IZVORNI ZNANSTVENI RAD
UDK 330.132:330.163

Doc. dr. sc. Ilko Vrankić

PROŠIRENA FUNKCIJA KORISNOSTI I INVERZNE FUNKCIJE POTRAŽNJE

EXTENDED UTILITY FUNCTION AND INVERSE DEMAND FUNCTIONS

SAŽETAK: Kvazikonkavnost direktne funkcije korisnosti i kvazikonveksnost indirektne funkcije korisnosti međusobno su dualna svojstva od kojih je znatno teže opravdati kvazikonkavnost. U ovom se članku polazi od indirektne funkcije korisnosti i na originalan način dokazuje da je izvedena direktna funkcija korisnosti kvazikonkavna. Pritom ključnu ulogu igraju normalizirane varijable na osnovi kojih se definira proširena funkcija korisnosti. Ovaj novi pojam omogućuje znatno pojednostavljenje Hotelling-Woldovog identiteta koje znanstvena javnost ne poznaje.

KLJUČNE RIJEČI: kvazikonkavnost, kvazikonveksnost, dualnost, proširena funkcija korisnosti, inverzne funkcije potražnje.

ABSTRACT: Quasiconcavity of the direct utility function and quasiconvexity of indirect utility function are mutually dual properties, whereby it is much harder to justify quasiconcavity. In this paper we start from the indirect utility function and demonstrate in an original way that the derived direct utility function must be quasiconcave. Hereby the key role is played by the normalized variables which make the basis for the definition of the extended utility function. This new concept significantly simplifies Hotelling-Wold identity in an original way. Such simplification has so far been unknown to scientific community.

KEY WORDS: quasiconcavity, quasiconvexity, duality, extended utility function, inverse demand functions.

1. UVOD

Od svih svojstava direktne funkcije korisnosti najteže je opravdati kvazikonkavnost. Istodobno ovo svojstvo ima najosebujnije ekonomsko tumačenje i zauzima središnje mjesto u ordinalnoj teoriji ponašanja potrošača u obliku zakona opadajuće granične stope supstitucije između dobara. Poznato je kako se, polazeći od direktne funkcije korisnosti koja opisuje preferencije potrošača u prostoru, količina dobara izvodi indirektnom funkcijom korisnosti koja opisuje preferencije potrošača u prostoru normaliziranih cijena dobara. Normalizacija cijena dobara igra ključnu ulogu u određivanju međusobnog položaja indirektne budžetske crte i indirektne krivulje indiferencije na osnovi čega zaključujemo da je indirektna funkcija korisnosti kvazikonveksna. Ovo svojstvo koje također ima osebujno ekonomsko tumačenje, znatno je lakše opravdati. Dualnost između cijena i količina otkriva kako se normaliziraju količine dobara. Na osnovi normaliziranih količina i grafičkog prikaza dualnih prostora cijena i količina određujemo međusobni položaj direktne budžetske crte i direktne krivulje indiferencije koji otkriva da je izvedena direktna funkcija korisnosti kvazikonkavna. Iz dualnosti između direktne i indirektne funkcije korisnosti izvode se dva značajna identiteta: Roy-Villeov identitet i Hotelling-Woldov identitet. Homogenost indirektne funkcije korisnosti koja ovisi o cijenama i dohotku, znatno pojednostavljuje Roy-Villeov identitet. Na osnovi veze između maksimalne korisnosti pri bilo kojim cijenama i dohotku i maksimalne korisnosti pri normaliziranim cijenama i dualnosti između funkcije izdataka i funkcije udaljenosti definiramo proširenu funkciju korisnosti. Polazeći od proširene funkcije korisnosti, izvodimo Hotelling-Woldov identitet u znatno jednostavnijem obliku koji u znanstvenim krugovima nije poznat.

2. DUALNA SVOJSTVA DIREKTNE I INDIREKTNE FUNKCIJE KORISNOSTI

Direktna funkcija korisnosti ili samo funkcija korisnosti opisuje preferencije potrošača na osnovi količina dobara. Njezina je domena skup zamislive potrošnje. Pođemo li od stajališta da potrošač može zamisliti kako troši nenegativne količine svakog od konačno mnogo savršeno djeljivih dobara, skup je zamislive potrošnje nenegativni realni ortant,

