



ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 28. veljače 2026. Rješenja (i imena rješatelja) bit će objavljena u br. 4/304.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješatelja koje su na str. 144.

A) Zadatci iz matematike

4057. Dokaži da realne brojeve $a \neq b$ vrijedi nejednakost

$$(a^2 + b^2)^3 < 2(a^3 + b^3)^2.$$

4058. Nađi sva realna rješenja (x, y) jednadžbe

$$y^4 + 4y^2x - 11y^2 + 4xy - 8y + 8x^2 - 40x + 52 = 0.$$

4059. Dan je polinom

$$P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Nađi polinome $Q(x)$ i $R(x)$ koji imaju pozitivne stupnjeve i cjelobrojne koeficijente, tako da vrijedi $Q(x)R(x) = P(5x^2)$ za svaki x .

4060. Nađi imaginarni dio kompleksnog broja z^2 , ako vrijedi $\arg[z^3(-1+i)] = \pi$ i $\operatorname{Re}(z^2) = -2\sqrt{3}$.

4061. Dokaži da vrijedi jednakost determinanti

$$\det \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

4062. Stranica $\overline{AD}$ paralelograma $ABCD$ produljena je do točke F . Pravac BF siječe dijagonalu $\overline{AC}$ u E i stranicu $\overline{DC}$ u G . Ako je $|EF| = 32$ i $|FG| = 24$, koliko je $|BE|$?

4063. Radijus trokutu upisane kružnice jednak je 1, a duljine njegovih stranica su cijeli brojevi. Dokaži da su stranice trokuta jednake 3, 4, 5.

4064. Ako je $ABCDEFGHK$ pravilni deveterokut, $|AB| = a$, $|AC| = b$, $|AD| = c$ i $|AE| = d$, dokaži da je $\frac{c}{b} - \frac{a}{d} = 1$.

4065. U rombu $ABCD$ su M, N, P, Q polovišta stranica $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$, tim redom. Kolika je površina četverokuta određenog pravcima AN, BP, CQ, DM ako je površina romba jednaka 100 cm^2 .

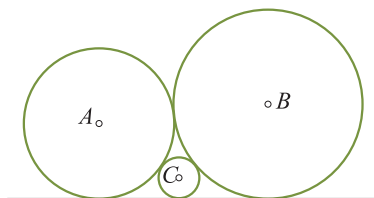
4066. Nađi vezu između stranica a, b, c trokuta ABC ako se težišnica $\overline{AM}$, visina $\overline{BH}$ i simetrala $\overline{CD}$ kuta $\angle ACB$ sijeku u jednoj točki.

4067. Iz jednog vrha trokuta povučena je težišnica duljine t . Ona dijeli kut pri tom vrhu na dijelove ε i φ . Dokaži da je površina trokuta jednaka

$$P = \frac{2t^2 \sin \varepsilon \sin \varphi}{\sin(\varepsilon + \varphi)}.$$

4068. Upisana i pripisana kružnica trokuta ABC dodiruju stranicu $\overline{AB}$ u točkama D i E . Pokaži da je $|AD||DB| = |AE||EB|$ i da je to površina pravokutnika čije su duljine stranica jednake duljinama polumjera tih kružnica.

4069. Tri kružnice sa središtima A, B, C dodiruju se međusobno i imaju zajedničku tangentu, kao na slici.



Ako su a, b, c polumjeri kružnica sa središtima A, B, C dokaži

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}.$$

4070. Brojevi $1, 2, \dots, 2n$ poredani su proizvoljno na $2n$ mjesta koja su numerirana s $1, 2, \dots, 2n$. Zatim se zbroji svaki redni broj s brojem koji mu je pridružen. Dokaži da među tim sumama postoje barem dvije koje imaju isti ostatak pri diobi s $2n$.

B) Zadatci iz fizike

OŠ – 558. Opruga se produlji za 3 cm kad se na nju objesi uteg mase 50 g. Kad se na nju objesi staklena kocka produljenje opruge iznosi 9.6 cm. Kolika je duljina brida kocke? Gustoća stakla iznosi 2500 kg/m^3 .

OŠ – 559. Luka je mjerio broj otkucaja srca i utvrdio da u mirovanju ima 60 otkucaja u minuti. Zna da je snaga ljudskog srca oko 2.5 W. Koliko energije potroši srce tijekom dana, a koliko za jedan otkucaj?

OŠ – 560. Baterija ima svoj unutarnji otpor. Učenik je, želeći ga odrediti, izmjerio napon na novoj bateriji od 4.5 V dok nije bila spojena u strujni krug. Napon je tada iznosio 4.8 V. Kad ju je spojio sa žaruljicom i ampermetrom izmjerio je struju od 250 mA. Napon na krajevima žaruljice je tada iznosio 4.4 V. Koliki je unutarnji otpor baterije?

OŠ – 561. U Zagrebu se provodi projekt postavljanja solarnih panela na krovove škola. Jedan panel ima površinu 10 m^2 . Prosječna količina Sunčevog zračenja iznosi 1000 W/m^2 . Korisnost panela je oko 20 % i dnevno radi prosječno 5 sati. Ako škola dnevno troši 30 kWh električne energije, koliko bi trebalo postaviti takvih panela da pokriju sve potrebe škole?

1882. U svakome vrhu pravilnog 2025-terokuta duljine stranice 1 m nalazi se jedna čestica. Svaka čestica giba se brzinom stalnog iznosa (i istoga za sve čestice) prema čestici u prvome susjednom vrhu, u smjeru kazaljke na satu. Koliki će put prijeći svaka čestica prije nego se sve nađu u istoj točki?

1883. Schwarzschildov polumjer je polumjer koji bi kugla dane mase morala imati da bi postala crna rupa. On se pravilno izvodi unutar Einsteinove opće teorije relativnosti, no sretna je okolnost i zanimljiva podudarnost da se isti rezultat može dobiti i klasičnim računom. U sklopu klasičnog razmatranja Schwarzschildov polumjer određuje se iz uvjeta da druga kozmička brzina za lansiranje tijela s površine kugle postane jednaka brzini svjetlosti. (Druga kozmička brzina je minimalna brzina potrebna da bi se lansirano tijelo uspjelo odmaknuti na beskonačnu udaljenost od drugoga tijela – u našem slučaju od promatrane kugle.) Izračunajte Schwarzschildov polumjer Zemlje, tj. koliki bi

polumjer Zemlje morao biti da bi ona postala crna rupa. Masa Zemlje je $6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

1884. Žica duljine $2L$ rastegnuta je horizontalno između dva stupa za rasvjetu. Svjetiljka mase 3 kg obješena je na sredini žice. Koliki će biti kut žice prema horizontali ako je presjek žice 0.2 cm^2 , a njezin Youngov modul elastičnosti 50 GPa? Uz $g = 10 \text{ m/s}^2$, koristi aproksimaciju malih kutova.

(Zadatak osmislio Duje Dodig.)

1885. Zavojnica induktiviteta 0.318 H spojena je u seriju s kondenzatorom promjenjiva kapaciteta i otpornikom od 22Ω . Strujni krug zatvoren je priključivanjem na izvor izmjeničnoga napona amplitude 380 V i frekvencije 50 Hz.

a) Ako je kapacitet kondenzatora $0.5 \mu\text{F}$, izračunaj efektivnu struju u krugu, amplitudu napona na zavojnici te fazni pomak između struje i napona u krugu.

b) Na koju vrijednost treba podesiti kapacitet kondenzatora da bi krugom tekla maksimalna struja? Kolike su tada tražene vrijednosti iz a) dijela zadatka?

