. veljače, a Županijsko natjecanje 14. ožujka. Samo Državno natjecanje iz matematike ove je godine održano od 28. do 30. travnja u Vodicama, za učenike srednjih škola, A varijante i B varijante. Zadatke je priredilo posebno potpovjerenstvo za A varijantu i B varijantu Državnog povjerenstva za matematička natjecanja.

Sudionici ovogodišnjeg Državnog natjecanja bili su smješteni u hotelu Imperial. Sudjelovalo je 260 učenika osnovnih i srednjih škola, te oko 170 mentora. Domaćin natjecanja je bila Osnovna škola Vodice. Za vrijeme natjecanja, mentori su imali seminar na kojem su predavali Mea Bombardelli, Azra Tafro, Marijana Krnić i Božena Palanović. U slobodno su vrijeme učenici i mentori mogli posjetiti kanal sv. Ante u blizini Šibenika.

Za srednje je škole podijeljeno 10 prvih, 8 drugih, 8 trećih nagrada i 14 pohvala za A varijantu, te 6 prvih, 7 drugih, 11 trećih nagrada i 20 pohvala za B varijantu.

## Nagrade i pohvale učenika srednjih škola

### A varijanta

#### I. razred

*Matej Križanić*, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin, *Lovro Kličković*, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Ivan Katalenić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Leonardo Starešinčić*, XV. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *David Ian Lučić*, Gimnazija Sesvete, Zagreb, *Luka Milani*, Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka, *Franjo Brigić*, XV. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Roko Gašparović*, XV. gimnazija, Zagreb, *Petar Primorac*, III. gimnazija, Split (pohvala).

#### II. razred

*Fran Pilipović*, XV. gimnazija, Zagreb, *Martin Vidović*, XV. gimnazija, Zagreb, *Matej Svilokos*, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Ilić Lovro*, XV. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Kaja Passek-Kumerički*, XV. gimnazija, Zagreb, *Fran Čačinović*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb (III. nagrada); *Gabriel Prvulović*, Gimnazija Pula, Pula, *Gabriel Auguštin*, XV. gimnazija, Zagreb, *Vilim Livada*, Gimnazija Marul, Zagreb, *Mate Šarić*, Gimnazija Frane Petrića, Zadar (pohvala).

#### III. razred

*Kristijan Šimović*, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Fabijan Cikač*, XV. gimnazija, Zagreb, *Emil Missoni*, XV. gimnazija, Zagreb, *Hrvoje Valent*, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb (II. nagrada); *Maša Dobrić*, XV. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Karlo Brčić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Masuro Kritovac*, XV. gimnazija, Zagreb, *Lovro Tunjić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Tomislav Vlajčević*, XV. gimnazija, Zagreb (pohvala).

### IV. razred

*Emanuel Bajamić*, III. gimnazija, Split, *Marko Hrenić*, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin, *Jurica Špoljar*, XV. gimnazija, Zagreb, *Dario Vuksan*, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Patrik Cvetek*, Elektrotehnička škola – Split, Split, *Luka Krašnjak*, XV. gimnazij, Zagreb (II. nagrada); *Zvonko Adrijević*, II. gimnazija, Zagreb, *Karlo Jokoš*, Gimnazija Petra Preradovića, Virivitica (III. nagrada); *Karlo Ahel*, Gimnazija Andrie Mohorovičića, Rijeka, *Borna Čizmarević*, Gimnazija Andrie Mohorovičića, Rijeka, *Val Karan*, XV. gimnazija, Zagreb, *Nikola Vujica*, XV. gimnazija, Zagreb (pohvala).

## B varijanta

### I. razred

*Josip Ćelić*, Tehnička škola Ruđera Boškovića, Zagreb, *Mateo Foder*, Srednja škola Ivanec, Ivanec (I. nagrada); *Ema Sušec*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb (II. nagrada); *Danilo Bartolić*, Tehnička škola Ruđera Boškovića, Zagreb, *Lovre Čepo*, V. gimnazija Vladimira Nazora, Split, *Nataša Drakulić*, Gimnazija Josipa Slavenskog, Čakovec (III. nagrada); *Rafael Schlosser*, Nadbiskupska klasična gimnazija s pravom javnosti, Zagreb, *Dorotea Jesih*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb, *Artur Krumm*, Srednja škola Jeklovec, Sesvete (pohvala).

