



ZANIMLJIVOSTI

66. Međunarodna matematička olimpijada 2025. g.



Od 10. do 20. srpnja održana je 66. Međunarodna matematička olimpijada (IMO) u Sunshine Coastu kraj Brisbanea, Australija. Na natjecanju je sudjelovalo 110 država i 630 učenika, čineći ovo natjecanje jednim od najvećih IMO-a dosad. Hrvatska ekipa je izabrana nizom testova održanih u svibnju, a predstavljali su ju:

Emanuel Bajamić (4. r.), III. gimnazija, Split,

Fabijan Cikač (3. r.), XV. gimnazija, Zagreb,

Patrik Cvetek (4. r.), Elektrotehnička škola, Split,

Maša Dobrić (3. r.), XV. gimnazija, Zagreb,

Hrvoje Valent (3. r.), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb,

Martin Vidović (2. r.), XV. gimnazija, Zagreb.

Voditelj olimpijske ekipe je bio *Petar Orlić* (Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu), a vođa puta *Kristijan Kilassa Kvaternik* (Fakultet elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu).



Hrvatska ekipa nakon podjele nagrada

U popodnevним satima 9. srpnja poletjeli smo iz zračne luke Franjo Tuđman i nakon skoro 23 sata putovanja, preko Dohe, stigli u Brisbane, gdje smo se taksijem prebacili do hotela u Sunshine Coastu. Stigli smo par dana prije početka samog programa za učenike pa smo se odmorili, i akomodirali na vremensku razliku. Proveli smo to vrijeme u razgledavanju Sunshine Coasta, uključujući i akvarij Sea Life te prekasnu plažu Noosa Main Beach. Nakon vrlo stresna dva dana rješavanja imali smo dva izleta, jedan u Australia

Zoo, gdje je sin Stevea Irwina priredio predstavu s krokodilima te drugi u zabavnom parku Aussie World rezerviran samo za sudionike natjecanja. Pojedinačno smo osvojili jednu brončanu medalju (*Emanuel Bajamić*) i četiri pohvale, za barem jedan potpuno točno riješen zadatak, a nije bilo dovoljno bodova za nagradu, (*Hrvoje Valent*, *Patrik Cvetek*, *Maša Dobrić*, *Martin Vidović*). Hrvatska je ekipa sveukupno zauzela 64. mjesto, a najbolji ukupni rezultat ostvarili su učenici iz Kine. Veselimo se sljedećoj olimpijadi u Budimpešti u Mađarskoj i iskreno se nadamo budućim dobrim rezultatima hrvatske ekipe.



Hrvatska ekipa u razgledavanju mjesta

Bodovi hrvatskih učenika na 66. IMO.

natjecatelj	P1	P2	P3	P4	P5	P6	ukupno	osvojeno
E. Bajamić	7	1	0	7	7	0	22	brončana
H. Valent	7	1	0	5	4	0	17	pohvala
P. Cvetek	7	1	0	7	1	0	16	pohvala
M. Dobrić	7	1	0	7	0	0	15	pohvala
M. Vidović	7	1	0	3	0	0	11	pohvala
F. Cikač	6	0	4	2	0	0	12	
ekipni rezultat	41	6	4	31	12	0	93	

Emanuel Bajamić

Zadatci

Prvi dan, utorak, 15. srpnja 2025.

Zadatak 1. Kažemo da je pravac u ravnini *sunčan* ako **nije** usporedan ni s x -osi, ni s y -osi, ni s pravcem $x + y = 0$.

Neka je $n \geq 3$ zadani cijeli broj. Odredi sve nenegativne cijele brojeve k za koje postoji n različitih pravaca u ravnini koji zadovoljavaju oba sljedeća uvjeta:

- za sve pozitivne cijele brojeve a i b takve da je $a + b \leq n + 1$, točka (a, b) pripada barem jednom od tih pravaca; i
- točno k od tih n pravaca su sunčani.

Zadatak 2. Neka su Ω i Γ kružnice sa središtima M i N , redom, tako da je polumjer kružnice Ω manji od polumjera kružnice Γ . Pretpostavimo da se kružnice Ω i Γ sijeku u dvije različite točke A i B . Pravac MN siječe Ω u C i Γ u D tako da točke C , M , N i D leže na pravcu u tom redoslijedu. Neka je P centar opisane kružnice trokuta ACD . Pravac AP siječe Ω po drugi put u $E \neq A$. Pravac AP siječe Γ po drugi put u $F \neq A$. Neka je H ortocentar trokuta PMN .

Dokaži da pravac kroz H usporedan s AP dodiruje opisanu kružnicu trokuta BEF .
(*Ortocentar trokuta je točka presjeka njegovih visina.*)

Zadatak 3. Neka je $\mathbb{N}$ skup pozitivnih cijelih brojeva. Kažemo da je funkcija $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ *dobra* ako

$$f(a) \text{ dijeli } b^a - f(b)^{f(a)}$$

za sve pozitivne cijele brojeve a i b .

Odredi najmanju realnu konstantu c takvu da za sve dobre funkcije f i sve pozitivne cijele brojeve n vrijedi $f(n) \leq cn$.

Drugi dan, srijeda, 16. srpnja 2025.

Zadatak 4. *Pravi djelitelj* pozitivnog cijelog broja N je pozitivan djelitelj broja N različit od N .