(Zadatak osmislio Duje Dodig.)

1886. Raketa se lansira vertikalno uvis izbacivanjem vrućih plinova u dva navrata, s vremenskom razlikom Δt (prvo izbacivanje nastupa dok raketa još miruje na tlu, a drugo nakon Δt). Svako izbacivanje plinova traje vrlo kratko, a količina izbačenoga plina u oba je slučaja jednaka. Ako je brzina plina s obzirom na raketu jednaka u , koliki treba biti Δt da bi raketa dosegla najveću visinu? Zanemari otpor zraka.

(Zadatak osmislio Duje Dodig.)

1887. U medicini se često koriste radioaktivni kobalt ^{60}Co , čije je vrijeme poluživota 5.27 godina, te radioaktivni jod ^{131}I vremena poluživota 8.025 dana. Izračunajte omjer početnih masa ^{60}Co i ^{131}I ako su im u početnome trenutku aktivnosti jednake. Nakon koliko vremena će im omjer aktivnosti biti jednak 100? Koristite molarnu masu (po molu atoma) $M_{\text{Co}} = 60 \text{ g/mol}$ za ^{60}Co i $M_{\text{I}} = 131 \text{ g/mol}$ za ^{131}I .

1888. Svjetlost prolazi kroz tri staklena bloka. Indeks loma prvoga bloka je 1.5, a drugoga 1.6. Razlika u valnim duljinama svjetlosti u tim dvama blokovima iznosi 20 nm. Kolika je valna duljina svjetlosti u trećem bloku, indeksa loma 1.8?

C) Rješenja iz matematike

4029. Dokaži da za pozitivne realne brojeve a_1, a_2, a_3, a_4 vrijedi nejednakost

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3 + a_4} + \frac{a_2}{a_3 + a_4 + a_1} + \frac{a_3}{a_4 + a_1 + a_2} + \frac{a_4}{a_1 + a_2 + a_3} \geq \frac{4}{3}.$$

Rješenje. Označimo s

$$L = \frac{a_1}{a_2 + a_3 + a_4} + \frac{a_2}{a_3 + a_4 + a_1} + \frac{a_3}{a_4 + a_1 + a_2} + \frac{a_4}{a_1 + a_2 + a_3},$$

te još:

$$L_2 = \frac{a_2}{a_2 + a_3 + a_4} + \frac{a_3}{a_3 + a_4 + a_1} + \frac{a_4}{a_4 + a_1 + a_2} + \frac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3}$$

$$L_3 = \frac{a_3}{a_2 + a_3 + a_4} + \frac{a_4}{a_3 + a_4 + a_1} + \frac{a_1}{a_4 + a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_1 + a_2 + a_3}$$

$$L_4 = \frac{a_4}{a_2 + a_3 + a_4} + \frac{a_1}{a_3 + a_4 + a_1} + \frac{a_2}{a_4 + a_1 + a_2} + \frac{a_3}{a_1 + a_2 + a_3}.$$

Očito je $L_2 + L_3 + L_4 = 4$. Sada imamo:

$$\begin{aligned} L + L_2 + L_3 + L_4 &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \\ &\cdot \left(\frac{1}{a_2 + a_3 + a_4} + \frac{1}{a_3 + a_4 + a_1} + \frac{1}{a_4 + a_1 + a_2} + \frac{1}{a_1 + a_2 + a_3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{A-H}}{\geq} (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \\ &\cdot \frac{16}{3(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)} = \frac{16}{3} \\ \Rightarrow L &\geq \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Jednakost se postiže ako i samo ako je

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4.$$

Duje Dodig (4),

Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

4030. Dokaži da za pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost

$$\frac{a^2 b^2}{a+b} + \frac{b^2 c^2}{b+c} + \frac{c^2 a^2}{c+a} \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2}.$$

Kada vrijedi jednakost?

Rješenje. Koristeći poznatu nejednakost $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$ imamo:

$$\begin{aligned} &\frac{a^3 + b^3 + c^3}{2} \\ &= \frac{a^3 + b^3}{4} + \frac{b^3 + c^3}{4} + \frac{a^3 + c^3}{4} \\ &\geq \frac{ab(a+b)}{4} + \frac{bc(b+c)}{4} + \frac{ac(a+c)}{4}. \end{aligned}$$

Budući da vrijedi

$$\frac{ab(a+b)}{4} \geq \frac{a^2 b^2}{a+b} \iff (a-b)^2 \geq 0$$

slijedi

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{2} \geq \frac{a^2 b^2}{a+b} + \frac{b^2 c^2}{b+c} + \frac{c^2 a^2}{c+a}.$$

Jednakost se postiže ako i samo ako je

$$a = b = c.$$

Duje Dodig (4), Zagreb

4031. Dokaži da jednačba $x^m = 2^n - 1$ nema rješenja u skupu prirodnih brojeva, ako su $m > 1$ i $n > 1$ prirodni brojevi.

Rješenje. Najprije uočimo da x ne može biti paran broj jer je desna strana jednačbe neparan. Sada razlikujemo dva slučaja:

1° m je paran.

Jednačbu zapišemo: $x^m + 1 = 2^n$. Kako je x neparan, vidimo $x^m + 1 \equiv 2 \pmod{4}$, pa taj broj ne može biti jednak 2^n za $n > 1$.

2° m je neparan.

Tada možemo zapisati:

$$\begin{aligned} x^m + 1 &= (x+1)(x^{m-1} - x^{m-2} + \dots + x^2 - x + 1) \\ &= (x+1)[x^{m-2}(x-1) + \dots + x(x-1) + 1]. \end{aligned}$$

I u ovom slučaju $x^m + 1$ ne može biti jednako 2^n jer je taj broj djeljiv s neparnim brojem koji nije jednak 1 za $x > 1$. Ako je $x = 1$, tada je $2^n = 1 \Rightarrow n = 1$, što prema uvjetu zadatka nije moguće.

Ovime je zadatak riješen.

Duje Dodig (4), Zagreb

4032. U kompleksnoj ravlini skiciraj skup točaka

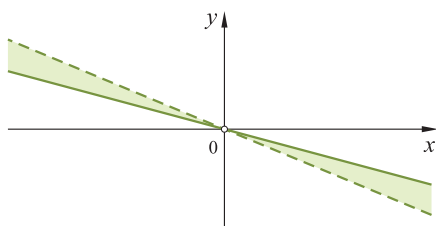
$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{6} \leq \arg \frac{i}{(z+iz)^2} < \frac{\pi}{4} \right\}.$$

Rješenje. Kako je $\arg i = \frac{\pi}{2}$, $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$ stavimo $\arg z = \varphi$, pa je:

$$\begin{aligned} \arg \frac{i}{(z+iz)^2} &= \arg i - \arg[(1+i)z]^2 \\ &= \frac{\pi}{2} - 2 \cdot [\arg(1+i) + \arg z] \\ &= \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \varphi \right) \\ &= -2\varphi = -2\varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Sada je:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6} &\leq -2\varphi + 2k\pi < \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{12} &\leq -\varphi + k\pi < \frac{\pi}{8} \\ k\pi - \frac{\pi}{8} &< \varphi \leq k\pi - \frac{\pi}{12}, \quad k = 0, 1. \end{aligned}$$



Duje Dodig (4), Zagreb

4033. Na pravcima p i r , koji se sijeku, dane su redom međusobno različite točke A_1, A_2, A_3 i B_1, B_2, B_3 , tako da je $\overrightarrow{A_1A_3} = \lambda \overrightarrow{A_2A_3}$ i $\overrightarrow{B_1B_3} = \lambda \overrightarrow{B_2B_3}$, za $\lambda \neq 0$. Točke C_1, C_2, C_3 dijele $\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}, \overrightarrow{A_3B_3}$ u istom omjeru. Dokaži da su one identične ili leže na istom pravcu.

