

14. Europska matematička olimpijada za djevojke, 2025. g.



EGMO 2025
European Girls'
Mathematical Olympiad
KOSOVA

Od 11. do 17. travnja 2025. u Prištini na Kosovu, održana je 14. Europska matematička olimpijada za djevojke (EGMO). Svrha ovog natjecanja je poticanje učenica na aktivno bavljenje matematikom te popularizacija matematike među učenicama srednjih škola u Europi, ali i širom svijeta. Na natjecanju je sudjelovalo 56 država, od čega njih 35 u službenoj konkurenciji europskih država. Ukupno je sudjelovalo 219 učenica, od čega 135 učenica u službenoj europskoj konkurenciji. Svaka država je sudjelovala s najviše četiri svoje najbolje srednjoškolke, a Hrvatsku su predstavljale:

Ita Blašković, 3. r., XV. gimnazija, Zagreb

Maša Dobrić, 3. r., XV. gimnazija, Zagreb

Mila Maretić, 3. r., Prva gimnazija Varaždin, Varaždin

Lana Milani, 4. r., Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka.

Voditelji naše ekipe su bili *Borna Vukorepa* i *Lucija Relić*.



Na otvorenju 14. EGMO-a

Maša i Lana su osvojile srebrne medalje, Mila brončanu medalju, a Ita je dobila pohvalu. Za zlato je bilo potrebno osvojiti barem 27, za srebro 20, a za broncu 15 bodova od maksimalnih 42. U zbroju, naše učenice osvojile su ukupno 76 bodova. S tim brojem bodova Hrvatska je zauzela 10. mjesto u službenoj konkurenciji 35 europskih država, a 18. mjesto u konkurenciji svih 56 država u svijetu. To je ujedno i treći put zaredom da je Hrvatska u top 10 službenih država sudionica na ovom natjecanju. Prvo mjesto u službenoj konkurenciji osvojila je Italija, a ukupno u svijetu Kina.

Bodovi hrvatskih učenica na 14. EGMO.

natjecateljica	P1	P2	P3	P4	P5	P6	ukupno	osvojeno
M. Dobrić	7	3	0	7	7	0	24	srebrna
L. Milani	3	7	1	7	2	0	20	srebrna
M. Maretić	7	0	1	7	4	0	19	brončana
I. Blašković	3	1	0	7	2	0	13	pohvala
ekipni rezultat	20	11	2	28	15	0	76	

Svi rezultati dostupni su na linku:

<https://www.egmo.org/egmos/egmo14/scoreboard/>



Djevojke i voditelji iz Hrvatske na 14. EGMO-u nakon podjele nagrada

Na EGMO-u natjecanje traje dva dana, a svakog dana učenice rješavaju po tri zadatka: lakši, srednji i teži. Zadatci se zadaju iz četiri područja: algebra, kombinatorika, geometrija i teorija brojeva. Pregled svih prijašnjih EGMO-a može se pronaći na linku:

<https://www.egmo.org/egmos/>

Izbor, pripreme i odlazak ekipe na EGMO je organiziralo Hrvatsko matematičko društvo u suradnji s mnogim volonterima (uglavnom bivšim natjecateljima), uz financiranje Ministarstva znanosti, obrazovanja i mladih. Zahvaljujemo svima koji su podržali ekipu i pratili njihov nastup na Kosovu tokom održavanja olimpijade.

Iduće godine EGMO će se održati u Bordeauxu u Francuskoj. U povijesnom raspletu događaja, Hrvatska je odabrana za domaćina EGMO-a 2027. koja će se održati u Šibeniku.

Povratak ekipe u Zagreb je bio 18. travnja 2025. na zagrebačkom aerodromu.

Borna Vukorepa

Zadatci

Prvi dan, nedjelja, 13. travnja 2025.

Zadatak 1. Za pozitivan cijeli broj N , neka su $c_1 < c_2 < \dots < c_m$ svi pozitivni cijeli brojevi manji od N koji su relativno prosti s N . Nađi sve $N \geq 3$ takve da je

$$\gcd(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

za sve $1 \leq i \leq m - 1$.

Ovdje $\gcd(a, b)$ označava najveći pozitivni cijeli broj koji dijeli a i b . Cijeli brojevi a i b su relativno prosti ako je $\gcd(a, b) = 1$.

Zadatak 2. Beskonačan rastući niz $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ pozitivnih cijelih brojeva zovemo *centralan* ako je za svaki pozitivan cijeli broj n , aritmetička sredina prvih a_n članova niza jednaka a_n .

Dokaži da postoji beskonačni niz b_1, b_2, b_3, \dots pozitivnih cijelih brojeva takav da za svaki centralan niz a_1, a_2, a_3, \dots , postoji beskonačno mnogo pozitivnih cijelih brojeva n za koje je $a_n = b_n$.

Zadatak 3. Neka je ABC šiljastokutan trokut. Točke B, D, E i C leže na pravcu tim redom i zadovoljavaju $|BD| = |DE| = |EC|$. Neka su M i N polovišta od \overline{AD} i \overline{AE} , redom. Neka je trokut ADE šiljastokutan s ortocentrom H . Neka su P i Q točke na pravcima BM i CN , redom, tako da su D, H, M i P konciklične i međusobno različite, te da su E, H, N i Q konciklične i međusobno različite. Dokaži da su P, Q, N i M konciklične.

Ortocentar trokuta je točka u kojoj se sijeku njegove visine.

Drugi dan, ponedjeljak, 14. travnja 2025.

Zadatak 4. Neka je ABC šiljastokutan trokut s centrom upisane kružnice I uz $|AB| \neq |AC|$. Neka pravci BI i CI sijeku opisanu kružnicu trokuta ABC u $P \neq B$ i $Q \neq C$, redom. Točke R i S su takve da su $AQRB$ i $ACSP$ paralelogrami (pri čemu je $AQ \parallel RB$, $AB \parallel QR$, $AC \parallel SP$ i $AP \parallel CS$). Neka je T presjek pravaca RB i SC . Dokaži da su točke R, S, T i I konciklične.

Zadatak 5. Neka je $n > 1$ cijeli broj. U konfiguraciji $n \times n$ ploče, svako od n^2 polja sadrži strelicu koja pokazuje gore, dolje, lijevo ili desno. Uz zadanu početnu konfiguraciju, puž Turbo kreće iz jednog od polja na ploči i kreće se s polja na polje. U svakom koraku, Turbo se pomiče za jedno polje u smjeru kojeg pokazuje strelica u njegovom polju (možda izlazeći van ploče). Nakon svakog koraka, strelice u svakom polju se rotiraju za 90° u smjeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu. Za polje kažemo da je *dobro* ako, krećući iz tog polja, Turbo će posjetiti svako polje na ploči točno jednom, bez izlaženja s ploče, i vratiti se u svoje početno polje na kraju. Odredi, ovisno o n , najveći broj dobrih polja među svim mogućim početnim konfiguracijama.

Zadatak 6. U svakom polju 2025×2025 ploče upisan je nenegativan realan broj tako da je zbroj brojeva u svakom retku jednak 1 i da je zbroj brojeva u svakom stupcu jednak 1. Neka je r_i najveća vrijednost u retku i , te neka je $R = r_1 + r_2 + \dots + r_{2025}$. Slično, neka je c_i najveća vrijednost u stupcu i , te neka je $C = c_1 + c_2 + \dots + c_{2025}$. Koja je najveća moguća vrijednost izraza $\frac{R}{C}$?

Vrijeme rješavanja: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.