### II. razred

*Jan Filaković*, Elektrotehnička i prometna škola Osijek, Osijek (I. nagrada); *Marta Gojević*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb (II. nagrada); *Nikola Lovrić*, Gimnazija Nova Gradiška, Nova Gradiška, *Mateo Maras*, Gimnazija i stukkovna škola Jurja Dobrile, Pazin, *Niko Baotić*, Gimnazija i ekonomska škola Benedikta Kotruljevića, s pravom javnosti, Zagreb, *Petar Brajković*, Srednja škola Mate Balote, Poreć, *Ivan Markić*, Tehnička škola Ruđera Boškovića, Zagreb (III. nagrada); *Bartol Dragičević*, Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka, *Lovro Hatvalić*, Srednja škola Petrinja, Petrinja, *Grgur Petrovčić*, Gimnazija i ekonomska škola Benedikta Kotruljevića, s pravom javnosti, Zagreb (pohvala).

### III. razred

*Niko Josipović*, Tehnička škola Ruđera Boškovića, Zagreb (I. nagrada); *Sven Todorović*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb, *Ana Karla Vodanović*, XV. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Anja Tuškan*, Gimnazija Karlovac, Karlovac (III. nagrada); *Lana Sušec*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb, *Luka Ozvačić*, Srednja škola Ivan Švear, Ivanić Grad, *Viktorija Pribanić*, IX. gimnazija, Zagreb, *Ivano Horvatin*, Elektrostrojarska škola, Varaždin *Petar Bičanić*, Tehnička škola Ruđera Boškovića, Vinkovci, *Tina Rosandić*, Gimnazija Matije Antuna Reljkovića, Vinkovci, *Ivan Vuk*, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin, *Karlo Jurčević*, Gimnazija Karlovac, Karlovac, *Vjeran Zlatar*, Klasična gimnazija, Zagreb (pohvala).

### IV. razred

*Dora Drenški*, X. gimnazija Ivan Supek, Zagreb, *Mihael Miloslavić*, Strukovna klasična gimnazija Ruđera Boškovića s pravom javnosti, Dubrovnik (I. nagrada); *Petar Jadro*, I. gimnazija, Zagreb, *Stefano Stocco*, Talijanska srednja škola Dante Alighieri – Scuola medita superiore italiana Dante Alighieri, Pola, Pula, *Petar Marić*, Srednja škola Dugo Selo, Dugo Selo (II. nagrada); *Matija Ljutić*, Prirodoslovna i grafička škola Rijeka, Rijeka, *Jan Dolački*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb, (III. nagrada); *Noa Crnić*, Prirodoslovna i grafička škola Rijeka, Rijeka, *Jakov Matulić*, I. tehnička škola Tesla, Zagreb, *Ivan Luka Sabolović*, Gornjogradska gimnazija, Zagreb, *Borna Bašić*, Prirodoslovna škola

Vladimira Preloga, Zagreb, *Filip Provči*, Isusivačka klasična gimnazija s pravom javnosti u Osijeku, Osijek (pohvala).

## Zadatci s Državnog natjecanja – A varijanta

### I. razred

**1.** Odredi sve trojke cijelih brojeva $(a, b, c)$ za koje vrijedi

$$|a+3|+b^2+4c^2-14b-12c+56=0.$$

**2.** Odredi sve trojke realnih brojeva $(a, b, c)$ koje su rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} a^3+b^2c &= ac \\ b^3+c^2a &= ba \\ c^3+a^2b &= cb. \end{aligned}$$

**3.** Odredi sve četvorke prirodnih brojeva $(a, b, k, n)$ za koje vrijedi

$$k \cdot 2^{2n}-(2k-1) \cdot 2^n+k-1=k \cdot 2^{a+b}-2^b.$$

**4.** Iz ploče dimenzija $2025 \times 2025$ uklonjen je kvadrat dimenzija $7 \times 7$, a preostali dio ploče prekriva se pločicama dimenzija $1 \times 4$ (tako da svaka pločica prekriva točno četiri polja).