Rješenje. Neka je $O = p \cap r$, $\overrightarrow{OA_i} = \vec{a}_i$, $\overrightarrow{OB_i} = \vec{b}_i$, $\overrightarrow{OC_i} = \vec{c}_i$ ($i = 1, 2, 3$).

$$\begin{aligned} \text{Iz } \overrightarrow{A_1A_3} &= \lambda \overrightarrow{A_2A_3} \text{ slijedi} \\ \vec{a}_3 - \vec{a}_1 &= \lambda(\vec{a}_3 - \vec{a}_2) \end{aligned}$$

i slično

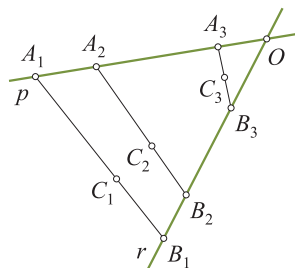
$$\vec{b}_3 - \vec{b}_1 = \lambda(\vec{b}_3 - \vec{b}_2)$$

$$\text{pa iz } \vec{c}_i = \frac{\vec{a}_i - \mu \vec{b}_i}{1 - \mu} \quad (i = 1, 2, 3) \text{ dobivamo}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{C_1C_3} &= \vec{c}_3 - \vec{c}_1 \\ &= \frac{1}{1 - \mu}[(\vec{a}_3 - \vec{a}_1) - \mu(\vec{b}_3 - \vec{b}_1)] \\ &= \frac{\lambda}{1 - \mu}[(\vec{a}_3 - \vec{a}_2) - \mu(\vec{b}_3 - \vec{b}_2)] \end{aligned}$$

$$\lambda(\vec{c}_3 - \vec{c}_2) = \lambda \overrightarrow{C_2C_3},$$

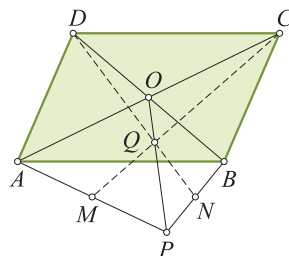
odakle slijedi $C_1 = C_2 = C_3$ ili da su C_1, C_2, C_3 na istom pravcu.



Duje Dodig (4), Zagreb

4034. Neka je O središte paralelograma $ABCD$ i P po volji izabrana točka izvan njega. Točke M i N su polovišta dužina $\overline{AP}$ i $\overline{BP}$, a Q je sjecište dužina $\overline{MC}$ i $\overline{ND}$. Dokaži da su točke O, P i Q kolinearne.

Prvo rješenje. Neka je cijela ravnina razapeta vektorima $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Ako dokažemo da su vektori $\overrightarrow{OQ}$ i $\overrightarrow{OP}$ kolinearni, dokaz je gotov.



Neka je $\overrightarrow{AP} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$. Imamo:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \\ &= \frac{1}{2}(-\vec{a} - \vec{b}) + \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} \\ &= \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \vec{a} + \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \vec{b}. \quad (1) \end{aligned}$$

Dalje imamo:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MQ} \\
 &= \frac{1}{2}(-\vec{a} - \vec{b}) + \frac{1}{2}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) \\
 &\quad + \gamma(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) \\
 &= -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{\alpha}{2}\vec{a} + \frac{\beta}{2}\vec{b} \\
 &\quad + \gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\vec{a} - \frac{\beta}{2}\vec{b} + \vec{a} + \vec{b}\right) \\
 &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha\gamma}{2} + \gamma\right)\vec{a} \\
 &\quad + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\beta}{2} - \frac{\beta\gamma}{2} + \gamma\right)\vec{b}. \quad (2)
 \end{aligned}$$

S druge strane je:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NQ} \\
 &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{b} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN}) + \delta \cdot \overrightarrow{ND} \\
 &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{b} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) \\
 &\quad + \delta(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AD}) \\
 &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{\alpha}{2}\vec{a} + \frac{\beta}{2}\vec{b} \\
 &\quad + \delta\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{\alpha}{2}\vec{a} + \frac{\beta}{2}\vec{b} - \alpha\vec{a} - \beta\vec{b} + \vec{b}\right) \\
 &= \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\delta}{2} + \frac{\alpha\delta}{2} - \alpha\delta\right)\vec{a} \\
 &\quad + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\beta}{2} - \frac{\beta\delta}{2} + \delta\right)\vec{b}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

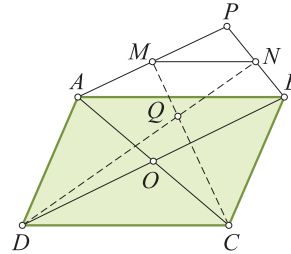
Iz (2) i (3), izjednačavanjem komponenti uz vektor $\vec{b}$ slijedi $\gamma = \delta$. Sada izjednačavanjem komponenti uz vektor $\vec{a}$ je $\gamma = \delta = \frac{1}{3}$. Time smo dobili da točka Q dijeli dužine $\overline{MC}$ i $\overline{ND}$ u omjeru 1 : 2. Sada, npr. iz (2) imamo:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OQ} &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{3}\right)\vec{a} \\
 &\quad + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\beta}{2} - \frac{\beta}{6} + \frac{1}{3}\right)\vec{b} \\
 &= \left(\frac{\alpha}{3} - \frac{1}{6}\right)\vec{a} + \left(\frac{\beta}{3} - \frac{1}{6}\right)\vec{b} \\
 &= \frac{1}{3}\left[\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\vec{a} + \left(\beta - \frac{1}{2}\right)\vec{b}\right] \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{3}\overrightarrow{OP}.
 \end{aligned}$$

Ovime smo dokazali da su točke O , P i Q kolinearne i Q dijeli dužinu $\overline{OP}$ u omjeru 1 : 2.

Duje Dodig (4), Zagreb

Drugo rješenje. Kako je $MN \parallel AB \parallel CD$, trokuti MNQ i CDQ su slični. Dakle, $\frac{|MN|}{2} = \frac{|CD|}{2}$.



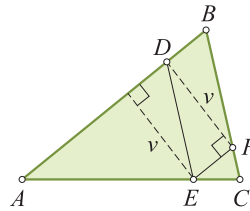
Nadalje, $|QM| = \frac{|CQ|}{2}$. U $\triangle ACP$, $|CM|$ je težišnica i Q dijeli $\overline{CM}$ u omjeru 1 : 2. Dakle, Q je težište $\triangle ACP$ i težišnica PO prolazi kroz Q .

Ur.

4035. Na stranici $\overline{AC}$ trokuta ABC dana je točka E . Pravci kroz E paralelni s BC i AB sijeku $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ u točkama D i F . Dokaži da je $S_{DBFE} = 2\sqrt{S_{ADE} \cdot S_{EFC}}$.