$$\mathrm{X} = \mathrm{R}_{+}^{n} = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) : x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Ovaj skup čine košare dobara kojima funkcija korisnosti, $u(\mathbf{x})$, pridružuje indekse korisnosti. Pritom je bitan samo redoslijed pripisanih indeksa koji se slaže s redoslijedom košara dobara dobivenim na osnovi subjektivnih preferencija racionalnog potrošača. Kako strogo rastuće transformacije ne utječu na redoslijed, numeričkih je opisa racionalnih i neprekidnih preferencija beskonačno mnogo i važnost pridajemo ordinalnim svojstvima funkcije korisnosti. Povećanje količina svih dobara ima blagotvoran učinak na blagostanje nezasitnog potrošača i funkcija je korisnosti striktno rastuća. Monotonost funkcije korisnosti nadopunjava kvazikonkavnost koja ima osebujno ekonomsko tumačenje. Uprosječimo li sadržaje jednako poželjnih košara dobara nećemo dobiti nepoželjniju košaru. Zbog supstitucije između dobara ovim smo ordinalnim svojstvima pridodali neprekidnost. Skupovi su košara dobara koje potrošač jednako voli hiperplohe indiferencije koje odozdo zatvaraju konveksne skupove barem tako dobrih košara dobara. U slučaju dvaju dobara govorimo o krivuljama indiferencije koje nemaju pozitivno nagnutih dijelova. Budžetska je crta s koje nezasitan potrošač izabire najpoželjniju košaru dobara tangenta na krivulju indiferencije koja predočuje blagostanje potrošača. Da isključimo skokove u tijeku tangente i omogućimo nesmetanu upotrebu diferencijalnog računa, u optimizaciji se oslanjamo na diferencijabilnost funkcija cilja kojih gradijenti nisu vektori nula. Pretpostavka o diferencijabilnosti funkcije korisnosti ima također ekonomsko tumačenje, nema naglih promjena subjektivne vrijednosti male jedinice jednog dobra koju izražavamo subjektivnom vrijednošću one količine drugog dobra koju je potrošač zauzvrat voljan žrtvovati. Možemo reći i da diferencijabilnost isključuje skokovite promjene granične stope supstitucije između dobara pri nepromijenjenom blagostanju potrošača odnosno mogućnost pojave šiljaka na krivuljama indiferencije.

Različita tržišna razdoblja obično opisujemo cijenama na koje neznatni potrošač nema utjecaja, $\mathbf{p}=(p_1,\ldots,p_n)$, i dohotkom kojim raspolaže, M. U svakom razdoblju potrošač od dostupnih košara dobara izabire košaru dobara koju najviše voli i kojoj direktna funkcija korisnosti pridružuje najveći indeks korisnosti. Maksimalna je korisnost funkcija cijena dobara i dohotka potrošača na osnovi kojih indirektno uspoređujemo blagostanje potrošača u različitim razdobljima. Funkciju maksimalnih korisnosti nazivamo stoga i indirektnom funkcijom korisnosti,

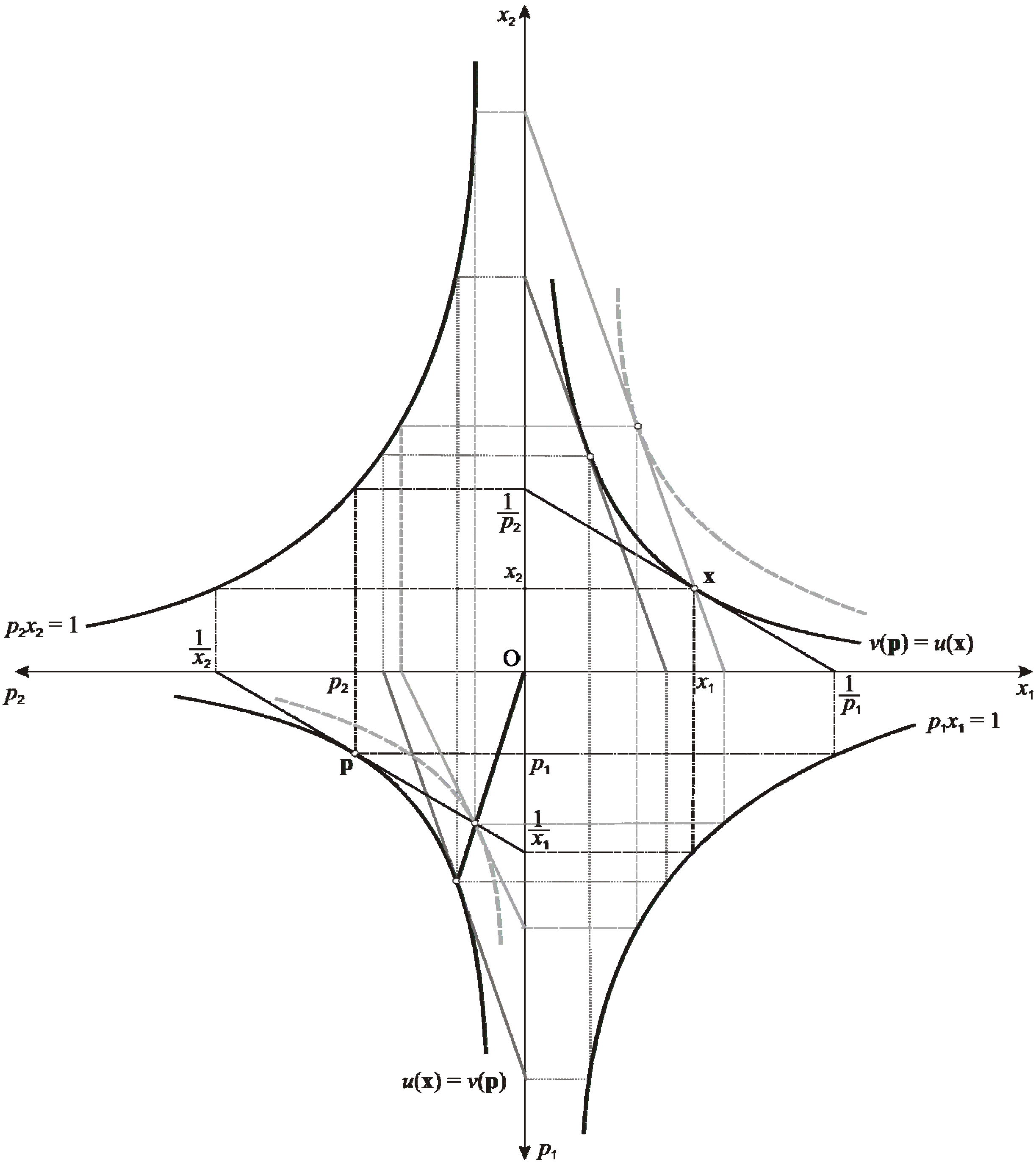
$$v(\mathbf{p},M)=\max_{\mathbf{x}\geq\mathbf{0}}\ u(\mathbf{x})$$
$$\mathbf{px}=M.$$