1. Ako uklonimo središnji $7 \times 7$ kvadrat, dokaži da je preostali dio ploče moguće pokriti pločicama dimenzija $1 \times 4$.
2. Ako uklonimo $7 \times 7$ kvadrat koji sadrži jedan ugao ploče, dokaži da preostali dio ploče nije moguće pokriti pločicama dimenzija $1 \times 4$.

**5.** Neka su $K$ i $L$ redom polovišta stranica $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$ paralelograma $ABCD$. Za točku $T$ unutar paralelograma vrijedi $|KT|=|AK|$ i $|LT|=|CL|$. Neka je $M$ polovište dužine $\overline{BT}$. Dokaži da je $\sphericalangle MAT=\sphericalangle TCM$.

### II. razred

**1.** Odredi sve uređene trojke realnih brojeva $(x, y, z)$ koje su rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} xy+1 &= 2z \\ yz+1 &= 2x \\ zx+1 &= 2y. \end{aligned}$$

**2.** U stožac osnovke polumjera 1 i visine duljine $2\sqrt{2}$ upisan je kvadar takav da jedna strana kvadra pripada osnovki stošca, a vrhovi suprotne strane pripadaju plaštu stošca. Ako je strana kvadra koja pripada osnovki stošca kvadrat, koliko je najveće oplošje koje takav kvadar može imati?

**3.** Odredi sve uređene parove prirodnih brojeva $(k, n)$ takve da vrijedi

$$7 \cdot n^n-n^3=(n+8)^k.$$

**4.** Neka je $M$ točka unutar trokuta $ABC$ na simetrali kuta $\sphericalangle BAC$. Pravci $AM$, $BM$ i $CM$ ponovo sijeku opisanu kružnicu trokuta $ABC$ redom u točkama $A_1$, $B_1$ i $C_1$. Neka je $P$ sjecište dužina $\overline{A_1C_1}$ i $\overline{AB}$ te $Q$ sjecište dužina $\overline{A_1B_1}$ i $\overline{AC}$. Dokaži da su pravci $PQ$ i $BC$ paralelni.

5. U svako polje pravokutne ploče s $3$ stupca i $14$ redaka upisan je simbol $X$ ili $O$. Za ploču kažemo da je *balansirana* ako su zadovoljeni sljedeći uvjeti:
- svaki $3 \times 3$ kvadrat sadržava najviše $5$ simbola $X$ i najviše $5$ simbola $O$
- u svakom $3 \times 3$ kvadrati nijedna dijagonala ni redak ni stupac ne sadržavaju tri ista simbola.

Za balansiranu ploču $P$, *centar* od $P$ je ploča s $3$ stupca i $12$ redaka dobivena uklanjanjem prvoga i posljednjega retka iz $P$. Među svim balansiranim pločama koliko postoji različitih centara?

## III. razred

1. Odredi sve parove pozitivnih realnih brojeva $(x, y)$ koji su rješenja sustava jednadžba
$$x^{x+y} = y^{180}$$
$$y^{x+y} = x^{45}.$$

2. Neka je $n$ prirodni broj. Svakom je vrhu kvadrata pridružen cijeli broj. Broj pridružen vrhu može se zamijeniti zbrojem brojeva pridruženih dvama od ostalih vrhova. Dokaži da je uvijek (neovisno o odabiru početnih brojeva pridruženih vrhovima) nizom opisanih zamjena moguće postići da brojevi pridruženi svim četirima vrhovima budu djeljivi s $n$.

3. Tablica dimenzija $2025 \times 2025$ popunjena je tako da se u polju u $i$-tome retku i $j$-tome stupcu nalazi broj $i + j - 1$, za sve $i, j \in \{1, 2, \ldots, 2025\}$. Odabrano je $2025$ polja koja se nalaze u različitim retcima i različitim stupcima. Koja je najmanja moguća vrijednost umnoška brojeva na odabranim poljima?

4. Neka je $D$ točka unutar trokuta $ABC$ i neka je $E$ točka na dužini $\overline{AD}$ različita od $A$ i $D$. Opisane kružnice trokuta $BDE$ i $CDE$ sijeku stranicu $\overline{BC}$ redom u točkama $F$ i $G$. Neka je $X$ sjecičte pravaca $DG$ i $AB$, a $Y$ sjecičte pravaca $DF$ i $AC$. Dokaži da su pravci $XY$ i $BC$ paralelni.