Rješenje. Iz $\triangle EFC \sim \triangle ADE$ slijedi

$$\frac{|EF|}{|AD|} = \sqrt{\frac{S_{EFC}}{S_{ADE}}}.$$



Budući da $\triangle ADE$ i paralelogram $BDEF$ imaju istu visinu v imamo:

$$\begin{aligned}
 \frac{|EF| \cdot v}{\frac{1}{2}|AD| \cdot v} &= 2 \cdot \sqrt{\frac{S_{EFC}}{S_{ADE}}} \\
 \frac{S_{DBFE}}{S_{ADE}} &= 2 \cdot \sqrt{\frac{S_{EFC}}{S_{ADE}}} \cdot \sqrt{S_{ADE}} \\
 S_{DBFE} &= 2 \cdot \sqrt{S_{ADE} \cdot S_{EFC}}.
 \end{aligned}$$

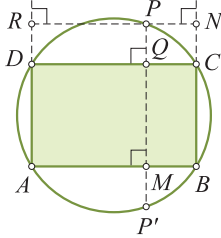
Duje Dodig (4), Zagreb

4036. Pravokutnik $ABCD$ upisan je u kružnicu na kojoj je dana točka P . Iz nje su spuštene okomice PM, PN, PQ, PR na AB, BC, CD, DA , tim redom. Dokaži da vrijedi $|PM| \cdot |PQ| = |PN| \cdot |PR|$.

Rješenje. Prema potenciji unutarnje točke Q obzirom na kružnicu vrijedi:

$$|PQ| \cdot |QP'| = |QC| \cdot |DQ|.$$

Još ćemo koristiti da je $|PQ| = |MP'|$.

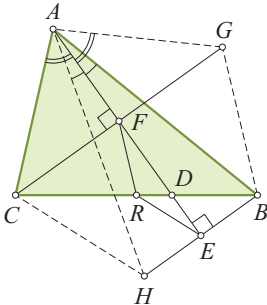


$$\begin{aligned} |PM| \cdot |PQ| &= |PQ| \cdot |QP'| = |QC| \cdot |DQ| \\ &= |PN| \cdot |PR|. \end{aligned}$$

Duje Dodig (4), Zagreb

4037. Na stranici $\overline{BC}$ trokuta ABC dana je točka D . Iz B i C spuštene su okomice BE i CF na pravac AD . Ako je R polovište stranice $\overline{BC}$, dokaži $|RE| = |RF|$.

Rješenje. Produžimo CF i BE tako da je $|CF| = |FG|$ i $|BE| = |EH|$, i povucimo stranice $\overline{AG}, \overline{BG}, \overline{AH}$ i $\overline{CH}$. $BE \perp AE$ i $|BE| = |EH|$ po konstrukciji. Tada su trokuti ABE i AHE sukladni ($|AB| = |AH|$, $\sphericalangle BAE = \sphericalangle HAE$). Slično se vidi da su trokuti ACF i AGF sukladni: $|AC| = |AG|$ i $\sphericalangle CAF = \sphericalangle GAF$. Oduzimanjem se dobiva $\sphericalangle BAG = \sphericalangle CAH$.



Dakle, trokuti AGB i ACH su sukladni pa je $|BG| = |CH|$. U trokutu CBG , R i F su po-

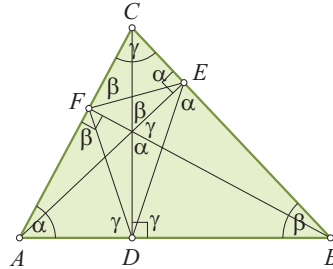
lovišta stranica $\overline{CB}$ i $\overline{CG}$ pa je $|RF| = \frac{1}{2}|BG|$.

Slično je u trokutu CBH , $|RE| = \frac{1}{2}|CH|$. Kako je $|BG| = |CH|$ imamo $|RE| = |RF|$.

Ur.

4038. Neka su D, E, F nožišta visina trokuta ABC s kutovima α, β, γ . Nađi omjer površina trokuta DEF i ABC .

Prvo rješenje. Neka je dan trokut ABC čiji su kutovi pri vrhovima A, B i C redom α, β i γ . Neka su nožišta D, E i F označena kao na slici.



Nacrtamo kružnicu kroz točke A, B, E, F čiji je promjer stranica $\overline{AB}$. Tada za kutove nad istim lukom te kružnice vrijedi:

$$\sphericalangle ABF = \sphericalangle AEF = 90^\circ - \alpha \quad \text{i}$$

$$\sphericalangle BAE = \sphericalangle BFE = 90^\circ - \beta.$$

Oдавде slijedi: $\sphericalangle FEC = \alpha$ i $\sphericalangle EFC = \beta$.

Konstruiramo i druge dvije kružnice nad promjerima $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$. Analogno kao i u prvom slučaju dobivamo kutove kao na slici. Dobili smo:

$$\triangle AFD \sim \triangle EBD \sim \triangle EFC \sim \triangle ABC$$

jer su im svi kutovi jednaki.

Sada je redom

$$\triangle EFC \sim \triangle ABC \implies \frac{|FE|}{|AB|} = \frac{|CE|}{|AC|} \implies$$

$$\frac{|FE|}{c} = \cos \gamma \implies |FE| = c \cdot \cos \gamma$$

$$\triangle AFD \sim \triangle ABC \implies \frac{|FD|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|AC|} \implies$$

$$\frac{|FD|}{a} = \cos \alpha \implies |FD| = a \cdot \cos \alpha$$

$$\triangle EBD \sim \triangle ABC \implies \frac{|ED|}{|AC|} = \frac{|BE|}{|AB|} \implies$$

$$\frac{|ED|}{b} = \cos \beta \implies |ED| = b \cdot \cos \beta.$$

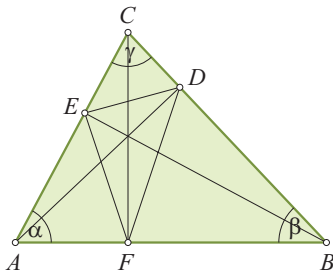
Konačno je

$$\begin{aligned}\frac{P_{\triangle DEF}}{P_{\triangle ABC}} &= \frac{\frac{1}{2}|FE||DE| \sin(180^\circ - 2\alpha)}{\frac{1}{2}bc \sin \alpha} \\ &= \frac{c \cos \gamma \cdot b \cos \beta \cdot \sin 2\alpha}{bc \sin \alpha} \\ &= \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}{\sin \alpha} \\ &= 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.\end{aligned}$$

Duje Dodig (4), Zagreb

Drugo rješenje.

$$P_{DEF} = P_{ABC} - P_{AFE} - P_{BDF} - P_{CED}.$$



$$\begin{aligned}P_{AFE} &= \frac{1}{2}|AF||AE| \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2}|AC| \cos \alpha \cdot |AB| \cos \alpha \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2R \sin \beta \cdot 2R \sin \gamma \cos^2 \alpha \sin \alpha \\ &= 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \cos^2 \alpha\end{aligned}$$

i analogno

$$\begin{aligned}P_{BDE} &= 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \cos^2 \beta \\ P_{CED} &= 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \cos^2 \gamma. \\ P_{ABC} &= \frac{1}{2}|AB||AC| \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2R \sin \gamma \cdot 2R \sin \beta \sin \alpha \\ &= 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.\end{aligned}$$

Dakle,

$$\frac{P_{DEF}}{P_{ABC}} = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma.$$

Sada je

$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \\ = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 + \cos 2\beta}{2} + \frac{1 + \cos 2\gamma}{2}\end{aligned}$$

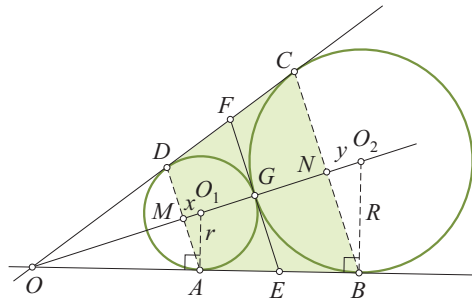
$$\begin{aligned}&= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}[\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2(\alpha + \beta)] \\ &= \frac{3}{2} + \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) \\ &\quad + \cos^2(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \\ &= 1 + \cos(\alpha + \beta)[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \\ &= 1 + \cos(\alpha + \beta) \cdot 2 \cos \alpha \cos \beta \\ &= 1 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma\end{aligned}$$

$$\frac{P_{DEF}}{P_{ABC}} = 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

Ur.