Proporcionalna promjena cijena i dohotka nema utjecaja na budžetski prostor i indirektna je funkcija korisnosti homogena funkcija u cijenama i dohotku i stupanj je homogenosti jednak nuli. Maksimalna korisnost ovisi samo o normaliziranim cijenama ili cijenama izraženim u jedinicama dohotka,

$$v(\mathbf{p})=\max_{\mathbf{x}\geq\mathbf{0}}\ u(\mathbf{x})$$
$$\mathbf{px}=1.$$

Povećanje cijena svih dobara ima poguban učinak na blagostanje potrošača i indirektna je funkcija korisnosti striktno opadajuća u cijenama dobara. Ovo je svojstvo indirektne funkcije korisnosti dualno striktnom rastu direktne funkcije korisnosti. Prirodno se nameće pitanje: Ima li kvazikonkavnost direktne funkcije korisnosti dual među svojstvima indirektne funkcije korisnosti. Odgovor na ovo pitanje pronaći ćemo na putu od direktne do indirektne funkcije korisnosti i natrag.

Slika 1. Od kvazikonkavne direktne funkcije korisnosti do kvazikonveksne indirektne funkcije korisnosti[1]



[1] Oslanjamo se na grafički prikaz Darrougha i Southeya koji nadopunjujemo. Analiza koja slijedi trivijalno se poopćuje na više dobara.

Promotrimo pramen budžetskih pravaca kroz košaru dobara **x**, rješenje problema izbora potrošača koji se suočava s normaliziranim cijenama **p**. Prikladnom preraspodjelom izdataka potrošač ne može doći u nepovoljniji položaj i indeks je korisnosti košare dobara **x** najmanja od maksimalnih korisnosti koje dobivamo za normalizirane cijene pri kojima potrošač može sebi priuštiti košaru dobara **x**,[2]

$$u(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{p} \geq \mathbf{0}} \quad v(\mathbf{p})$$

$$\mathbf{px} = 1.$$

Pramen se pravaca kroz košaru dobara **x** iz prostora količina dobara preslikava u indirektnu budžetsku crtu u prostoru normaliziranih cijena. Krajevi indirektne budžetske crte, koje određuju recipročne vrijednosti količina dobara, $\frac{1}{x_1}$ i $\frac{1}{x_2}$, odgovaraju okomici i paraleli kroz **x** s obzirom na apscisu. Svakom pravcu iz pramena pridružimo paralelnu budžetsku crtu koju dobijemo proporcionalnim povećanjem cijena koje poništava učinak prvotne promjene cijena na blagostanje potrošača. Nove su budžetske crte tangente na polaznu krivulju indiferencije na osnovi kojih dobivamo indirektnu krivulju indiferencije u prostoru normaliziranih cijena. Indirektna krivulja indiferencije sadrži sve kombinacije normaliziranih cijena za koje je maksimalna korisnost jednaka korisnosti košare dobara **x** ili sve kombinacije cijena pri kojima su za razinu korisnosti $u(\mathbf{x})$ minimalni izdatci jednaki jedan.