5. Za različite prirodne brojeve $m$ i $n$ kažemo da su *prijatelji* ako postoje prirodni brojevi $a$ i $b$ koji nisu djeljivi sa $101$ takvi da je
$$\frac{(m!)^n}{(n!)^m} = \frac{a}{b}.$$
Postoji li prosti broj koji ima točno $12$ prijatelja?

## IV. razred

1. Dokaži da je broj
$$102^{102} - 100^{100}$$
djeljiv sa $101^2$.

2. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$f(f(x)) + f(y) = 2y + f(x - y).$$

3. Neka je $n$ prirodan broj. Za prirodni broj $m$, neka $f_m(n)$ označava broj djelitelja broja $n^{m+1}$ koji su veći od $n^m$. Dokaži da postoji prirodni broj $K$ takav da za svaki $m \geq K$ vrijedi $f_m(n) = f_{m+1}(n)$.

4. Dan je jednakokračni trokut $ABC$ sa stranicama duljina $|AB| = |AC| = 5$ te $|BC| = 6$. Točka $D$ odabrana je na stranici $\overline{AC}$, a točka $P$ na dužini $\overline{BD}$ tako da je $\sphericalangle CPA =$

$90^\circ$. Ako je $\sphericalangle PBA = \sphericalangle PCB$, odredi omjer

$$\frac{|AD|}{|DC|}.$$

**5.** Dana je ploča dimenzija $9 \times 9$ čija su sva polja bijela. Odredi najveći broj polja koja je moguće obojiti u crveno tako da svaki dio ploče dimenzija $2 \times 2$ sadržava najviše dva crvena polja.

## Zadatci s Državnog natjecanja – B varijanta

### I. razred

**1.** U skupu realnih brojeva riješi nejednadžbu

$$\left|\sqrt{x^2+90x+2025}-\sqrt{x^2-90x+2025}\right| \leq x.$$

**2.** Za prirodni broj $k$ veći od 2, svaki je broj iz skupa $\{6, 8, 10, \ldots, 2k\}$ pomnožen sa svakim brojem iz skupa $\{5, 7, 9, \ldots, 2k-1\}$ te je $S_k$ zbroj svih dobivenih umnožaka. Za koji $k$ vrijedi $S_k = 21\,000$?

**3.** U jednakokračnome je trapezu jedna osnovica četiri puta dulja od druge, duljina kraka iznosi 6 cm, a mjera je šiljastoga kuta $60^\circ$. Trapez je podijeljen na pet trokuta jednakih površina tako da svi vrhovi tih trokuta pripadaju osnovicama trapeza, a svaki vrh trapeza može biti zajednički vrh najviše trima trokutima. Odredi površinu toga trapeza i zbroj opsega svih pet navedenih trokuta.

**4.** Jednoga dana učiteljica je na dodatnu nastavu matematike donijela dvije kutije s jednakim brojem jabuka. Jabuke iz jedne kutije podijelile su djevojčice, a iz druge dječaci. Broj djevojčica za pet je manji od broja jabuka koje je dobila svaka od njih, a broj jabuka koje je dobio svaki dječak za dva je veći od broja dječaka. Drugoga je dana na dodatnu nastavu došla jedna djevojčica više te dva dječaka manje nego prvoga dana. Učiteljica je ponovno donijela dvije kutije s jednakim brojem jabuka (broj jabuka u kutijama prvoga i drugoga dana nije nužno jednak) te su djevojčice podijelile jabuke iz jedne kutije, a dječaci iz druge. Svaka je djevojčica dobila jednu jabuku manje, a svaki dječak osam jabuka više nego prvoga dana. Koliko je dječaka i djevojčica bilo na dodatnoj nastavi prvoga dana?