4039. Kružnice polumjera r i R dodiruju se izvana, a AB i CD su njihove zajedničke tangente. Dokaži da se u četverokut $ABCD$ može upisati kružnica te odredi njezin polumjer.

Rješenje. Neka se produžetci tangenata AB i CD sijeku u točki O . Zbog simetrije, četverokut $ABCD$ je jednakokrani trapez. Da bi se njemu mogla upisati kružnica nužno je i dovoljno da vrijedi $|AD| + |BC| = |AB| + |CD|$, odnosno, zbog $|AB| = |CD|$, $|AB| = \frac{1}{2}(|AD| + |BC|)$. Znači, dovoljno je dokazati da je dužina $|AB|$ jednaka srednjici trapeza. Nacrtajmo zajedničku unutarnju tangentu EF .



Kako je $|DF| = |FG|$, $|CF| = |FG|$ i $|AE| = |EG|$, $|BE| = |EG|$, zbrajanjem slijedi $|AB| = |FE|$. Dakle, trapezu $ABCD$ se može upisati kružnica čiji je promjer $|MN|$. Uz oznake $|MO_1| = x$ i $|NO_2| = y$ iz jednakosti $|MG| = |NG|$ (srednjica EF raspolavlja dužinu MN) slijedi $R - y = r + x$. Iz

$$\triangle O_1AM \sim \triangle O_2BN \implies$$

$$\frac{|O_1M|}{|O_2N|} = \frac{|O_1A|}{|O_2B|} \implies \frac{x}{y} = \frac{r}{R}.$$

Iz sustava

$$\left. \begin{aligned} R - y &= r + x \\ \frac{x}{y} &= \frac{r}{R} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = \frac{R}{r}x$$

$$R - \frac{R}{r}x = r + x$$

$$x = \frac{r(R-r)}{r+R}, \quad y = \frac{R(R-r)}{r+R}.$$

Traženi polumjer iznosi: $R - y = \frac{2rR}{r+R}$.

Duje Dodig (4), Zagreb

4040. U ladici se nalazi 10 crvenih, 8 plavih, 8 ljubičastih i 4 žute olovke. U mraku biramo olovke iz ladice. Koliko najmanje olovaka treba izvaditi da bi među njima bilo:

- a) ne manje od 4 olovke iste boje;
- b) barem po jedna olovka od svake boje;
- c) najmanje 6 plavih olovaka?

Rješenje. a) Da bi pronašli najgori mogući slučaj, želimo izvući što više olovaka bez da imamo 4 iste boje. Maksimalno možemo imati 3 crvene, 3 plave, 3 ljubičaste i 3 žute, tj. ukupno 12 olovaka, a da još nemamo 4 olovke iste boje. No, ako sada odaberemo još samo jednu olovku, bilo koje boje, prema Dirichletovu principu postojat će ne manje od 4 olovke iste boje. Znači, u ovom slučaju odgovor je 13 olovaka.

b) Najgori slučaj ovdje je da izvučemo sve olovke u 3 boje. Kako je žutih olovaka najmanje, to je slučaj da smo izvukli 10 crvenih, 8 plavih i 8 ljubičastih olovaka, tj. ukupno 26 olovaka. Ako sada izvučemo još jednu olovku, ona mora biti žuta i kompletirali smo 4 boje. Znači, u ovom slučaju odgovor je 27 olovaka.

c) Najgori raspored ovdje je da smo izvukli 10 crvenih, 8 ljubičastih, 4 žute i najviše 5 plavih olovaka. Dakle, ako sada izvučemo još jednu olovku opet, prema Dirichletovu principu, ona mora biti plava. U ovom slučaju je odgovor 28 olovaka.

Duje Dodig (4), Zagreb

4041. Neka je

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

za $n > 2$, Fibonaccijev niz. Dokaži jednakost

$$F_n^2 - F_{n-2}^2 = F_{2n-2}, \quad n > 2.$$

Rješenje. Koristit ćemo Binetovu formulu:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

$$F_n^2 - F_{n-2}^2 = \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n} - 2 \left(\frac{1-5}{4} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n} \right]$$

$$= \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2(n-2)} - 2 \left(\frac{1-5}{4} \right)^{n-2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2(n-2)} \right]$$

$$= \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n-2} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - 2 \cdot (-1)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n-2} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n-2} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{-2} + 2 \cdot (-1)^{-2} \cdot (-1)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n-2} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{-2} \right]$$

$$= \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n-2} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n-2} \cdot \frac{2}{3+\sqrt{5}} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n-2} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n-2} \cdot \frac{2}{3-\sqrt{5}} \right]$$

$$= \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n-2} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{3+\sqrt{5}} \right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n-2} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{3-\sqrt{5}} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n-2} \right]$$

$$= F_{2n-2}.$$

Duje Dodig (4), Zagreb

4042. Za prirodan broj n odredi sumu
 $\binom{n}{1} \cos x + \binom{n}{2} \cos 2x + \dots + \binom{n}{n} \cos nx$.

Rješenje. Označimo:

$$\begin{aligned} S_1 &= \binom{n}{1} \cos x + \binom{n}{2} \cos 2x \\ &\quad + \dots + \binom{n}{n} \cos nx \\ S_2 &= \binom{n}{1} \sin x + \binom{n}{2} \sin 2x \\ &\quad + \dots + \binom{n}{n} \sin nx. \end{aligned}$$

Sada je:

$$\begin{aligned} &1 + S_1 + i \cdot S_2 \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} (\cos x + i \sin x) \\ &\quad + \binom{n}{2} (\cos 2x + i \sin 2x) \\ &\quad + \dots + \binom{n}{n} (\cos nx + i \sin nx) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos kx + i \sin kx) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos x + i \sin x)^k \\ &= (1 + \cos x + i \sin x)^n \\ &= \left(2 \cos^2 \frac{x}{2} + 2i \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right)^n \\ &= \left(2 \cos^2 \frac{x}{2} \right)^n \left(\cos \frac{x}{2} + i \sin \frac{x}{2} \right)^n \\ &= 2^n \cos^n \frac{x}{2} \left(\cos \frac{nx}{2} + i \sin \frac{nx}{2} \right) \\ S_1 &= 2^n \cos^n \frac{x}{2} \cos \frac{nx}{2} - 1. \end{aligned}$$

Helena Rukavina (4),
 Gimnazija "Isidora Sekulić", Novi Sad

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 550. Poluga dugačka 90 cm ima zane-
 marivu masu. Na jednom joj je kraju uteg mase
 1 kg, a na drugoj strani od oslonca su raspore-
 đena tri utega jednakih masa. Jedan od njih se
 nalazi na kraju poluge i sva su tri međusobno

jednako udaljena. Kolika je masa jednog od tih
 jednakih utega?