Primjećujemo kako je međusobni položaj budžetske crte i krivulje indiferencije isti bez obzira nalazimo li se u direktnom prostoru količina ili indirektnom prostoru cijena dobara, stoga su nepozitivno nagnute direktne i indirektne krivulje indiferencije istog oblika. U oba su prostora isprekidanom linijom prikazane krivulje indiferencije koje predočuju veće blagostanje potrošača. Znamo da kvazikonkavnoj direktnoj funkciji korisnosti odgovara konveksan skup barem tako dobrih košara ili superiorni skup u prostoru količina koji odozdo zatvara direktna krivulja indiferencije. Dualno, indirektna krivulja indiferencije konveksnog oblika odozdo zatvara konveksan inferiorni skup u prostoru cijena dobara pa je indirektna funkcija korisnosti kvazikonveksna. Ovo dualno svojstvo indirektne funkcije korisnosti ima također osebujno ekonomsko tumačenje. Uprosječimo li normalizirane cijene za koje je blagostanje potrošača jednako nećemo ga dovesti u povoljniji položaj.

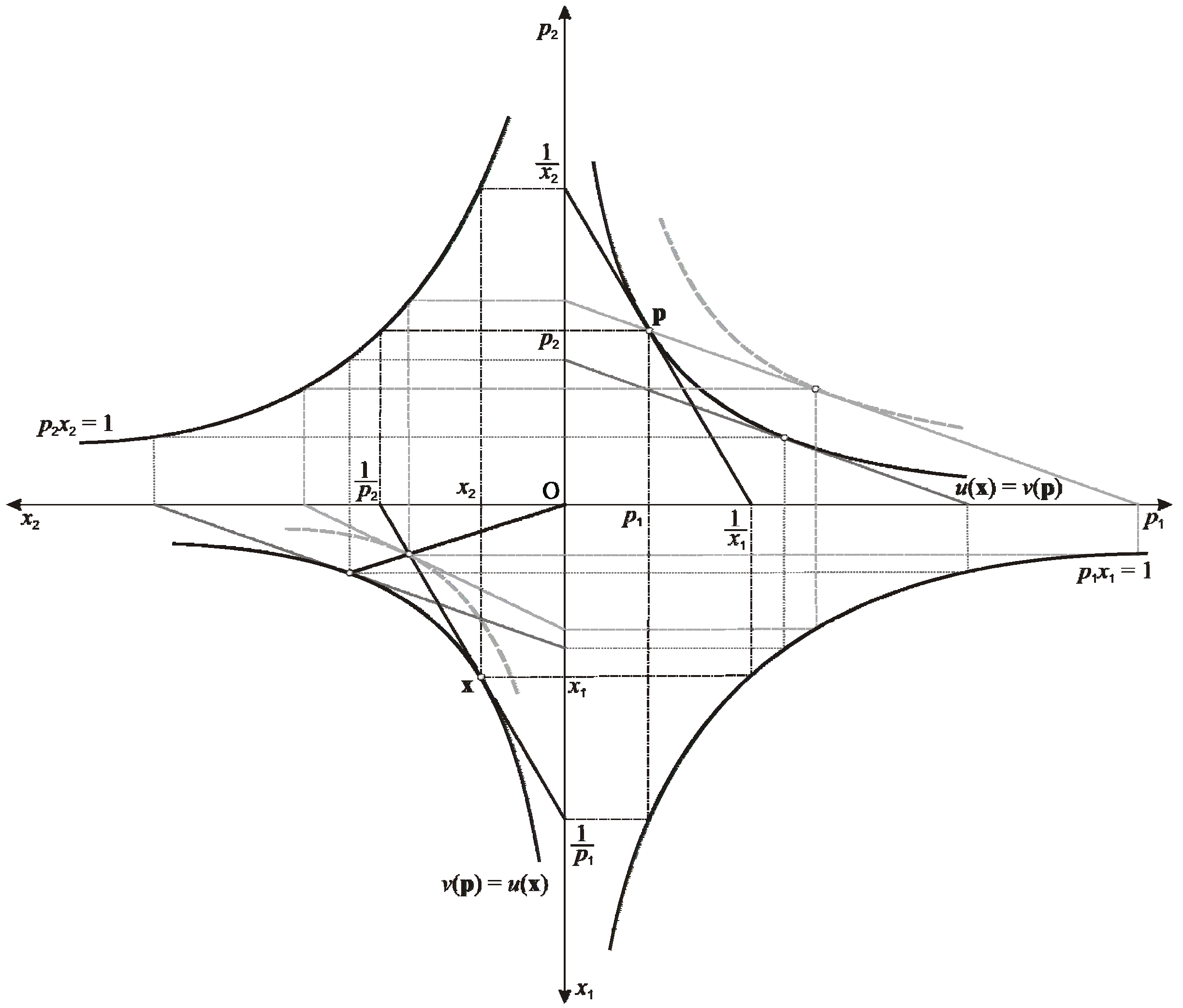
Pođimo sada od stajališta da nam je poznata striktno opadajuća i kvazikonveksna indirektna funkcija korisnosti, $v(\mathbf{p})$, na osnovi koje izvodimo direktnu funkciju korisnosti iz sljedećeg modela:

$$u(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{p} \geq \mathbf{0}} \quad v(\mathbf{p})$$

$$\mathbf{px} = 1.$$

[2] Problemi proširenja po neprekidnosti na nenegativni realni ortant izvan su okvira ovoga rada.

Slika 2. Od kvazikonveksne indirektne funkcije korisnosti do kvazikonkavne direktne funkcije korisnosti



Promotrimo pramen indirektnih budžetskih crta kroz vektor normaliziranih cijena **p** pri kojem bi potrošač kupio košaru dobara **x**. Idući na prikladan način po bilo kojem pravcu iz pramena indirektna se korisnost u odnosu na $v(\mathbf{p})$ ne povećava. Stoga je indeks indirektne korisnosti koji pridružujemo vektoru normaliziranih cijena **p** najveći od indeksa korisnosti koje dobivamo za sve kombinacije količina koje potrošač može sebi priuštiti,

$$v(\mathbf{p}) = \max_{\mathbf{x} \geq \mathbf{0}} \; u(\mathbf{x})$$
$$\mathbf{px} = 1.$$

Pramen se pravaca kroz vektor normaliziranih cijena **p** iz prostora cijena dobara preslikava u direktnu budžetsku crtu u prostoru količina dobara. Krajevi direktne budžetske crte, koje određuju recipročne vrijednosti cijena dobara, $\frac{1}{p_1}$ i $\frac{1}{p_2}$, odgovaraju okomici i paraleli kroz **p** s obzirom na apscisu. Svakom pravcu iz pramena pridružimo indirektnu budžetsku crtu koju dobijemo proporcionalnim povećanjem količina koje poništava učinak prvotne promjene količina na blagostanje potrošača. Nove su indirektne budžetske crte tangente na polaznu indirektnu krivulju indiferencije na osnovi kojih dobivamo direktnu krivulju indiferencije u prostoru količina dobara.

Ponovno je međusobni položaj budžetske crte i krivulje indiferencije isti bez obzira u kojem se prostoru nalazimo. Prema tome, direktna je krivulja indiferencije konveksnog oblika i odozdo zatvara konveksan skup barem tako dobrih košara. Možemo reći da potrošač voli uprosječenu košaru dobara barem toliko koliko i jednu od krajnosti ili da je direktna funkcija korisnosti kvazikonkavna.

Ovaj smo put pošli od striktno opadajuće i kvazikonveksne indirektne funkcije korisnosti i izveli striktno rastuću direktnu funkciju korisnosti za koju smo pokazali da je kvazikonkavna. Prije toga smo, polazeći od striktno rastuće i kvazikonkavne direktne funkcije korisnosti, izveli striktno opadajuću indirektnu funkciju korisnosti za koju smo pokazali da je kvazikonveksna. Više nema sumnje da su kvazikonkavnost direktne funkcije korisnosti i kvazikonveksnost indirektne funkcije korisnosti međusobno dualna svojstva koja se jasno otkrivaju u procesu izvođenja tih funkcija. Osobito je važno napomenuti da su u analizi ponašanja potrošača pri pozitivnim cijenama mjerodavni samo oni dijelovi skupa zamislive potrošnje na kojima direktna funkcija korisnosti zaista ima izvedena svojstva.

