

Srednjoeuropska matematička olimpijada, Chemnitz, Njemačka, 25. – 31. kolovoza 2025. g.



U ponedjeljak 25. kolovoza 2025. krenuli smo na 19. Srednjoeuropsku matematičku olimpijadu koja se održavala u Chemnitzu u Njemačkoj. Na olimpijadi je sudjelovalo 10 država srednje Europe: Poljska, Mađarska, Češka, Slovačka, Švicarska, Austrija, Slovenija, Litva, Hrvatska i domaćin Njemačka uz gostujuću državu Ukrajinu. Hrvatsku su ove godine predstavljali učenici: *Matej Križanić* (Prva gimnazija Varaždin), *Fran Čačinović* (Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb), *Emil Missoni*, *Fran Pilipović*, *Ivan Katalenić* i *Lovro Kličković* (svi iz XV. gimnazije, Zagreb), a voditelji ekipe su bili *Ivan Miošić* i *Lukas Novak*. Put na natjecanje je započeo u ranim jutarnjim satima avionskim letom iz Zagreba za Dresden s presjedanjem u Frankfurtu. Nakon dolaska u Dresden smo presjeli na vlak za Chemnitz. Nakon dvosatne vožnje stigli smo u Chemnitz gdje nas je dočekaio vodič hrvatske ekipe. Vodič nas je odveo do hotela gdje smo bili smješteni zajedno s ekipama iz ostalih država. Budući da smo u Chemnitz stigli dosta rano (bili smo čak prva ekipa koja je stigla u hotel) imali smo dosta vremena za razgledavanje grada i odlazak u neki restoran na ručak.

Idući dan ujutro je bilo svečano otvaranje olimpijade te je time i službeno započela 19. Srednjoeuropska matematička olimpijada. Nakon otvaranja učenici su imali slobodan dan za druženje i upoznavanje s ostalim natjecateljima, a voditelji ekipa su bili zaokupljeni sastancima na kojima su se birali zadatci, razgovaralo o bodovnim shemama te diskutiralo o formulacijama i prijevodima zadataka.



Naši učenici i voditelji nakon podjele nagrada

Konačno, u srijedu je došao red i na pojedinačni dio natjecanja u kojem su učenici samostalno rješavali četiri zadatka u trajanju od pet sati. Idući dan, nakon pojedinačnog natjecanja, slijedio je ekipni dio natjecanja na kojemu su se učenici zajedno okušali u rješavanju osam zadataka također u trajanju od pet sati. Nakon svakog dana natjecanja za učenike je bilo organizirano puno različitih izleta na kojima su imali prilike pobliže upoznati grad Chemnitz koji je upravo ove godine proglašen kulturnim središtem Europe za 2025. godinu. Neki od izleta koji su se posebno dojmili našim učenicima su bili posjet obližnjem gradu Freiburgu, izlet u muzej minerala i istraživanje rudnika.

Posljednjeg dana olimpijade ujutro je na rasporedu bilo kuglanje. Dobro smo se snašli i uz malo sreće ekipno smo osvojili prvo mjesto. Nakon kuglanja imali smo par sati slobodnog vremena do svečanog zatvaranja olimpijade koje smo iskoristili za šetnju po gradu, šoping i druženje. Konačno je došlo i vrijeme za svečano zatvaranje i podjelu nagrada. Našu maskotu *Mathe Mišu* smo ove godine okitili s četiri brončane medalje i dvije pohvale. Pohvale su dobili *Matej Križanić* i *Fran Čačinović*, dok su *Fran Pilipović*, *Emil Missoni*, *Ivan Katalenić* i *Lovro Kličković* osvojili broncu. Ekipnu pobjedu odnijeli su Ukrajina i Slovačka, drugo mjesto je zauzela Njemačka, a treće je pripalo Česima.