Rješenje.

$$\begin{aligned} l &= 90 \text{ cm} \\ k_1 &= 45 \text{ cm} \\ m_1 &= 1 \text{ kg} \\ m_2 &= m_3 = m_4 = m \\ k_2 &= 45 \text{ cm} \\ k_3 &= 30 \text{ cm} \\ k_4 &= 15 \text{ cm} \\ m &=? \\ F_1 k_1 &= F_2 k_2 + F_3 k_3 + F_4 k_4 \\ m_1 g k_1 &= m g k_2 + m g k_3 + m g k_4 \quad / : g \\ m_1 k_1 &= m k_2 + m k_3 + m k_4 \\ m_1 k_1 &= m(k_2 + k_3 + k_4) \\ m &= \frac{m_1 k_1}{k_2 + k_3 + k_4} \\ &= \frac{1 \text{ kg} \cdot 45 \text{ cm}}{45 \text{ cm} + 30 \text{ cm} + 15 \text{ cm}} = \frac{45 \text{ kg}}{90} \\ &= 0.5 \text{ kg}. \end{aligned}$$

Jakov Smoljak (8),
 OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 551. Loptica mase 100 g je izbačena
 vertikalno uvis početnom brzinom 6 m/s s ne-
 ke početne visine. Nakon drugog odskoka od-
 skočila je na visinu 1.47 m. Pri svakom odskoku
 loptica izgubi 30 posto svoje energije. Izračunaj
 početnu visinu s koje je loptica izbačena.

Rješenje.

$$\begin{aligned} m &= 100 \text{ g} \\ v &= 6 \text{ m/s} \\ h_3 &= 1.47 \text{ m} \\ \eta &= 70 \% \\ h_0 &=? \\ h_2 &= \frac{h_3}{0.7} = \frac{1.47 \text{ m}}{0.7} = 2.1 \text{ m} \\ h_1 &= \frac{h_2}{0.7} = \frac{2.1 \text{ m}}{0.7} = 3 \text{ m} \\ t &= \frac{v}{g} = \frac{6 \text{ m/s}}{10 \text{ m/s}^2} = 0.6 \text{ s} \\ s &= \frac{gt^2}{2} = \frac{10 \text{ m/s}^2 \cdot (0.6 \text{ s})^2}{2} = 1.8 \text{ m} \\ h_0 &= h_1 - s = 3 \text{ m} - 1.8 \text{ m} = 1.2 \text{ m}. \end{aligned}$$

Ur.

OŠ – 552. Lovro je izmjerio da ploča štednjaka zakuha 2 dl vode početne temperature 20°C za 56 sekundi. Jaja kuha u istoj količini vode i kad voda zakuha, kuha ih još pet minuta. Početna je temperatura jaja 5°C . Masa jednog jajeta je 80 g. Koliko će trajati kuhanje dva jajeta? Specifični toplinski kapacitet jajeta je 3200 J/kgK , a vode 4200 J/kgK .

Rješenje.

$$V_v = 2\text{ dL} = 0.2\text{ L}$$

$$m_v = 0.2\text{ kg}$$

$$t_{1v} = 20^{\circ}\text{C}$$

$$t_{2v} = 100^{\circ}\text{C}$$

$$t_1 = 56\text{ s}$$

$$t_{1j} = 5^{\circ}\text{C}$$

$$t_2 = 5\text{ min} = 300\text{ s}$$

$$m_j = 160\text{ g} = 0.16\text{ kg}$$

$$c_j = 3200 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$$

$$c_v = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$$

$$t_{\text{kuhanja}} = ?$$

$$P = \frac{Q}{t}$$

$$Q_1 = c_v m_v \Delta t_v = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \cdot 0.2\text{ kg} \cdot 80\text{ K} = 67\,200\text{ J}$$

$$P = \frac{67\,200\text{ J}}{56\text{ s}} = 1200\text{ W}$$

$$Q_2 = Q_1 + Q_j$$

$$Q_j = c_j m_j \Delta t_j = 3200 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \cdot 0.16\text{ kg} \cdot 95\text{ K} = 48\,640\text{ J}$$

$$Q_2 = 67\,200\text{ J} + 48\,640\text{ J} = 115\,840\text{ J}$$

$$t_3 = \frac{Q}{P} = \frac{115\,840\text{ J}}{1200\text{ W}} = 96.37\text{ s}$$

$$t_{\text{kuhanja}} = t_2 + t_3 = 396.37\text{ s}.$$

Luka Sabolić (8),

OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 553. 51 Pegasi b je prvi otkriveni ekstrasolarni planet. Otkriven je 1995. godine i fizičari koji su ga otkrili dobili su za to Nobelovu nagradu za fiziku. Taj planet oko svoje zvijezde kruži na udaljenosti od oko 7.9 milijuna kilometara, a za jedan okret oko nje treba 101.54 h. Usporedi brzinu kruženja oko matične zvijezde

tog planeta sa Zemljinom brzinom kruženja oko Sunca. Zemlja je od Sunca udaljena 149.6 milijuna kilometara i za jedan joj okret treba 365.25 dana. Pretpostavi da su staze tih planeta kružnice.

Rješenje.

$$r_P = 7\,900\,000\text{ km}$$

$$t_P = 101.54\text{ h}$$

$$r_Z = 149\,600\,000\text{ km}$$

$$t_Z = 365.25\text{ d}$$

$$\frac{v_P}{v_Z} = ?$$

$$v = \frac{s}{t}$$

$$v_P = \frac{2 \cdot 7\,900\,000\text{ km} \cdot \pi}{101.54 \cdot 3600\text{ s}} = 135.79 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$v_Z = \frac{2 \cdot 149\,600\,000\text{ km} \cdot \pi}{365.25 \cdot 24 \cdot 3600\text{ s}} = 29.79 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$\frac{v_P}{v_Z} = \frac{135.79\text{ km/s}}{29.79\text{ km/s}} = 4.56.$$

Mihael Ratkajc (8),

OŠ Mate Lovraka, Zagreb

1868. Banane su poznate po visokom udjelu kalija od 3.6 g/kg i blagoj radioaktivnosti zbog izotopa ^{40}K koji ima prirodnu zastupljenost od 0.012 % (molarni omjer) i vrijeme poluraspada 1.251 milijardi godina. Koliko raspada ^{40}K se dogodi u jednoj sekundi u kilogramu banana? Molarna masa prirodnog kalija je 39.098 g/mol.

Napomena. Vjerojatno će biti potrebna numerička aproksimacija: $2^x \approx 1 + x \ln 2$ koja vrijedi za vrlo male vrijednosti x . Želiš li provjeriti grešku te aproksimacije, to možeš učiniti razmatranjem egzaktnog izraza:

$$2^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x \ln 2)^k}{k!} = 1 + x \ln 2 + \frac{(x \ln 2)^2}{2} + \dots$$

Rješenje. U bananama ukupne mase m masa sveg kalija je $m_K = w_K m$ uz $w_K = 3.6\text{ g/kg}$ (tj. 0.36 %) pa je ukupna količina kalija:

$$n_K = \frac{m_K}{M_K} = \frac{w_K m}{M_K} \approx 0.092\text{ mol},$$

uz M_K kao molarnu masu prirodnog kalija. Jedino je ^{40}K odgovoran za radioaktivnost, a njegova količina je $n_{40} = r_{40} n_K$ uz r_{40} kao njegovu prirodnu zastupljenost. Odavde možemo iz-

računati ukupan broj atoma ^{40}K :

$$N_{40} = n_{40} N_A = \frac{r_{40} w_K N_A m}{M_K} \approx 6.654 \cdot 10^{18},$$

uz N_A kao Avogadrovu konstantu. Nakon $t = 1$ s broj preživjelih ^{40}K atoma (ako ih je u početnom trenutku bilo N_{40}) jednak je $N(t) = N_{40} 2^{-t/T}$, uz T kao vrijeme poluživota. Stoga je ukupan broj raspada:

$$\Delta N = N(0) - N(t) = N_{40}(1 - 2^{-t/T})$$

Korištenjem predložene aproksimacije imamo $1 - 2^{-t/T} \approx (t/T) \ln 2$, odakle:

$$\Delta N = N_{40} \frac{t \ln 2}{T} \approx 117 \quad (\text{točnije, } 116.9).$$

Duje Dodig (4),

Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

Napomena. Vidi napomenu uz rješenje zadatka 1854 iz MFL 300 (str. 251), vezanu uz nužnost korištene aproksimacije.