3. NOVI OBLIK HOTELLING-WOLDOVOG IDENTITETA

U prethodnom smo odjeljku istaknuli dualnost između direktne i indirektne funkcije korisnosti. Iz ove se dualne veze izvode dva značajna identiteta: Roy-Villeov identitet i Hotelling-Woldov identitet. Roy-Villeov identitet omogućuje jednostavnije izvođenje funkcija potražnje polazeći od indirektne funkcije korisnosti. Pritom, radi jedinstvenosti izbora potrošača, pretpostavljamo da je direktna funkcija korisnosti striktno kvazikonkavna. Zbog tangencijalnosti indirektne budžetske crte i indirektne krivulje indiferencije vektor je količina dobara koje potrošač kupuje pri normaliziranim cijenama proporcionalan gradijentu indirektne funkcije korisnosti i faktor proporcionalnosti određuje budžetsko ograničenje,

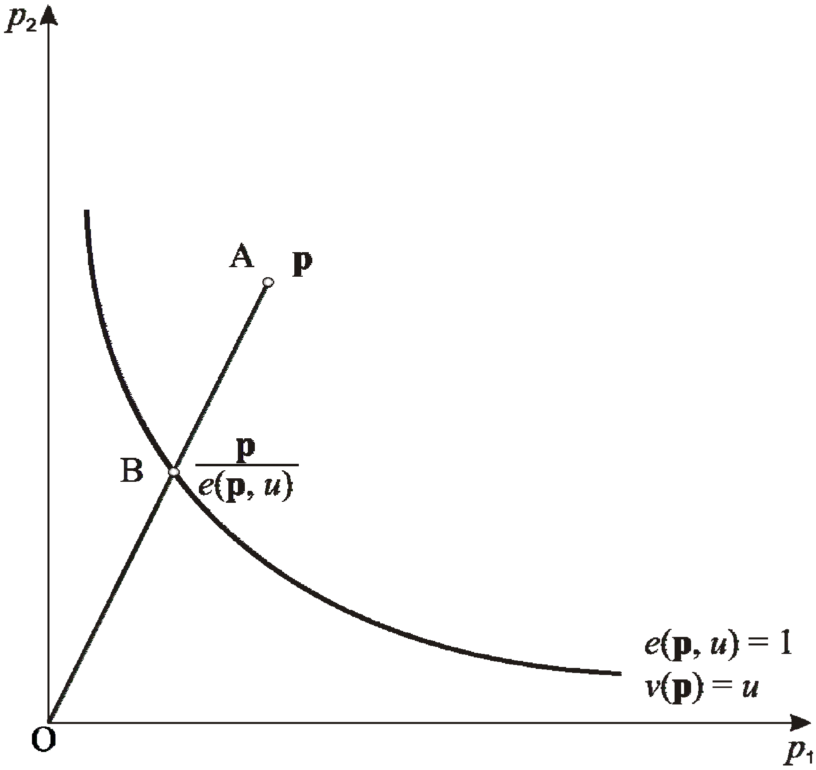
$$\mathbf{x} = \frac{\nabla v}{\mathbf{p}\nabla v}.$$

Hotelling-Woldov identitet omogućuje jednostavnije izvođenje inverznih funkcija potražnje polazeći od direktne funkcije korisnosti. Zbog tangencijalnosti direktne budžetske crte i direktne krivulje indiferencije vektor je normaliziranih cijena pri kojima potrošač kupuje određenu košaru dobara proporcionalan gradijentu direktne funkcije korisnosti i faktor proporcionalnosti ponovno određuje budžetsko ograničenje,

$$\mathbf{p} = \frac{\nabla u}{\mathbf{x}\nabla u}.$$

Promotrimo indirektnu krivulju indiferencije u prostoru cijena dobara koja sadrži sve kombinacije normaliziranih cijena pri kojima se blagostanje potrošača ne mijenja.

Slika 3. Indirektna krivulja indiferencije i funkcija izdataka



Minimalni su izdatci pri tim cijenama za zadanu razinu korisnosti jednaki jedan. Prisjetimo se da se funkcija izdataka izvodi iz modela minimizacije izdataka za zadanu razinu korisnosti,

$$e(\mathbf{p}, u) = \min_{\mathbf{x} \geq \mathbf{0}} \ \mathbf{px}$$
$$u(\mathbf{x}) = u.$$

Polazeći od indirektne krivulje indiferencije, minimalne izdatke možemo pri bilo kojim cijenama jednostavnije izraziti kvocijentom,

$$e(\mathbf{p}, u) = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}.$$

Prema tome, funkcija izdataka je funkcija udaljenosti za indirektnu funkciju korisnosti. Proporcionalna promjena cijena koje je faktor proporcionalnosti recipročan minimalnim izdatcima potrošača, vraća na zadanu indirektnu krivulju indiferencije i njegovo se blagostanje ne mijenja. Jasno je da su cijene dobara tada normalizirane ili izražene u jedinicama dohotka. Funkciju izdataka možemo izvesti polazeći od indirektne funkcije korisnosti bez obzira jesu li cijene dobara normalizirane,

$$v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) = v(\frac{\mathbf{p}}{e(\mathbf{p}, u)}) = u.$$