**5.** Neka su $a$, $b$ i $c$ pozitivni realni brojevi. Dokaži nejednakost

$$\left(a+\frac{c}{b}\right)^2+\left(b+\frac{c}{a}\right)^2 \geq 8c.$$

### II. razred

**1.** Neka su $a$ i $b$ rješenja jednadžbe $x^2+px+1=0$, a $c$ i $d$ rješenja jednadžbe $x^2+qx+1=0$, pri čemu su $p$ i $q$ realni brojevi. Odredi $|p-q|$ ako vrijedi

$$(a-c)(b-c)(a-d)(b-d) = 2025.$$

**2.** Neka je $S = \{1, 2, 3, \ldots, 102\}$. Treba odabrati podskup $T$ skupa $S$ takav da zbroj nikoja dva različita elementa skupa $T$ ne bude djeljiv s 10. Koliko najviše elemenata može imati skup $T$?

**3.** Zadan je jednakostraničan trokut $ABC$ duljine stranice 2 cm. Na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ redom su odabrane točke $D$ i $E$ takve da je $|CD|+|CE| = 3$ cm. Ako je $M$ polovište stranice $\overline{AB}$, odredi mjeru kuta $\sphericalangle DME$.

4. Odredi sva realna rješenja sustava jednadžba

$$x + y^2 = y^3$$
$$y + x^2 = x^3.$$

5. Među svim trapezima koji su upisani u kružnicu promjera $\overline{AB}$ duljine 2 cm tako da im je taj promjer jedna osnovica, trapez $ABCD$ ima najveći opseg. Odredi duljinu druge osnovice toga trapeza.

## III. razred

1. Dokaži da nejednadžba

$$2\log_{\frac{1}{5}}\left(49^{\sqrt{x^2-2}} - 1\right) + \log_5\left(7^{\sqrt{4x^2-8}} + \frac{1}{5}\right) \geq -1$$

nema rješenja u skupu cijelih brojeva.

2. Točka $C(4, -2)$ vrh je trokuta $ABC$. Visina povučena iz vrha $B$ leži na pravcu zadanome jednadžbom $6x-5y+35 = 0$, a težišnica povučena iz vrha $A$ leži na pravcu zadanome jednadžbom $7x + 3y + 5 = 0$. Odredi koordinate vrhova $A$ i $B$.

3. Pravokutnome je trokutu upisana kružnica polumjera 3, a kružnica koja dira hipotenuzu i produžetke kateta ima polumjer 18. Odredi duljine stranica toga pravokutnog trokuta.

4. Odredi najmanju moguću pozitivnu vrijednost realnoga parametra $B$ za koji jednadžba

$$30 - 30\cos(Bx) = |x - 30| + |x + 30|$$

ima točno 30 rješenja u skupu realnih brojeva.

5. Prirodni broj zovemo *moćnim* ako je djeljiv s kvadratom svakoga svojeg prostog faktora. Dokaži da se svaki moćni prirodni broj može zapisati u obliku $a^2b^3$, pri čemu su $a$ i $b$ prirodni brojevi.

## IV. razred

1. Neka su $f_1(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ i $f_n(x) = (f_1 \circ f_{n-1})(x)$ za sve $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ pravila pridruživanja funkcija zadanih na njihovoj prirodnoj domeni. Koliko iznosi $f_{2025}(5)$?

2. Odredi najveći prirodni broj $n$ za koji je broj

$$2 + 3 + 4 + \ldots + n + (n + 1)$$

nultočka polinoma $P(x) = x^3 - 151x^2 + 2175x - 2025$.

3. Za svaki pravac koji prolazi točkom $(0, 1)$ koordinatne ravnine konstruirana su njegova sjecišta s pravcima zadanim jednadžbama

$$x + y - 2 = 0 \quad \text{i} \quad -x + y - 2 = 0$$

te polovište dužine kojoj su rubne točke navedena sjecišta. Koju krivulju određuje skup svih tako dobivenih polovišta? Odredi jednadžbu te krivulje.

4. Prirodni broj koji se čita jednako slijeva nadesno i zdesna nalijevo naziva se *palindrom*. Ako slučajno odaberemo šesteroznamenkasti palindrom $x$, kolika je vjerojatnost da je i broj $\dfrac{x}{11}$ palindrom?

5. Neka je $ABCD$ četverokut kojemu se može opisati kružnica. Vrijedi $|BC| = |CD| = 3$ i $|DA| = 5$, a mjera kuta $ADC$ iznosi $120°$. Izračunaj duljinu kraće dijagonale toga četverokuta.

*Matko Ljulj*