1869. Pri temperaturi od 15°C masivna platforma postavljena je na vertikalnu oprugu čija je prirodna duljina pri danoj temperaturi jednaka 20 cm. Pritiskom platforme opruga se sabija na duljinu od 15 cm. Zagrijavanjem opruge njezina prirodna duljina produljuje se za 0.2 mm po Celzijevom stupnju temperature razlike. No zagrijavanjem ona također postaje "mekša", tako da u nekom rasponu oko sobne temperature njezin koeficijent elastičnosti ovisi o temperaturi kao $k_T = K/\sqrt{T + 50^\circ\text{C}}$. Kolika je minimalna visina do koje se platforma može spustiti hlađenjem ili zagrijavanjem opruge i pri kojoj će se temperaturi to dogoditi?

Rješenje. Neka je $\alpha = 0.2 \text{ mm}/^\circ\text{C}$ koeficijent linearnog rastezanja opruge, ℓ_0 prirodna duljina opruge pri $T_0 = 15^\circ\text{C}$, a ℓ_T prirodna duljina pri nekoj temperaturi T oko zadane. Tada je

$$\ell_T = \ell_0 + \alpha(T - T_0).$$

Neka je L_0 duljina opruge pri kojoj je platforma u ravnoteži na temperaturi T_0 . Kasnije će L_T biti duljina opruge pri kojoj je platforma u ravnoteži na nekoj drugoj temperaturi T . Iz uvjeta ravnoteže sila $k_0(\ell_0 - L_0) = mg$ i zadanog oblika k_T slijedi:

$$\frac{K}{\sqrt{T_0 - T_x}}(\ell_0 - L_0) = mg,$$

uz $T_x = -50^\circ\text{C}$. Nalazimo konstantu K iz ovisnosti koeficijenta elastičnosti k_T :

$$K = \frac{mg\sqrt{T_0 - T_x}}{\ell_0 - L_0}.$$

Ako oprugu zagrijemo ili ohladimo na temperaturu T , uvjet ravnoteže bit će

$$k_T(\ell_T - L_T) = mg.$$

Uvrštavanjem svih parametrizacija imamo

$$\frac{mg\sqrt{T_0 - T_x}}{\ell_0 - L_0} \frac{\ell_0 + \alpha(T - T_0) - L_T}{\sqrt{T - T_x}} = mg.$$

Sredimo izraz za L_T :

$$L_T = \ell_0 + \alpha(T - T_0) - \sqrt{\frac{T - T_x}{T_0 - T_x}}(\ell_0 - L_0)$$

i uvedimo pokratu $t = \sqrt{T - T_x}$, tako da $T = t^2 + T_x$. Odavde je

$$L_T = \alpha t^2 - \frac{\ell_0 - L_0}{\sqrt{T_0 - T_x}} t + [\ell_0 + \alpha(T_x - T_0)].$$

Dobili smo kvadratnu jednadžbu po t . Minimalnu visinu nalazimo traženjem tjemena parabole $at^2 + bt + c$, koje se nalazi u točki $-b/2a$, što daje

$$t = \frac{\ell_0 - L_0}{2\alpha\sqrt{T_0 - T_x}}.$$

Temperatura koja minimizira visinu platforme stoga je

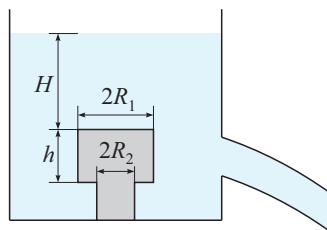
$$T = t^2 + T_x = 190.4^\circ\text{C}.$$

Povratkom T u L_T nalazimo minimum

$$L_T = 13.9 \text{ cm}.$$

Ur.

1870. Promotri tijelo mase 10 g koje se sastoji od dvaju slijepljenih valjaka (slijepljene su im baze). Donji valjak manje je baze, polumjera 5 cm, a gornji valjak veće je baze, polumjera 10 cm i visine 7 cm. Tijelo je pritisnuto o dno čaše manjom bazom pa je u čašu nalivena voda, tako da se zbog pritiska na tijelo voda ne



usprijeva uvući pod njegovu bazu. Voda je naličena do određene visine, tako da nakon popuštanja početnog pritiska tijelo i dalje ostaje pripljubljeno uz dno čaše. Voda se zatim počinje ispuštati kroz otvor na čaši. Do koje se visine nad gornjom bazom tijela razina vode mora spustiti da bi tijelo počelo izranjati? Gustoća vode je 1000 kg/m^3 .

Rješenje. Sila uzgona nastaje zbog razlike hidrostatskih tlakova na sveukupnu donju i gornju plohu tijela izloženu fluidu. Njezin iznos jednak je $\rho g V$ (uz ρ kao gustoću fluida, a V kao volumen uronjenog tijela) samo ako je tijelo u cjelosti okruženo fluidom. U našem slučaju to nije zadovoljeno pa je moramo izračunati iz opisane geometrije:

$$F = F_{\text{donja ploha}} - F_{\text{gornja ploha}} \\ = \rho g (H + h)(R_1^2 - R_2^2)\pi - \rho g H R_1^2 \pi,$$

gdje pozitivan predznak odgovara sili prema gore. Tijelo će se početi uzdizati kad se takav "djelomični" uzgon izjednači s težinom

$$mg = \rho g \pi [h(R_1^2 - R_2^2) - H R_1^2],$$

odakle je

$$H = h \left(\frac{R_1^2}{R_2^2} - 1 \right) - \frac{m}{\rho R_1^2 \pi} = 20.9 \text{ cm}.$$

Duje Dodig (4), Zagreb

1871. Ljestve mase 10 kg stabilno su oslonjene o zid te zatvaraju kut od 80° s obzirom na tlo. Ako se centar mase ljestava nalazi na polovici njihove duljine, koliko iznosi sila njihova trenja s tlom? Ako je koeficijent statičkoga trenja ljestava s tlom jednak 0.8 , koliki je najmanji kut koji one mogu zatvarati s tlom prije nego što počnu proklizavati? U statičkome slučaju nije prisutno trenje ljestava sa zidom.

Uputa. Ne zaboravi na momente sile.