Pritom nema dvojbe da vezu između maksimalne korisnosti pri bilo kojim cijenama i dohotku potrošača i maksimalne korisnosti pri normaliziranim cijenama određuje jednakost pripadajućih budžetskih prostora,

$$v(\mathbf{p}, M) = v(\frac{\mathbf{p}}{M}).$$

Proširena funkcija maksimalnih korisnosti ovisi o cijenama i dohotku u kojima je homogena. Stupanj je homogenosti nula i primjenom Eulerovog teorema dobivamo:

$$\mathbf{p}\nabla_{\mathbf{p}} v(\mathbf{p}, M) + M v_M(\mathbf{p}, M) = 0,$$

$$\mathbf{p}\nabla_{\mathbf{p}} v(\mathbf{p}, M) = -M v_M(\mathbf{p}, M).$$

Jedinstveni izbor potrošača ovisi samo o normaliziranim cijenama i malo računanja otkriva jednostavniji oblik Roy-Villeovog identiteta:

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}, M) = \mathbf{x}(\frac{\mathbf{p}}{M}),$$

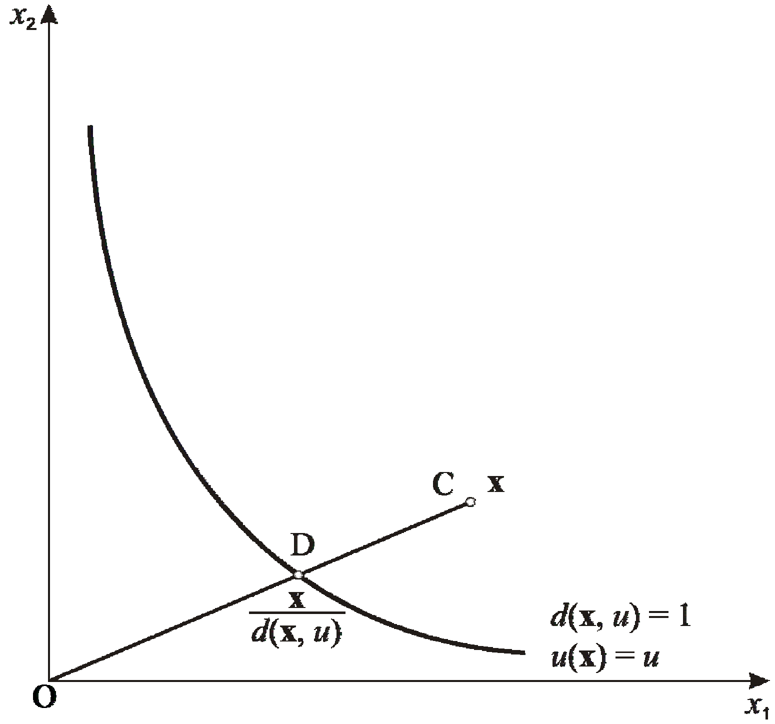
$$\mathbf{x}(\mathbf{p}, M) = \frac{\nabla v(\frac{\mathbf{p}}{M})}{\frac{\mathbf{p}}{M}\nabla v(\frac{\mathbf{p}}{M})},$$

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}, M) = \frac{M\nabla_{\mathbf{p}} v(\mathbf{p}, M)}{\mathbf{p}\nabla_{\mathbf{p}} v(\mathbf{p}, M)},$$

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}, M) = -\frac{\nabla_{\mathbf{p}} v(\mathbf{p}, M)}{v_M(\mathbf{p}, M)}.$$

Vidjeli smo da se cijene normaliziraju tako da se podijele s minimalnim izdatcima. Dualnost između cijena i količina otkriva kako se normaliziraju količine dobara. Promotrimo direktnu krivulju indiferencije u prostoru količina dobara koja sadrži sve košare dobara koje potrošač jednako voli.

Slika 4. Direktna krivulja indiferncije i funkcija udaljenosti



Funkciju udaljenosti za direktnu funkciju korisnosti dobijemo dijeljenjem,

$$d(\mathbf{x},u) = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OD}}.$$

Radi potpunosti izlaganja podsjetimo da je funkcija udaljenosti funkcija izdataka za indirektnu funkciju korisnosti,

$$d(\mathbf{x},u) = \min_{\mathbf{p}\geq\mathbf{0}} \ \mathbf{px}$$
$$v(\mathbf{p}) = u.$$