Svi članovi beskonačnog niza $a_1, a_2, \dots$ su pozitivni cijeli brojevi s barem tri prava djelitelja. Za svaki $n \geq 1$, broj a_{n+1} je jednak zbroju tri najveća djelitelja broja a_n .

Odredi sve moguće vrijednosti broja a_1 .

Zadatak 5. Ana i Boris igraju igru čija pravila ovise o pozitivnom realnom broju λ koji oba igrača znaju. U n -tom potezu (počevši od $n = 1$) igra se odvija na sljedeći način:

- Ako je n neparan, Ana bira nenegativan realan broj x_n takav da je

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \lambda n.$$

- Ako je n paran, Boris bira nenegativan realan broj x_n takav da je

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq n.$$

Ako igrač ne može izabrati takav broj x_n , igra završava i njegov protivnik pobjeđuje. Ako se igra nastavlja unedogled, nijedan igrač ne pobjeđuje. Oba igrača znaju vrijednosti svih odabranih brojeva.

Odredi sve vrijednosti λ za koje Ana ima pobjedničku strategiju i sve vrijednosti λ za koje Boris ima pobjedničku strategiju.

Zadatak 6. Promatrajmo ploču dimenzija 2025×2025 sastavljenu od jediničnih kvadrata. Matilda želi na ploču postaviti određen broj pravokutnika, ne nužno istih veličina, tako da svaka stranica svakog pravokutnika leži na rubovima jediničnih kvadrata i da je svaki jedinični kvadrat pokriven najviše jednim pravokutnikom.

Odredi minimalni broj pravokutnika koje Matilda treba postaviti tako da svaki redak i svaki stupac ploče sadrži točno jedan jedinični kvadrat kojeg ne pokriva nijedan pravokutnik.

Vrijeme rješavanja svakog dana: 4 sata i 30 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Rang-lista

	nagrade				broj bod.		nagrade				broj bod.
	I	II	III	poh.			I	II	III	poh.	
Kina	6				231	Švedska	1	3		1	107
SAD	5	1			216	Maroko		2		4	106
Republika Koreja	4	2			203	Norveška		1		5	103
Japan	3	2	1		196	Slovenija			2	4	102
Poljska	3	3			196	Argentina	1			5	99
Izrael	4	1	1		194	Finska		1		3	98
Indija	3	2	1		193	Kolumbija		1		5	95
Singapur	3	2	1		191	Gruzija		2		3	94
Vijetnam	2	3	1		188	Hrvatska		1		4	93
Turska	2	3	1		186	Tadžikistan	2			1	92
Hong Kong	2	3	1		184	Filipini	1	1		1	91
Iran	2	3	1		183	Latvija		1		2	90
Rumunjska	2	3	1		181	Sirija			4	1	89
Mađarska	2	3	1		180	Cipar	1	1		2	87
Australija	2	2	2		179	Danska				3	80
Ujedinjeno Kraljevstvo	3	1	2		178	Kuba		1		2	80
Kazahstan		4	2		175	Moldavija	1	1		1	72
Italija	2	2	2		174	Makao				3	70
Mongolija	1	3	2		174	Azerbajdžan				4	68
Tajvan	2	2	1	1	170	Alžir (5)		3			66
Bosna i Hercegovina	1	3	2		169	Šri Lanka		1		1	63
Kanada	2	2	1		169	Tunis				2	58
Bugarska		3	3		166	Albanija		1		2	49
Ukrajina	1	2	3		165	Pakistan				3	48
Tajland	1	2	2	1	163	Dominikanska Republika				2	47
Bjelorusija	1	1	4		161	Luksemburg (3)		1		2	46
Peru	2	1	2	1	158	Nepal		1		1	46
Uzbekistan		4	1	1	158	Bolivija (4)		1			41
Njemačka		2	4		157	Irak (5)		1			40
Francuska	1	2	2	1	156	Mianmar				1	39
Meksiko		2	4		153	Kostarika				1	37
Brazil		3	2	1	148	Palestina (5)				2	37
Švicarska	1	2	2		145	Kosovo				1	36
Grčka		2	3	1	143	Urugvaj (5)				2	36
Austrija	1	1	3	1	142	Salvador (3)				2	34
Malezija		2	3		139	Island				1	32
Kirgistan		2	3	1	137	Ruanda				2	31
Južnoafrička Repulika		1	4	1	136	Ekvador					30
Novi Zeland		2	3		136	Paragvaj (4)				1	30
Slovačka	1		4	1	136	Lihtenštajn (1)		1			26
Češka		1	3	2	134	Obala Bjelokosti				1	25
Irska		2	1	3	127	Katar				1	17
Litva			5		125	Honduras				1	16
Španjolska		2	2	1	125	Kenija					16
Indonezija			4	2	123	Portoriko (3)				1	16
Srbija		2	2	2	123	UAE				1	15
Turkmenistan		2	1	3	120	Uganda					14
Saudijska Arabija			3	3	118	Crna Gora					13
Estonija		1	2	2	117	Kamerun (1)				1	13
Nizozemska			5	1	117	Bocvana					10
Sjeverna Makedonija	1	1		3	117	Čile (3)					8
Portugal		1	2	2	114	Butan					4
Bangladeš			3	3	113	Gana (2)					2
Armenija			3	3	112	Namibija (4)					2
Belgija	1		1	4	111	Kambodža					1

Broj u zagradi je broj natjecatelja kada je on manji od 6.