Rješenje. Ako su ljestve u ravnoteži, vektorski zbroj svih sila mora iščezavati:

$$F_x = N \quad \text{i} \quad F_y = mg.$$

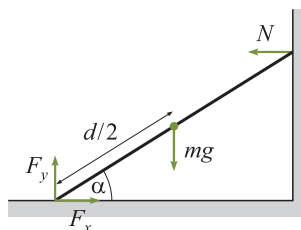
F_x je sila trenja s tlom, a N reakcija podloge (zida). U ravnoteži iščezava i ukupan moment svih sila. Računamo ga oko uporišne točke ljestava s tlom:

$$mg \cdot \frac{d}{2} \cos \alpha - Nd \sin \alpha = 0,$$

gdje je d duljina ljestava. Odavde je

$$N = \frac{mg}{2 \tan \alpha}.$$

Za $\alpha = 80^\circ$ je: $F_x = N \approx 8.65 \text{ N}$.



Do proklizavanja dolazi kad se postigne maksimalna sila statičkog trenja

$$(F_x)_{\text{max}} = \mu F_y = \mu mg,$$

gdje je μ koeficijent statičkog trenja ljestava s tlom. Izjednačavanjem

$$\frac{mg}{2 \tan \alpha_{\min}} = \mu mg$$

nalazimo $\alpha_{\min} = \arctan \frac{1}{2\mu} \approx 32^\circ$.

Duje Dodig (4), Zagreb

1872. Čestica Σ^0 raspada se iz mirovanja u česticu Λ^0 i γ -zraku. Izračunaj energiju γ -zrake. Masa Σ^0 je $1192.642 \text{ MeV}/c^2$, a masa Λ^0 je $1115.683 \text{ MeV}/c^2$. Potreban je relativistički račun. Izrazi energiju γ -zrake i u megaelektronvoltima (MeV) i u džulima (J).

Uputa. Veza između ukupne relativističke energije E i količine gibanja p danog objekta je $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$. γ -zraka (tj. foton) nema masu.

Rješenje. Ukupna energija sustava prije raspada mirujuće Σ^0 čestice jednaka je njezinoj energiji mirovanja

$$E_\Sigma = m_\Sigma c^2,$$

a ukupna količina gibanja je 0 . Nakon raspada u Λ^0 i γ -zraku, dvije se čestice moraju gibati po istome pravcu, ali u suprotnim smjerovima zbog očuvanja ukupne količine gibanja. To znači i da za iznose njihovih količina gibanja vrijedi

$$p_\Lambda = p_\gamma,$$

odnosno $p_\Lambda^2 c^2 = p_\gamma^2 c^2$, što će nam olakšati račun jer se upravo takvi članovi pojavljuju u relativističkoj vezi s energijom. Kako Λ^0 ima masu, vrijedi: $p_\Lambda^2 c^2 = E_\Lambda^2 - m_\Lambda^2 c^4$. γ -zraka nema

masu pa je $p_\gamma^2 c^2 = E_\gamma^2$. Stoga je $E_\Lambda^2 - m_\Lambda^2 c^4 = E_\gamma^2$. Iz očuvanja ukupne energije prije i poslije raspada imamo $E_\Sigma = E_\Lambda + E_\gamma$, tj. $m_\Sigma c^2 = E_\Lambda + E_\gamma$. Ovo su dvije jednačbe s dvije nepoznate, među kojima tražimo E_γ pa moramo eliminirati E_Λ . Iz druge izrazimo $E_\Lambda = m_\Sigma c^2 - E_\gamma$ pa to uvrstimo u prvu

$$(m_\Sigma c^2 - E_\gamma)^2 - m_\Lambda^2 c^4 = E_\gamma^2,$$

nakon čega samo treba izračunati

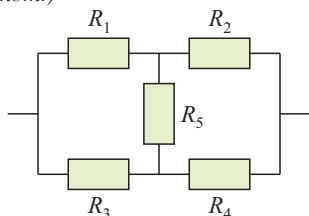
$$E_\gamma = \frac{m_\Sigma^2 - m_\Lambda^2}{2m_\Sigma} c^2 = \frac{(m_\Sigma c^2)^2 - (m_\Lambda c^2)^2}{2m_\Sigma c^2}.$$

U drugome izrazu (s mc^2 članovima) izravno koristimo zadane podatke, odakle je

$$E_\gamma = 74.5 \text{ MeV} = 1.19 \cdot 10^{-11} \text{ J}.$$

Ur.

1873. Za strujni krug na slici, možeš li predložiti neku specifičnu kombinaciju otpora R_1 , R_2 , R_3 , R_4 takvu da ukupan otpor sklopa ne ovisi o R_5 ? (Opravdaj prijedlog argumentom ili računom.)



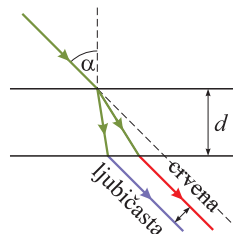
Rješenje. Ova shema (Wheatstoneov most) ne može se svesti na niz serijskih i paralelnih spojeva pa bismo ukupan otpor morali nalaziti preko Kirchhoffovih zakona. Kad bi električni potencijal u točkama između R_1 i R_2 te između R_3 i R_4 bio jednak, između njih ne bi bilo napona pa struja ne bi tekla kroz R_5 . Stoga se R_5 ne bi pojavljivao u Kirchhoffovim jednačbama pa otpor kruga ne bi mogao ovisiti o njemu. Kad bi bilo $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$, tada bi zbog simetrije pada napona u gornjoj i donjoj grani potencijal na krajevima R_5 bio jednak pa ne bi bilo napona nad njime. U tom slučaju ukupan otpor je

$$R_{\text{uk}} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}.$$

Još je jednostavniji slučaj kad su sva četiri otpora jednaka: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4$.

Duje Dodig (4), Zagreb

1874. Uska zraka bijele svjetlosti upada iz zraka na blok stakla debljine 1 cm , pod kutom od 45° s obzirom na njegovu okomicu. Indeks loma materijala općenito ovisi o frekvenciji svjetlosti. Neka je indeks loma stakla za zadnju vidljivu nijansu crvene svjetlosti jednak 1.50 , a za zadnju vidljivu nijansu ljubičaste svjetlosti 1.53 . Zbog loma svjetlosti u staklu dolazi do pomaka izlaznih zraka, koji je za svaku boju različit. Kolika je širina snopa vidljive svjetlosti po izlasku iz stakla?



Rješenje. α je upadni kut zrake s obzirom na okomicu materijala; β je kut s obzirom na okomicu nakon ulaska u materijal. Za danu frekvenciju svjetlosti (tj. za dani indeks loma n) vrijedi Snellov zakon

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n.$$

Neka je l duljina dijela zrake (dane boje) unutar bloka stakla debljine d ,

$$l = \frac{d}{\cos \beta}.$$

Pomak zrake nakon izlaska je

$$p = l \sin(\alpha - \beta) = d(\sin \alpha - \cos \alpha \tan \beta).$$

α je jednak za sve boje pa samo β ovisi o boji svjetlosti. Neka su β_c i β_{lj} kutovi loma krajnjih nijansi crvene i ljubičaste svjetlosti. Tada je širina δ vidljivog dijela zrake jednaka razlici pomaka dviju krajnjih boja

$$\delta = p_{lj} - p_c = d \cos \alpha (\tan \beta_c - \tan \beta_{lj}).$$

Izrazimo tangense preko sinusa

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}},$$

gdje smo koristili $\sin \beta = (\sin \alpha)/n$ iz Snellova zakona. Slijedi da je δ jednak:

$$d \cos \alpha \sin \alpha \left(\frac{1}{\sqrt{n_c^2 - \sin^2 \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{n_{lj}^2 - \sin^2 \alpha}} \right).$$

Uvrštavanjem brojeva slijedi $\delta = 94.5 \mu\text{m}$.

Duje Dodig (4), Zagreb