Proporcionalna promjena količina koje je faktor proporcionalnosti recipročan udaljenosti košare dobara i krivulje indiferencije potrošača, vraća na krivulju indiferencije i njegovo se blagostanje ne mijenja. Kažemo da takva promjena količina normalizira količine dobara. Na osnovi normaliziranih varijabli u prošlom smo odjeljku izveli svojstva indirektne i direktne funkcije korisnosti. Oslanjajući se na normalizirane količine dobara, funkciju udaljenosti možemo izvesti polazeći od direktne funkcije korisnosti,

$$u\left(\frac{\mathbf{x}}{d(\mathbf{x},u)}\right) = u.$$

Indirektni budžetski prostor određuju normalizirane količine na osnovi kojih definiramo proširenu funkciju korisnosti na sljedeći način:

$$u(\mathbf{x},d) = u\left(\frac{\mathbf{x}}{d}\right).$$

Primijetimo da, polazeći od proširene funkcije korisnosti, funkciju udaljenosti možemo izvesti bez obzira jesu li količine dobara normalizirane,

$$u(\mathbf{x}, d(\mathbf{x}, u)) = u(\frac{\mathbf{x}}{d(\mathbf{x}, u)}) = u.$$

Proširena funkcija korisnosti ovisi o količinama i udaljenosti u kojima je homogena. Stupanj je homogenosti nula i primjenom Eulerovog teorema dobivamo:

$$\mathbf{x}\nabla_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, d) + d u_d(\mathbf{x}, d) = 0,$$

$$\mathbf{x}\nabla_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, d) = -d u_d(\mathbf{x}, d).$$

Jedinstvene normalizirane cijene pri kojima potrošač kupuje normaliziranu košaru dobara dobijemo tako da objedinimo ovaj nalaz i Hotelling-Woldov identitet:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, d) = \mathbf{p}(\frac{\mathbf{x}}{d}),$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, d) = \frac{\nabla u(\frac{\mathbf{x}}{d})}{\frac{\mathbf{x}}{d}\nabla u(\frac{\mathbf{x}}{d})},$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, d) = \frac{d\nabla_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, d)}{\mathbf{x}\nabla_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, d)},$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, d) = -\frac{\nabla_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, d)}{u_d(\mathbf{x}, d)}.$$

Količine dobara se normaliziraju tako da se podijele s udaljenošću. Stoga za jediničnu udaljenost iz prethodne jednakosti dobivamo normalizirane cijene pri kojima potrošač kupuje zadanu košaru dobara ili inverzne funkcije potražnje:

$$\mathbf{p} = -\frac{\nabla_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, 1)}{u_d(\mathbf{x}, 1)},$$

$$\mathbf{p} = -\frac{\nabla u(\mathbf{x})}{u_d(\mathbf{x}, 1)}.$$

Ovaj oblik Hotelling-Woldovog identiteta koji polazi od proširene funkcije korisnosti u znanstvenoj literaturi nije poznat. Njegova se prednost očituje u znatno manjem broju računskih operacija potrebnih da se dobiju inverzne funkcije potražnje. Prema tome, nije neopravdano očekivati da će zauzeti značajno mjesto ne samo u teoretskim nego i u empirijskim istraživanjima.

4. ZAKLJUČAK

U ordinalnoj teoriji ponašanja potrošača obično se polazi od neprekidne, striktno rastuće i kvazikonkavne direktne funkcije korisnosti i izvodi neprekidna, striktno opadajuća i kvazikonveksna indirektna funkcija korisnosti. Pritom je znatno lakše opravdati svojstva indirektne funkcije korisnosti. U ovom smo radu pošli od indirektne funkcije korisnosti i na osnovi normaliziranih količina na originalan način odredili međusobni položaj direktne budžetske crte i direktne krivulje indiferencije koji otkriva da je izvedena direktna funkcija korisnosti kvazikonkavna. Na osnovi dualnosti definirali smo proširenu funkciju korisnosti i izveli znatno jednostavniji oblik Hotelling-Woldovog identiteta kojeg nismo susreli u znanstvenoj literaturi.

LITERATURA

1. Blackorby, C., Primont, D., i R. R. Russell, (1978): *Duality, separability and functional structure: Theory and economic applications*, New York: American Elsevier.
2. Cornes, R. C., (1992): *Duality and modern economics*, Cambridge: Cambridge University Press.
3. Darrough, M. N., i C. Southey, (1977): "Duality in consumer theory made simple: The revealing of Roy's identity", *Canadian Journal of Economics*, 10: 307-317.
4. Deaton, A., i J. Muelbauer, (1980): *Economics and consumer behavior*, Cambridge: Cambridge University Press.
5. Diewert, W. E., (1980): "Duality approaches to microeconomic theory", u K.J. Arrow i M. D. Intriligator, *Handbook of mathematical economics*, *Vol II,* Amsterdam: North-Holland, 535-599.
6. Weymark, J. A., (1980): "Duality results in demand theory", *European Economic Review*, 14: 377-395.