U Zagreb smo se vratili u nedjelju 31. kolovoza u kasnim večernjim satima. Ovaj MEMO nam je svima bilo jedno lijepo i zanimljivo iskustvo. Iduća, okrugla 20., Srednjoeuropska matematička olimpijada će se održati u Celju, u susjednoj Sloveniji. Nadamo se da će naši učenici i dalje nastaviti s lijepim uspjesima te iduće godine biti još bolji.

Lukas Novak

Zadatci

Na kraju navodimo i popis zadataka s natjecanja.

Individualno natjecanje

1. Neka $\mathbb{R}^+$ označava skup svih pozitivnih realnih brojeva. Neka je $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ funkcija takva da za sve $x, y \in \mathbb{R}^+$ vrijedi

$$yf^{2025}(x) \geq xf(y).$$

Dokaži da postoji prirodan broj n_0 takav da za sve prirodne brojeve $n \geq n_0$ i za sve $x \in \mathbb{R}^*$ vrijedi

$$f^n(x) \geq x.$$

Napomena. f^n označava kompoziciju funkcije f same sa sobom n puta,

$$f^n(x) = f(f(\dots f(x)\dots)).$$

2. Ana igra sljedeću igru na beskonačnoj ploči podijeljenoj na jedinične kvadratiće, koji se u nastavku nazivaju polja ploče. Na početku igre oboji najviše 2025 polja na ploči u crveno. Nakon toga postavlja neki broj topova na crvena polja tako da se na bilo kojem polju nalazi najviše jedan top. Top se u jednom potezu u Aninoj igri može pomicati na isti način kao u šahu (tj. za bilo koji broj polja u horizontalnom ili vertikalnom smjeru), uz ograničenja da sva polja kroz koja top prođe prilikom pomicanja, kao i polje na koje se pomakne, moraju biti crveno obojana polja.

Odredi najveći broj topova koje Ana može postaviti na ploču tako da budu zadovoljena sljedeća dva uvjeta:

- Niti jedan top u jednom potezu ne može doći na polje na kojem se nalazi neki drugi top.
- Svaki top u dva poteza može doći na svako polje na kojem se nalazi bilo koji drugi top.

3. Upisana kružnica ω trokuta ABC dira stranice trokuta $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ redom u točkama D , E i F . Neka su P i Q točke na pravcu BC , različite od D , takve da je $|PB| = |BD|$ i $|QC| = |CD|$. Dokaži da opisane kružnice trokuta PCE i QBF i kružnica ω prolaze kroz istu točku.

4. Za podskup S skupa cijelih brojeva kažemo da je saksonski ako za svaka tri u parovima različita broja $a, b, c \in S$ vrijedi da je $ab + c$ kvadrat cijelog broja.

Dokaži da je svaki saksonski skup konačan. Odredi najveći mogući broj elemenata koje saksonski skup može imati.

Ekipno natjecanje

1. Boris ima n kovanica s cjelobrojnim vrijednostima $c_1 \geq c_2 \geq \dots > 0$. Automat sa slatkišima sadrži n čokoladica s pozitivnim cjelobrojnim cijenama $b_1, b_2, \dots, b_n$. Boris je uočio da za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ vrijedi

$$b_1 + b_2 + \dots + b_i \geq c_1 + c_2 + \dots + c_i.$$

Boris je također izračunao da je ukupna vrijednost svih njegovih kovanica jednaka ukupnoj cijeni svih čokoladica.

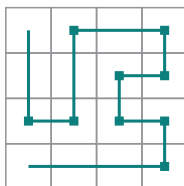
Kako bi kupio čokoladicu s cijenom b_i , Boris mora umetnuti kovanice u automat čija je ukupna vrijednost barem b_i . Pritom automat ne vraća ostatak. Boris može kupovati čokoladice u bilo kojem poretku. Dokaži da Boris može kupiti barem pola čokoladica iz automata.

2. Neka $\mathbb{R}^+$ označava skup svih pozitivnih realnih brojeva. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}^+$ vrijedi

$$f(xy) + f(x) = f(y)f(xf(y)) + f(x)f(y)$$

te da postoji najviše jedan $a \in \mathbb{R}^+$ takav da je $f(a) = 1$.

3. Zmija na kvadratnoj ploči $n \times n$ je put sastavljen od ravnih linija koje povezuju središta susjednih polja i koji pritom prolazi kroz središta svih n^2 polja ploče točno jednom. Dva polja ploče smatramo susjednim ako imaju zajedničku stranicu. Slika prikazuje primjer zmije na ploči 4×4 koja ima ukupno devet pravokutnih zavoja označenih crnim kvadratićima.



Odredi najveći broj pravokutnih zavoja koji može imati zmija koja prolazi kroz svih 2025 polja na ploči dimenzija 45×45 .

4. Neka je n prirodan broj. U dalekoj zemlji Laplandiji postoji $100n$ gradova koji su povezani cestama tako da između svaka dva grada postoji direktna dvosmjerna cesta. Na svakoj cesti između dva grada se plaća neki pozitivan iznos cestarine koju gradovi na krajevima te ceste dijele ravnomjerno među sobom (tj. na dva jednaka dijela).

Prema novom zakonu, predsjednik Laplandije može odabrati neke ceste čiju cestarinu će prikupljati vlada umjesto gradova na krajevima te ceste. Gradonačelnici svih gradova potpisali su sporazum s vladom prema kojem je dogovoreno sljedeće: ukupna vrijednost cestarine koju bilo koji grad prikupi nakon uvođenja tog zakona mora iznositi barem 99 % ukupne vrijednosti cestarine koju taj grad prikupi prije uvođenja zakona. Odredi najveći prirodan broj k , ovisno o n , takav da predsjednik Laplandije može odabrati k cesta s kojih će vlada prikupljati cestarinu BC tako da sporazum između vlade i gradonačelnika bude ispunjen.

5. U šiljastokutnom trokutu ABC vrijedi $|AB| < |AC|$. Točka D je nožište visine iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$. Neka je E točka takva da je četverokut $ABEC$ paralelogram. Neka je M točka unutar trokuta ABC takva da vrijedi $|MB| = |MC|$. Neka je F osnosimetrična slika točke D s obzirom na tangentu opisane kružnice trokuta ADM u točki M . Dokaži da je $|AF| = |DE|$.

6. Neka je D točka unutar šiljastokutnog trokuta ABC takva da vrijedi $\sphericalangle BDC = 180^\circ - \sphericalangle BAC$. Pravci BC i AC se sijeku u točki E , a pravci CD i AB se sijeku u točki F . Neka su $P \neq E$ i $Q \neq F$ točke na pravcu EF takve da je $|BP| = |BE|$ i $|CQ| = |CF|$. Dužine $\overline{AP}$ i $\overline{AQ}$ ponovno sijeku opisanu kružnicu ω trokuta ABC redom u točkama R i S . Dokaži da se pravci RF i SE sijeku na kružnici ω .

7. Neka je n prirodan broj takav da je zbroj svih pozitivnih djelitelja broja $n^2 + n + 1$ djeljiv s 3. Dokaži da je moguće particionirati skup svih pozitivnih djelitelja broja $n^2 + n + 1$ na tri skupa tako da su umnošci svih elemenata pojedinog skupa međusobno jednaki.

8. Odredi da li je sljedeća tvrdnja istinita za sve polinome P stupnja barem dva s ne-negativnim cjelobrojnim koeficijentima:

Postoji prirodan broj m takav da za beskonačno mnogo prirodnih brojeva n vrijedi da broj $P^n(m)$ ima više od n različitih pozitivnih djelitelja.

Napomena. P^n je kompozicija polinoma P sa samim sobom n puta:

$$P^n(x) = P(P(\cdots P(x)\cdots)).$$

Rezultati pojedinačnog natjecanja dostupni su na poveznici

<https://www.memo-official.org/MEMO/results/2025/individual>